УДК 517.5+517.984

В. А. Деркач (Донец. нац. ун-т)

ОБ ИНДЕФИНИТНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ ШУРА – НЕВАНЛИННЫ – ПИКА*

The Schur – Nevalinna – Pick interpolation problem considered in the class of generalized Schur functions is reduced to the problem of extension of some isometric operator V that acts in the Pontryagin space. The description of solutions of the problem is based on the M. G. Krein theory of a resolvent matrix.

Інтерполяційна задача Шура – Неванлінни – Піка, яка розглядається в класі узагальнених функцій Шура, зводиться до задачі розширення деякого ізометричного оператора V, що діє у просторі Понтрягіна. Опис розв'язків задачі базується на теорії М. Г. Крейна резольвентної матриці.

Пусть $\kappa \in \mathbb{Z}_+$, $\mathfrak{L} = \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $[\mathfrak{L}]$ — множество матриц порядка $n \times n$. $[\mathfrak{L}]$-значная функция $s(z)$, голоморфная в некоторой окрестности Ω точки 0, принадлежит обобщенному классу Шура $S_\kappa := S_\kappa([\mathfrak{L}])$, если ядро

$$\mathrm{K}_s(z, w) = \frac{I_{\mathfrak{L}} - s(z)s(w)^*}{1 - z\overline{w}}, \quad z, w \in \Omega,$$

имеет κ отрицательных квадратов в Ω (см. [1]). Каждая функция $s(z)$ из обобщенного класса Шура допускает мероморфное продолжение в единичный круг $\mathbb{D}$. Обозначим через $H_\kappa^\infty([\mathfrak{L}])$ класс $[\mathfrak{L}]$-значных функций $\tau(z)$, мероморфных в $\mathbb{D}$, суммарная полюсная кратность которых в $\mathbb{D}$ не превышает κ (см. [2]). Как известно [1], $S_\kappa([\mathfrak{L}]) \subset H_\kappa^\infty([\mathfrak{L}])$.

В настоящей работе рассматривается следующая интерполяционная задача в классе S_κ.

Задача $SNP(\kappa, \eta, \theta)$. *Даны* $\kappa \in \mathbb{Z}_+$, $\eta \in H_+^\infty([\mathfrak{L}])$ *и внутренняя матрица-функция* θ. *Найти функцию* $s \in S_\kappa$ *такую, что*

$$\theta(z)^{-1}[s(z) - \eta(z)] \in H_\kappa^\infty([\mathfrak{L}]). \tag{1}$$

Если θ — произведение Бляшке – Потапова, то задача (1) сводится к тангенциальной интерполяционной задаче, рассмотренной в [3 – 7]. Интерполяцию на сингулярном спектре внутренней функции впервые исследовал Д. Сарасон [8] в связи с задачей обобщенной операторной интерполяции. В предложенной выше постановке задачу $SNP(\kappa, \eta, \theta)$ при $\kappa \neq 0$ изучали Дж. Болл и Дж. Хелтон [9] (см. также [10, 11]), где для доказательства ее разрешимости использовался индефинитный вариант теоремы Берлинга – Лакса. В случае $\kappa = 0$ полное описание решений задачи $SNP(0, \eta, \theta)$ получено в работе [12].

Как показано в [13], задачу $SNP(0, \eta, \theta)$ можно свести к абстрактной задаче интерполяции, изученной в [14]. Индефинитная абстрактная задача интерполяции $AIP(\kappa)$, $\kappa \neq 0$, рассматривалась в [15]. В настоящей работе задача

* Частично поддержана Финской академией наук (проект № 49349).

$SNP(\kappa, \eta, \theta)$ сводится к некоторой абстрактной задаче интерполяции $AIP(\kappa)$. Установлено взаимно однозначное соответствие между множествами решений задач $SNP(\kappa, \eta, \theta)$ и $AIP(\kappa)$. Это позволяет свести задачу $SNP(\kappa, \eta, \theta)$ к описанию унитарных расширений некоторого модельного изометрического оператора V, связанного с данными задачи $SNP(\kappa, \eta, \theta)$. При описании всех решений задачи $SNP(\kappa, \eta, \theta)$ существенно используются методы теории М. Г. Крейна $\mathfrak{L}$-резольвентной матрицы [16, 17]. Настоящая работа является продолжением работы [15], в которой наряду с описанием решений абстрактной задачи интерполяции в обобщенных классах Шура получены явные формулы для фундаментального разложения индефинитного пространства де Бранжа – Ровняка.

1. Класс H_κ^∞. Классы S_κ и H_κ^∞ введены в [1] и [2] соответственно. Напомним [1], что каждая функция s класса S_κ, голоморфная в области $\Omega(s) \subset \mathbb{D}$, допускает левую и правую факторизации Крейна – Лангера

$$s(z) = b_L(z)^{-1} s_L(z), \qquad \ker s_L(z)^* \cap \ker b_L(z)^* = \{0\}, \qquad z \in \Omega(s), \tag{2}$$

$$s(z) = s_R(z) b_R(z)^{-1}, \qquad \ker s_R(z) \cap \ker b_R(z) = \{0\}, \qquad z \in \Omega(s), \tag{3}$$

где s_L, $s_R \in S$ и b_L, b_R — произведения Бляшке – Потапова степени κ.

Пусть $b(z)$ — рациональная матрица-функция, полюсы которой расположены в $\mathbb{D}$. Полюсная кратность $\delta(b, \alpha)$ матрицы-функции b в точке α определяется равенством

$$\delta(b, \alpha) := \operatorname{rank}(b_{-k+i-j})_{i,j=0}^{k-1}, \tag{4}$$

где $b_{-1}, \ldots, b_{-k}$ — коэффициенты разложения Лорана функции b в точке α,

$$b(z) = \sum_{j=-k}^{\infty} b_j (z-\alpha)^j.$$

Число $\delta(b) = \sum_{\alpha \in \mathbb{D}} \delta(b, \alpha)$ называется степенью Мак-Миллана [18] (или тотальной полюсной кратностью) функции b. $[\mathfrak{L}]$-значная функция $s(z)$ принадлежит классу H_κ^∞ (см. [2]), если она имеет вид $s(z) = h(z) + b(z)$, где $h \in H_+^\infty([\mathfrak{L}])$ и b — рациональная оператор-функция из H_-^∞, для которой $\delta(b) \le \kappa$.

Предложение 1 (ср. с теоремой 7.7 [19]). *Пусть s — $[\mathfrak{L}]$-значная функция, мероморфная в $\mathbb{D}$, и $\tilde{s}(z) = s(\bar{z})^*$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

i) $s \in H_\kappa^\infty$;

ii) $\tilde{s} \in H_\kappa^\infty$;

iii) *s допускает факторизацию* (2), *где $s_L \in H_+^\infty$ и b_L — произведение Бляшке – Потапова степени $\delta(b_L) \le \kappa$;*

iv) *s допускает факторизацию* (3), *где $s_R \in H_+^\infty$ и b_R — произведение Бляшке – Потапова степени $\delta(b_R) \le \kappa$.*

Доказательство. i) $\Leftrightarrow$ iii). Пусть $s(z)$ в окрестности α имеет следующее разложение Лорана:

$$s(z) = s_{0k}(z-\alpha)^{-k} + \ldots + s_{01}(z-\alpha)^{-1} + s_{00}(z),$$

где $s_{0j} \in [\mathfrak{L}]$ и $s_{00}(z)$ голоморфна в точке α. Рассмотрим фактор Бляшке – Потапова

$$b_1(z) = (I - P_1) + \frac{z-\alpha}{1-z\bar{\alpha}} P_1,$$

где P_1 — ортогональный проектор на $\operatorname{ran} s_{0k}$. В силу леммы 7.8 из [19] полюсная кратность функции $b_1 s$ в точке α находится из равенства

$$\delta(b_1 s, \alpha) = \delta(s, \alpha) - \operatorname{rank} P_1.$$

Матрица-функция $s_1 = b_1 s$ в точке α имеет следующее разложение Лорана:

$$s_1(z) = s_{1k-1}(z-\alpha)^{-(k-1)} + \ldots + s_{11}(z-\alpha)^{-1} + s_{10}(z),$$

где

$$s_{1k-1} = \frac{s_{0k}}{1-|\alpha|^2} + (I - P_1) s_{0k-1}.$$

Пусть P_2 — ортогональный проектор на $\operatorname{ran} s_{1k-1}$. Поскольку

$$P_1 s_{1k-1} = \frac{s_{0k}}{1-|\alpha|^2},$$

то $\operatorname{ran} P_1 P_2 = \operatorname{ran} P_1$. После нескольких шагов получаем последовательность P_j, $j = 1,\ldots,k$, ортогональных проекторов и соответствующую последовательность факторов Бляшке – Потапова

$$b_j(z) = (I - P_j) + \frac{z-\alpha}{1-z\bar{\alpha}} P_j, \qquad b(z) = \prod_{j=1}^{k} b_j(z),$$

таких, что матрица-функция $s_k(z) = b(z)s(z)$ голоморфна в точке α и

$$\operatorname{ran} P_j P_{j+1} = \operatorname{ran} P_j, \qquad j = 1, \ldots, k, \qquad \operatorname{ran} P_k s_k(\alpha) = \operatorname{ran} P_k. \tag{5}$$

Действительно, $s_{k-1}(z)$ можно представить в виде

$$s_{k-1}(z) = \frac{s_{k-1,1}}{z-\alpha} + \tilde{s}_k(z),$$

где $\tilde{s}_k(z)$ голоморфна в точке α. Тогда $s_k(z)$ принимает вид

$$s_k(z) = P_k \frac{s_{k-1,1}}{1-z\bar{\alpha}} + P_k \tilde{s}_k(z) \frac{z-\alpha}{1-z\bar{\alpha}} + (I - P_k)\tilde{s}_k(z).$$

Отсюда следует равенство

$$P_k s_k(\alpha) = \frac{P_k s_{k-1,1}}{1-|\alpha|^2},$$

доказывающее последнее соотношение в (5). Остается заметить, что условия (5) и (2) эквивалентны (см. [18], теорему 4.2.6, в которой эта эквивалентность доказана для функций класса S_κ). Анализ доказательства этой теоремы показывает, что условие $s_L \in S$ можно заменить условием $s_L \in H^\infty$.

Из леммы 7.8 [19] следует, что полюсная кратность функции s в точке α

$$\delta(s, \alpha) = \delta(s_k, \alpha) + \deg b(z) = \deg b(z),$$

где $\deg b(z) = \sum_{j=1}^{k} \operatorname{rank} P_j$ — степень произведения Бляшке – Потапова $b(z)$.

Эквивалентность i) $\Leftrightarrow$ ii) является следствием равенства (4). Утверждение iv) следует из утверждения iii), примененного к матрице-функции $s(\bar{z})^*$.

Предложение 2. *Пусть* $h \in H_\kappa^\infty([\mathfrak{L}])$, *а* θ *и* b — *внутренние функции такие, что*

$$\theta h \in H_\kappa^\infty([\mathfrak{L}]), \qquad \theta h b \in H_+^\infty([\mathfrak{L}]), \qquad \delta(h) = \delta(\theta h).$$

Тогда $hb \in H_+^\infty([\mathfrak{L}])$.

Доказательство. Пусть матрица-функция h имеет полюсы в точках $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{D}$ и h, θ, b в окрестности точки z_j, $j = 1, \ldots, m$, имеют следующие разложения:

$$h(z) = h_{-n}^{(j)}(z-z_j)^{-n} + \ldots + h_{-1}^{(j)}(z-z_j)^{-1} + \ldots,$$

$$\theta(z) = \theta_0^{(j)} + \theta_1^{(j)}(z-z_j) + \ldots + \theta_n^{(j)}(z-z_j)^n + \ldots,$$

$$b(z) = b_0^{(j)} + b_1^{(j)}(z-z_j) + \ldots + b_n^{(j)}(z-z_j)^n + \ldots,$$

где $h_i^{(j)}, b_i^{(j)}, \theta_i^{(j)} \in [\mathfrak{L}]$, $i = 1, \ldots, n$. Определим матрицы C_h, $\tilde{C}_b$; $\tilde{C}_\theta$ равенствами

$$C_h = \begin{pmatrix} h_{-n}^{(j)} & & 0 \\ \ddots & \ddots & \\ h_{-1}^{(j)} & \ddots & h_{-n}^{(j)} \end{pmatrix}, \qquad \tilde{C}_b = \begin{pmatrix} b_0^{(j)} & & 0 \\ \ddots & \ddots & \\ b_n^{(j)} & \ddots & b_0^{(j)} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{C}_\theta = \begin{pmatrix} \theta_0^{(j)} & & 0 \\ \ddots & \ddots & \\ \theta_n^{(j)} & \ddots & \theta_0^{(j)} \end{pmatrix}.$$

В силу (4) полюсная кратность $\delta(h, z_j)$ совпадает с рангом матрицы C_h. Аналогично,

$$\delta(\theta h, z_j) = \operatorname{rank} C_{\theta h} = \operatorname{rank} \tilde{C}_\theta C_h \le \operatorname{rank} C_h = \delta(h, z_j). \tag{6}$$

Поскольку $\delta(h) = \delta(\theta h)$, то $\delta(h, z_j) = \delta(\theta h, z_j)$. Из (6) следует

$$\ker \tilde{C}_\theta \cap \operatorname{ran} C_h = \{0\}. \tag{7}$$

Из условия $\theta h b \in H_+^\infty$, в свою очередь, следует $\tilde{C}_\theta C_h \tilde{C}_b = 0$, что в силу (7) влечет $C_h \tilde{C}_b = 0$. Таким образом, матрица-функция hb принадлежит H_+^∞.

2. Интерполяционная задача $\boldsymbol{SNP(\kappa, \eta, \theta)}$. Пусть $\kappa \in \mathbb{Z}_+$, $\eta, \theta \in H_+^\infty([\mathfrak{L}])$ — данные некоторой задачи вида (1). Ассоциируем с внутренней функцией θ гильбертово пространство $K_\theta = H_+^2 \ominus \theta H_+^2$. Ортогональный проектор P_{K_θ} из H_+^2 на K_θ имеет вид (см. [20, с. 290])

$$P_{K_\theta} = I - \theta P_+ \theta^*, \tag{8}$$

где P_+ — ортогональный проектор из $L_2 := L_2(\mathfrak{L})$ на $H_+^2 := H_+^2(\mathfrak{L})$. Определим оператор $N: H_+^2 \to K_\theta$ равенством

$$(Nh)(z) = P_{K_\theta} \eta(z) h(z), \qquad h \in H_+^2.$$

Тогда сопряженный оператор $N^*: K_\theta \to H_+^2$ имеет вид

$$(N^*f)(z) = P_+\eta(z)^*f(z), \qquad f \in K_\theta.$$

Сформулируем условие (1) в эквивалентной форме.

Лемма 1. *Пусть* $s \in S_\kappa$, $\eta \in H_+^2$ *и* θ *— внутренняя функция. Тогда следующие условия эквивалентны:*

i) s *— решение задачи* $SNP(\kappa, \eta, \theta)$;

ii) $\theta^*(s_R - \eta b_R) \in H_+^\infty([\mathfrak{L}])$;

iii) $b_R^*(s^* - N^*)K_\theta \subset H_-^2(\mathfrak{L})$.

Доказательство. 1. Пусть $s(\in S_\kappa)$ является решением задачи $SNP(\kappa, \eta, \theta)$. Тогда матрица-функция $h = \theta^*(s - \eta)$ удовлетворяет условиям предложения 2. Действительно,

$$\theta h = s - \eta \in H_\kappa^\infty([\mathfrak{L}]), \qquad \theta h b_R = s_R - \eta b_R \in H_+^\infty([\mathfrak{L}]),$$
$$\kappa = \delta(\theta h) \le \delta(h) \le \kappa$$

и, следовательно,

$$\delta(\theta h) = \delta(h) (= \kappa).$$

Из предложения 2 следует

$$h b_R = \theta^*(s_R - \eta b_R) \in H_+^\infty([\mathfrak{L}]).$$

2. Пусть выполняется условие ii). Тогда для всех $g \in K_\theta$, $f_+ \in H_+^2$ получаем

$$\left(b_R^*(s^* - N^*)g, f_+\right) = (g, (s-\eta)b_R f_+) = \left(g, \theta\theta^*(s_R - \eta b_R)f_+\right) = 0.$$

Таким образом,

$$b_R^*(s^* - N^*)K_\theta \subset H_-^2(\mathfrak{L}).$$

3. Пусть выполняется условие iii). Тогда

$$(s^* - N^*)K_\theta = b_R b_R^*(s^* - N^*)K_\theta \subset b_R H_-^2(\mathfrak{L})$$

и, следовательно,

$$\operatorname{rank} P_+(s^* - N^*)P_{K_\theta} \le \kappa.$$

Тогда для сопряженного оператора имеем

$$\operatorname{rank} P_{\tilde{K}_\theta}(s - \eta)P_+ \le \kappa, \tag{9}$$

где $\tilde{K}_\theta = K_\theta \oplus H_-^2$. Поскольку $P_{\tilde{K}_\theta} = \theta P_- \theta^*$ (ср. с (8)), для всех $g \in H_+^2$

$$\theta^* P_{\tilde{K}_\theta}(s - \eta)g = P_-\theta^*(s - \eta)g. \tag{10}$$

Из (9) следует, что ганкелев оператор (10) не более чем κ-мерен. В силу теоремы Кронекера $P_-\theta^*(s - \eta)$ — рациональная функция, суммарная полюсная кратность которой $\delta\left(\theta^*(s - \eta)\right)$ не превышает κ. Это доказывает утверждение iii).

3. Модельный оператор. Свяжем с задачей $SNP(\kappa, \eta, \theta)$ некоторое пространство Понтрягина и изометрический оператор в нем. В дефинитном случае эта конструкция предложена в [14]. Положим

$$\mathbf{P} = I - NN^* : K_\theta \to K_\theta. \tag{11}$$

Всюду в дальнейшем предполагается, что оператор $\mathbf{P}$ обратим, т. е. $0 \in \rho(\mathbf{P})$.

Введем в пространстве $\mathcal{K} = K_\theta \oplus \mathfrak{L}$ индефинитное скалярное произведение

$$\left\langle \begin{pmatrix} f \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ y \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{K}} := (\mathbf{P}f, g)_{L_2} + (x, y)_{\mathfrak{L}}, \qquad \begin{pmatrix} f \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{K}.$$

Пусть T_θ — обратный сдвиг в K_θ,

$$(T_\theta f)(z) = \frac{1}{z}(f(z) - f(0)), \qquad f \in K_\theta, \tag{12}$$

и операторы $M_1, M_2 : K_\theta \to \mathfrak{L}$ определены равенствами

$$M_1 f = (N^* f)(0), \qquad M_2 f = f(0), \qquad f \in K_\theta. \tag{13}$$

Легко видеть, что оператор N^* сплетает операторы T_θ и T_+ (обратный сдвиг в H_+^2):

$$N^* T_\theta = T_+ N^*. \tag{14}$$

Следующее тождество при $\kappa = 0$ получено в [14].

Предложение 3. *Для всех $f, g \in K_\theta$ справедливо тождество*

$$(\mathbf{P}T_\theta f, T_\theta g)_{L_2} - (\mathbf{P}f, g)_{L_2} = (M_1 f, M_1 g)_{\mathfrak{L}} - (M_2 f, M_2 g)_{\mathfrak{L}}. \tag{15}$$

Доказательство. С учетом (14) левая часть равенства (15) принимает вид

$$(\mathbf{P}T_\theta f, T_\theta g)_{L_2} - (\mathbf{P}f, g)_{L_2} =$$

$$= (T_\theta f, T_\theta g)_{L_2} - (N^* T_\theta f, N^* T_\theta g)_{L_2} - (f, g)_{L_2} - (N^* f, N^* g)_{L_2} =$$

$$= \left\{ (N^* f, N^* g)_{L_2} - (T_+ N^* f, T_+ N^* g)_{L_2} \right\} - \left\{ (f, g)_{L_2} - (T_\theta f, T_\theta g)_{L_2} \right\}.$$

Используя тождество

$$(f, g)_{L_2} - (T_\theta f, T_\theta g)_{L_2} = (f(0), g(0))_{\mathfrak{L}},$$

получаем (15).

Из равенства (4) следует, что оператор

$$V : \begin{pmatrix} f \\ M_1 f \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} T_\theta f \\ M_2 f \end{pmatrix}, \qquad f \in K_\theta, \tag{16}$$

является изометрическим оператором в $\mathcal{K}$.

4. Связь с задачей $AIP_0(\kappa)$. Справедливость тождества (4) позволяет поставить в соответствие интерполяционной задаче $SNP(\kappa, \eta, \theta)$ абстрактную интерполяционную задачу $AIP(\kappa)$, данные которой определяются равенствами (11) – (13).

Напомним (см. [14, 15]), что задача $AIP(\kappa)$ заключается в следующем: даны целое $\kappa \in \mathbb{Z}_+$, пространства $\mathfrak{H} = K_\theta$, $\mathfrak{L} = \mathbb{C}^n$ и операторы $T = T_\theta$, $\mathbf{P} \in [\mathfrak{H}]$, $M_1, M_2 \in [\mathfrak{H}, \mathfrak{L}]$ такие, что

$$(\mathbf{P}Tf, Tg)_{\mathfrak{H}} - (\mathbf{P}f, g)_{\mathfrak{H}} = (M_1 f, M_1 g)_{\mathfrak{L}} - (M_2 f, M_2 g)_{\mathfrak{L}}.$$

Найти матрицу-функцию $s \in \mathbf{S}_\kappa$ и отображение $\Phi : \mathfrak{H} \to \mathfrak{D}(s)$ такие, что

$$\langle \Phi h, \Phi h \rangle_{\mathfrak{D}(s)} \le (\mathbf{P}h, h)_{\mathfrak{H}} \qquad \forall h \in \mathfrak{H}, \tag{17}$$

$$\Phi h = t \cdot \Phi T h - \begin{pmatrix} I & s \\ s^* & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -M_2 h \\ M_1 h \end{pmatrix} \qquad \forall h \in \mathfrak{H}. \tag{18}$$

Здесь $\mathfrak{D}(s)$ — индефинитное пространство де Бранжа – Ровняка [18] (см. также [15]).

В следующей теореме установлено взаимно однозначное соответствие между множествами решений задач $SNP(\kappa, \eta, \theta)$ и $AIP_0(\kappa)$ (в случае $\kappa = 0$ см. [13, 14]).

Теорема 1. *Пусть* $sq_-(\mathbf{P}) = \kappa$ *и* $0 \in \rho(\mathbf{P})$. *Тогда*:

1) *если* s *является решением задачи* $SNP(\tilde{\kappa}, \eta, \theta)$, $\tilde{\kappa} \ge \kappa$, *то отображение*

$$\Phi : f(\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} I & s \\ s^* & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ -N^* f \end{pmatrix}, \qquad f \in K_\theta, \tag{19}$$

принимает значения в $\mathfrak{D}(s)$ *и пара* $\{s, \Phi\}$ *является решением задачи* $AIP(\tilde{\kappa})$; *при этом для отображения* Φ *выполняется обобщенное равенство Парсеваля*

$$\langle \Phi h, \Phi h \rangle_{\mathfrak{D}(s)} = (\mathbf{P}h, h)_{\mathfrak{H}} \qquad \forall h \in \mathfrak{H};$$

2) *обратно, если* $\{s, \Phi\}$ *является решением задачи* $AIP(\tilde{\kappa})$, *то* s — *решение задачи* $SNP(\tilde{\kappa}, \eta, \theta)$.

Доказательство. 1. Пусть s — решение задачи $SNP(\tilde{\kappa}, \eta, \theta)$. Тогда для всех $f \in K_\theta$ в силу леммы 1 получаем

$$b_L(\Phi f)_+ = b_L(I - sN^*) f \in H_+^2, \qquad b_R^*(\Phi f)_- = b_R^*(s^* - N^*) f \in H_-^2.$$

Кроме того,

$$\Phi f \in \begin{pmatrix} I & s \\ s^* & I \end{pmatrix} (L_2 \oplus L_2).$$

В силу следствия 4.7 из [15] отображение (19) переводит K_θ в $\mathfrak{D}(s)$. Далее, вектор Φf допускает разложение (см. [15], следствие 4.8)

$$\Phi f = R_1 \begin{pmatrix} I & s_L \\ s_L^* & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_L f - x_+ \\ -N^* f \end{pmatrix} + \tilde{R}_2 \begin{pmatrix} I & b_L \\ b_L^* & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_+ \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $x_+(t) \in K_{b_L}$ — единственное решение уравнения (см. [15], лемма 4.3, следствие 4.5)

$$P_+ s_L(t)^* x_+(t) = P_+ \left(s(t)^* - N^* \right) f(t). \tag{20}$$

В силу теоремы 4.6 из [15] скалярное произведение $\langle \Phi f, \Phi f \rangle_{\mathfrak{D}(s)}$ находится по формуле

$$\langle \Phi f, \Phi f \rangle_{\mathfrak{D}(s)} = \left\langle \begin{pmatrix} b_L f - x_+ \\ -N^* f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_L(I - sN^*) f - x_+ \\ (s^* - N^*) f - s_L^* x_+ \end{pmatrix} \right\rangle_{L_2^2} - (x_+, x_+)_{L_2} =$$

$$= \left(b_L f - x_+, b_L(I - sN^*) f \right)_{L_2} - \left(N^* f, (s^* - N^*) f \right)_{L_2} +$$

$$+ \left(N^* f, s_L^* x_+ \right)_{L_2} - \left(f, b_L^* x_+ \right)_{L_2}.$$

Отсюда в силу выбора x_+ (см. (20)) следует

$$\langle \Phi f, \Phi f \rangle_{\mathfrak{D}(s)} = \left(b_L f - x_+, b_L(I - sN^*) f \right)_{L_2} =$$

$$= (f, f)_{L_2} - \left(N^* f, N^* f \right)_{L_2} = (\mathbf{P}Df, f)_{L_2}$$

и отображение Φ изометрично.

Докажем справедливость равенства (18). Из равенств (19) и

$$t\Phi T_\theta f = \begin{pmatrix} I & s \\ s^* & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} tT_\theta f \\ tT_+N^*f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & s \\ s^* & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f - M_2 f \\ -N^*f + M_1 f \end{pmatrix}, \qquad f \in K_\theta,$$

следует равенство

$$\Phi f - t\Phi T_\theta f = \begin{pmatrix} I & s \\ s^* & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_2 f \\ -M_1 f \end{pmatrix}, \tag{21}$$

доказывающее (18), а с ним и прямое утверждение теоремы.

Доказательство обратного утверждения. *Шаг* 1. Пусть $\{s, \Phi\}$ — решение задачи $AIP_0(\kappa)$ с данными, определяемыми равенствами (11) – (13). Тогда для всех $f \in K_\theta$ почти всюду на $\mathbb{T}$ выполняется равенство (21). Рассматривая аналитическое продолжение функций $(\Phi_+ f)(\zeta)$, $(\Phi_+ T_\theta f)(\zeta)$ в $\mathbb{D}$, переписываем первое из уравнений (21) в виде

$$(\Phi_+ f)(\zeta) - \zeta(\Phi_+ T_\theta f)(\zeta) = M_2 f - s(\zeta) M_1 f, \qquad \zeta \in \mathbb{D} \setminus \sigma(b_L).$$

Здесь $\sigma(b_L)$ — спектр внутренней функции b_L (см. [20, с. 287]). Подставляя сюда $f = (I - zT_\theta)^{-1} g$, получаем

$$\Phi_+(I - zT_\theta)^{-1} g - \zeta\Phi_+(I - zT_\theta)^{-1} T_\theta g = (M_2 - s(\zeta) M_1)(I - zT_\theta)^{-1} g,$$

$$\zeta(\Phi_+ g)(\zeta) + (z - \zeta)\Phi_+(I - zT_\theta)^{-1} g(\zeta) = z\big(M_2 - s(\zeta) M_1\big)(I - zT_\theta)^{-1} g(\zeta).$$

В частности, при $\zeta = z$ имеем

$$(\Phi_+ g)(z) = \big(M_2 - s(z) M_1\big)(I - zT_\theta)^{-1} g, \qquad g \in K_\theta. \tag{22}$$

В силу равенств

$$\begin{gathered} (I - zT_+)^{-1} N^* = N^*(I - zT_\theta)^{-1}, \\ (I - zT_+)^{-1} h = \frac{th(t) - zh(z)}{t - z}, \qquad h \in H_+^2, \end{gathered} \tag{23}$$

получаем

$$M_1(I - zT_\theta)^{-1} g = E_0 N^*(I - zT_\theta)^{-1} g = E_0(I - zT_+)^{-1} N^* g = (N^* g)(z), \tag{24}$$

где E_0 — „evaluation"-оператор в 0. Более того,

$$M_2(I - zT_\theta)^{-1} g = g(z). \tag{25}$$

Таким образом, из (22), (24) и (25) следует, что для всех $g \in K_\theta$ справедливо равенство

$$(\Phi_+ g)(z) = g(z) - s(z)(N^* g)(z). \tag{26}$$

Шаг 2. Покажем, что вторая компонента отображения Φ имеет вид

$$(\Phi_- g)(t) = s(t)^* g(t) - (N^* g)(t) \qquad (\text{п. в. } |t| = 1). \tag{27}$$

Действительно, из второго равенства в (21) имеем

$$\zeta(\Phi_- f)(\bar\zeta) - (\Phi_- T_\theta f)(\bar\zeta) = \zeta\big(s(\bar\zeta)^* M_2 f - M_1 f\big),$$

где $(\Phi_- f)(\bar\zeta)$ и $(\Phi_- T_\theta f)(\bar\zeta)$ — аналитические продолжения функций $(\Phi_- f)(\bar t)$

и $(\Phi_- T_\theta f)(\bar{t})$ в $\mathbb{D}$. Полагая $f = (T_\theta - z)^{-1} g$ при $g \in K_\theta$, $z \in \mathbb{D} \setminus \sigma(\theta)$, находим

$$(\zeta - z)(\Phi_- f)(\bar{\zeta}) - (\Phi_- g)(\bar{\zeta}) = \zeta\left(s(\bar{\zeta})^* M_2 - M_1\right)(T_\theta - z)^{-1} g(\zeta). \tag{28}$$

Учитывая, что функции g, $N^* g$ из K_θ допускают аналитическое продолжение через точки $t \in \mathbb{T} \setminus \sigma(\theta)$ (см. [20, с. 289]), а

$$M_2 (T_\theta - z)^{-1} g = -\frac{1}{z} g\left(\frac{1}{z}\right), \qquad M_1 (T_\theta - z)^{-1} g = -\frac{1}{z}(N^* g)\left(\frac{1}{z}\right), \tag{29}$$

из (28) при $\zeta = z$ имеем

$$(\Phi_- g)(\bar{z}) = s(\bar{z})^* g\left(\frac{1}{z}\right) - (N^* g)\left(\frac{1}{z}\right). \tag{30}$$

Переходя в (30) к пределу при радиальном пределе $z \to t \in \mathbb{T} \setminus \sigma(\theta)$, получаем равенство (27).

Шаг 3. В силу следствия 4.7 из [15] для любого $g \in K_\theta$ справедливо включение

$$b_R^* \mathcal{F}_- g = b_R^* \left(s(t)^* - N^*\right) g \in H_-^2.$$

Применяя лемму 1, убеждаемся, что s — решение задачи $SNP(\tilde{\kappa}, \eta, \theta)$.

Теорема доказана.

Из теоремы 1 и теоремы 3.1 из [15] следует такое описание решений задачи $SNP(\kappa, \eta, \theta)$. Напомним, что унитарный оператор $U : \tilde{\mathfrak{H}} \oplus \mathfrak{L} \to \tilde{\mathfrak{H}} \oplus \mathfrak{L}$ называют $\mathfrak{L}$-минимальным, если

$$\mathcal{K}_{\mathfrak{L}} := \overline{\operatorname{span}} \left\{ (I - \lambda U)^{-1} \mathfrak{L}, \left(I - \lambda U^*\right)^{-1} \mathfrak{L} : \lambda \in \mathbb{D} \right\} = \tilde{\mathfrak{H}} \oplus \mathfrak{L},$$

и $\mathfrak{L}$-регулярным, если пространство $(\tilde{\mathfrak{H}} \oplus \mathfrak{L}) \ominus \mathcal{K}_{\mathfrak{L}}$ гильбертово.

***Следствие* 1.** *В условиях теоремы* 1 *формула*

$$s(z) = P_{\mathfrak{L}} \left(I - z U P_{\tilde{\mathfrak{H}}}\right)^{-1} U P_{\mathfrak{L}} \tag{31}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством всех решений задачи $SNP(\tilde{\kappa}, \eta, \theta)$, $\tilde{\kappa} \geq \kappa$, *и множеством всех* $\mathfrak{L}$-*минимальных унитарных расширений* U *оператора* V, *для которых*

$$\operatorname{ind}_- \tilde{\mathfrak{H}} = \tilde{\kappa}. \tag{32}$$

Доказательство. Пусть U — $\mathfrak{L}$-минимальное расширение оператора V, удовлетворяющее условию (32). Тогда в силу теоремы 3.1 из [15] и теоремы 1 матрица-функция s, определяемая равенством (31), является решением задачи $SNP(\tilde{\kappa}, \eta, \theta)$. Обратно, если s — решение задачи $SNP(\tilde{\kappa}, \eta, \theta)$, то в силу теоремы 3.1 из [15] и теоремы 1 существует $\mathfrak{L}$-регулярное расширение U оператора V, удовлетворяющее условию (32). При этом для $\{s, \mathcal{F}\}$ выполнено равенство Парсеваля, поэтому часть U' оператора U, индуцируемая в $\mathcal{K}_U$, является унитарным расширением оператора V и, следовательно, его $\mathfrak{L}$-минимальным расширением. Взаимная однозначность следует из того факта, что любые $\mathfrak{L}$-минимальные расширения оператора V унитарно эквивалентны.

Следствие доказано.

Таким образом, при описании решений задачи $SNP(\kappa, \eta, \theta)$ достаточно ограничиться $\mathfrak{L}$-минимальными (а не $\mathfrak{L}$-регулярными) расширениями U оператора V. Поскольку применяемый ниже подход позволяет лишь описывать $\mathfrak{L}$-

резольвенты $\mathcal{K}$-минимальных унитарных расширений U оператора V, представляют интерес достаточные условия, при которых любое $\mathcal{K}$-минимальное расширение U является $\mathfrak{L}$-минимальным.

Предложение 4. *Пусть* θ *— произведение Бляшке – Потапова (возможно, бесконечной степени) и* U *— регулярное унитарное расширение оператора* V *такое, что* $\overline{\sigma(\theta)} \subset \rho(U)$. *Тогда расширение* U *—* $\mathcal{K}$*-минимально, если и только если* U *—* $\mathfrak{L}$*-минимально.*

Доказательство. Пусть $\sigma(\theta) = \{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ и U — $\mathcal{K}$-минимальное расширение оператора V. Поскольку K_θ порождено функциями вида (4.3) из [15], для доказательства $\mathfrak{L}$-минимальности расширения U достаточно показать, что

$$u_{jk} \in \overline{\operatorname{span}}\left\{(I-\lambda U)^{-1}\mathfrak{L}, \left(I-\bar{\lambda}U^*\right)^{-1}\mathfrak{L} : 1/\lambda \in \rho(U)\right\}.$$

Эти включения следуют из равенств

$$\left(V-\bar{z}_j\right)^k \begin{pmatrix} u_{jk} \\ M_1 u_{jk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g_{jk} \end{pmatrix}, \quad j \in \mathbb{N}, \quad k = 0, 1, \ldots, m_j - 1,$$

где g_{jk} — подходящим образом подобранные элементы из $\mathfrak{L}$.

***Замечание* 1.** 1. Доказательство соотношений (26), (27) следует схеме, приведенной в [13] (теорема 4) для случая $\kappa = 0$, однако использование факта продолжимости функций из K_θ через точки $t \in \mathbb{T} \setminus \sigma(\theta)$ позволяет упростить это доказательство для тождества (27).

2. При $\kappa = 0$ утверждение следствия 1 в несколько иной форме содержится в [14].

5. $\mathfrak{L}$-резольвенты симметрического оператора A. Для описания решений задачи $SNP(\kappa, \eta, \theta)$ перейдем от изометрического оператора V к его преобразованию Кэли

$$A = i(I+V)(I-V)^{-1}. \tag{33}$$

Пусть $\tilde{A} = \tilde{A}^*(\supset A)$ — самосопряженное расширение оператора A в пространстве $\tilde{\mathcal{K}} \supset \mathcal{K}$. Расширение $\tilde{A}$ называется $\mathfrak{L}$-минимальным, если

$$\left(\mathcal{K}_{\tilde{A}} :=\right) \overline{\operatorname{span}}\left\{\mathfrak{L} + (\tilde{A}-\lambda)^{-1}\mathfrak{L} : \lambda \in (\tilde{A})\right\} = \tilde{\mathcal{K}}.$$

Окаймленная резольвента $P_{\mathfrak{L}}(\tilde{A}-\lambda)^{-1}\big|_{\mathfrak{L}}$ $\mathcal{K}$-минимального самосопряженного расширения $\tilde{A} = \tilde{A}^*$ оператора A, для которого

$$\operatorname{ind}_{-}\tilde{\mathcal{K}} = \tilde{\kappa}, \tag{34}$$

называется $\mathfrak{L}$-резольвентой оператора A индекса $\tilde{\kappa}$. Следующее утверждение устанавливает связь между множеством решений задачи $SNP(\tilde{\kappa}, \eta, \theta)$ и множеством $\mathfrak{L}$-резольвент оператора A.

Теорема 2. *Пусть* $sq_-(\mathbf{P}) = \kappa$, $0 \in \rho(\mathbf{P})$ *и* A *определено равенством* (33). *Тогда формула*

$$s(z) = P_{\mathfrak{L}}\left(I + (\lambda-i)(\tilde{A}-\lambda)^{-1}\right)\left(P_{\mathfrak{L}}\left(I + (\lambda+i)(\tilde{A}-\lambda)^{-1}\right)\Big|_{\mathfrak{L}}\right)^{-1}, \tag{35}$$

$$\lambda(z) := -i\frac{1+z}{1-z},$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством всех *решений $s(z)$ задачи $SNP(\tilde{\kappa}, \eta, \theta)$ и множеством $\mathfrak{L}$-минимальных самосопряженных расширений $\tilde{A}$ оператора A в пространстве Понтрягина $\tilde{\mathcal{K}} \supset \mathcal{K}$ таких, что $i \in \rho(\tilde{A})$ и выполнено условие* (34).

Доказательство. Пусть $s(z)$ — решение задачи $SNP(\tilde{\kappa}, \eta, \theta)$. В силу теоремы 1 существует унитарное расширение U линейного оператора V такое, что справедливо представление (31). В силу предложения 2.1 из [15] это равенство можно переписать в виде

$$s(z) = \left(P_{\mathfrak{L}}(I-zU)^{-1}U\big|_{\mathfrak{L}}\right)\left(P_{\mathfrak{L}}(I-zU)^{-1}\big|_{\mathfrak{L}}\right)^{-1}. \tag{36}$$

Определяя самосопряженное расширение $\tilde{A}$ оператора A равенством

$$\tilde{A} = i(I+U)(I-U)^{-1},$$

из (36) имеем

$$P_{\mathfrak{L}}(I-zU)^{-1}U\big|_{\mathfrak{L}} = \frac{1}{1-z}P_{\mathfrak{L}}\left(I - \frac{2i}{1-z}(\tilde{A}-\lambda)^{-1}\right)\Big|_{\mathfrak{L}} \tag{37}$$

и

$$P_{\mathfrak{L}}(I-zU)^{-1}\big|_{\mathfrak{L}} = \frac{1}{1-z}P_{\mathfrak{L}}\left(I - \frac{2iz}{1-z}(\tilde{A}-\lambda)^{-1}\right)\Big|_{\mathfrak{L}}. \tag{38}$$

Отсюда, принимая во внимание тождества

$$\lambda - i = \frac{-2i}{1-z}, \qquad \lambda + i = \frac{-2iz}{1-z},$$

получаем (35).

Обратно, пусть $\tilde{A}$ — самосопряженное расширение оператора A такое, что $i \in \rho(\tilde{A})$. Тогда преобразование Кэли U расширения $\tilde{A}$ является унитарным расширением оператора V и в силу (37), (38) функция $s(z)$ в (35) допускает представление (36). В силу теоремы 1 $s(z)$ является решением задачи $SNP(\tilde{\kappa}, \eta, \theta)$.

Теорема доказана.

Напомним некоторые факты из теории $\mathfrak{L}$-резольвент и $\mathfrak{L}$-резольвентной матрицы (см. [16, 17, 21–23]). Говорят, что $\lambda \in \rho(A, \mathfrak{L})$, если λ — точка регулярного типа для A и справедливо равенство

$$\mathcal{K} = \operatorname{ran}(A-\lambda) \dotplus \mathfrak{L}. \tag{39}$$

Аналогично, говорят, что ∞ принадлежит $\rho(A, \mathfrak{L})$, если $\mathcal{K} = \operatorname{dom} A \dotplus \mathfrak{L}$. Пусть $\mathcal{P}(\lambda)$ и $\mathcal{P}(\infty)$ — косые проекторы на $\mathfrak{L}$ параллельно $\operatorname{ran}(A-\lambda)$ и $\operatorname{dom} A$ соответственно, а операторы $Q(\lambda)$, $Q(\infty): \mathfrak{H} \to \mathfrak{L}$ определены равенствами

$$Q(\lambda) = P_{\mathfrak{L}}(A-\lambda)^{-1}(I-\mathcal{P}(\lambda)), \qquad \lambda \in \rho(A, \mathfrak{L}),$$
$$Q(\infty) = P_{\mathfrak{L}}A(I-\mathcal{P}(\infty)), \qquad \infty \in \rho(A, \mathfrak{L}).$$

Матрица-функция $W(\lambda)$, голоморфная в

$$\rho_s(A, \mathfrak{L}) = \rho(A, \mathfrak{L}) \cap \overline{\rho(A, \mathfrak{L})},$$

называется $\mathfrak{L}$-резольвентной матрицей оператора A [17], если она удовлетворяет тождеству

$$W(\lambda)JW(\mu)^* = J + i(\lambda-\overline{\mu})G(\lambda)G(\mu)^+, \qquad \lambda,\mu\in\rho_s(A,\mathfrak{L}),$$

где

$$G(\lambda) = \begin{pmatrix} -\mathcal{Q}(\lambda) \\ \mathcal{P}(\lambda) \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -iI_{\mathfrak{L}} \\ iI_{\mathfrak{L}} & 0 \end{pmatrix}.$$

При $\infty\in\rho(A,\mathfrak{L})$ $\mathfrak{L}$-резольвентная матрица оператора A может быть определена формулой

$$W_\infty(\lambda) = \left(w_{ij}(\lambda)\right)_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} -\mathcal{Q}(\lambda)\mathcal{P}(\infty)^* & -I+\mathcal{Q}(\lambda)\mathcal{Q}(\infty)^* \\ \mathcal{P}(\lambda)\mathcal{P}(\infty)^* & \lambda-\mathcal{P}(\lambda)\mathcal{Q}(\infty)^* \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Множество $\mathfrak{L}$-резольвент индекса 0 оператора A параметризуется множеством (классов эквивалентности) неванлинновских пар $\{\phi,\psi\}$ равенством

$$P_{\mathfrak{L}}(\tilde{A}-\lambda)^{-1}\Big|_{\mathfrak{L}} = \left(w_{11}(\lambda)\psi(\lambda)+w_{12}(\lambda)\phi(\lambda)\right)\left(w_{21}(\lambda)\psi(\lambda)+w_{22}(\lambda)\phi(\lambda)\right)^{-1}. \tag{41}$$

Если расширение $\tilde{A}$ $\mathcal{K}$-минимально и $\lambda\in\rho(A,\mathfrak{L})$, то $\lambda\in\rho(\tilde{A})$, если и только если

$$\det\left(w_{21}(\lambda)\psi(\lambda)+w_{22}(\lambda)\phi(\lambda)\right)\neq 0. \tag{42}$$

Напомним (см. [6]), что пара $\{\phi,\psi\}$ $[\mathfrak{L}]$-значных функций, голоморфных в $\mathbb{C}_+$, называется неванлинновской, если ядро

$$\mathbf{N}_{\phi\psi}(\mu,\lambda) = \frac{\phi(\mu)^*\psi(\lambda)-\psi(\mu)^*\phi(\lambda)}{\lambda-\overline{\mu}}, \qquad \lambda,\mu\in\mathbb{C}_+,$$

неотрицательно в $\mathbb{C}_+$ и $\operatorname{rank}\left(\phi(\lambda)^*,\psi(\lambda)^*\right)=n$.

Замечание 2. В гильбертовом случае описание $\mathfrak{L}$-резольвент оператора A получено в [16, 17]. Формула для $\mathfrak{L}$-резольвентной матрицы, аналогичная (40), использующая технику „граничных операторов", имеется в [23, с. 203]; там вместо ∞ используется базовая точка $a=\overline{a}$. Приведенная выше формула (40) в случае пространства Понтрягина получена в [7, с. 157–158].

6. Матрица решений. Как следует из (16) и (33), оператор A принимает вид

$$A:\begin{pmatrix} (I-T_\theta)f \\ (M_1-M_2f) \end{pmatrix} \mapsto i\begin{pmatrix} (I+T_\theta)f \\ (M_1+M_2)f \end{pmatrix}, \qquad f\in K_\theta.$$

Найдем функции $\mathcal{P}(\lambda)$, $\mathcal{Q}(\lambda)$, соответствующие $\mathfrak{L}$-представлению (39) оператора A.

Предложение 5. *Пусть* $\mathfrak{L}=\mathbb{C}^n$, $1\in\rho(\theta)$ *и* E_0 — *„evaluation"-оператор в* 0. *Тогда* $\rho(A,\mathfrak{L})=\overline{\lambda(\sigma(\theta))}$ *и оператор-функции* $\mathcal{P}(\lambda)$, $\mathcal{Q}(\lambda)$, $\mathcal{P}(\infty)^*$ *и* $\mathcal{Q}(\infty)^*$ *имеют вид*

$$\mathcal{P}(\lambda)f = f_2 - E_0(N^*-\zeta)(I-\zeta T_\theta)^{-1}f_1, \qquad \lambda\in\mathbb{C}_-, \quad f_1\in K_\theta, \quad f_2\in\mathfrak{L}, \tag{43}$$

$$\mathcal{Q}(\lambda)f = \frac{1}{i-\lambda}E_0(N^*-I)(I-\zeta T_\theta)^{-1}f_1, \qquad \lambda\in\mathbb{C}_-, \quad f_1\in K_\theta, \quad f_2\in\mathfrak{L}, \tag{44}$$

$$\mathcal{P}(\infty)^*h = \begin{pmatrix} -\mathbf{P}^{-1}(I-T_\theta^*)^{-1}P_{K_\theta}(N-I)h \\ h \end{pmatrix}, \qquad h\in\mathfrak{L}, \tag{45}$$

$$Q(\infty)^*h = -i\begin{pmatrix} \mathbf{P}^{-1}(I-T_\theta^*)^{-1}P_{K_\theta}(N+I)h \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathfrak{L}. \tag{46}$$

Доказательство. Пусть

$$f = (f_1, f_2)^T \in K_\theta \oplus \mathfrak{L}.$$

Рассмотрим уравнение

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (i-\lambda)g + (i+\lambda)T_\theta g \\ E_0\big((i-\lambda)N^* + (i+\lambda)\big)g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}, \qquad g \in K_\theta, \qquad y \in \mathfrak{L}. \tag{47}$$

В силу теоремы Лившица оператор $I-\zeta T_\theta$ обратим, если и только если $1/\zeta \notin \sigma(\theta)$, что, в свою очередь, эквивалентно равенству $\lambda \notin \overline{\lambda(\sigma(\theta))}$. Для таких λ уравнение (47) имеет единственное решение

$$g = \frac{1}{i-\lambda}(I-\zeta T_\theta)^{-1}f_1 \in K_\theta,$$

$$y = f_2 - E_0(N^*-\zeta)(I-\zeta T_\theta)^{-1}f_1 \in \mathfrak{L}.$$

Это доказывает равенства (43) и $\rho(A,\mathfrak{L}) = \overline{\lambda(\sigma(\theta))}$. Оператор-функция $Q(\lambda)$ принимает вид

$$Q(\lambda)f = P_{\mathfrak{L}}\begin{pmatrix} (I-T_\theta)g \\ E_0(N^*-\zeta)g \end{pmatrix} = \frac{1}{i-\lambda}E_0(N^*-\zeta)(I-\zeta T_\theta)^{-1}f_1.$$

Аналогично устанавливаются формулы (45), (46) (подробнее см. [24]).

Предложение доказано.

Найдем вид $\mathfrak{L}$-резольвентной матрицы оператора A в (40).

Предложение 6. *Пусть* $sq_-(\mathbf{P}) = \kappa$, $0 \in \rho(\mathbf{P})$ *и* $1 \in \rho(\theta)$. *Тогда $\mathfrak{L}$-резольвенты оператора A индекса 0 параметризуются множеством неванлинновских пар $\{\phi,\psi\}$ с помощью формулы* (41), *где $\mathfrak{L}$-резольвентная матрица* $W_\infty(\lambda) = \big(w_{ij}(\lambda)\big)_{i,j=1}^2$ *оператора A имеет вид*

$$W_\infty(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{M_1-M_2}{i-\lambda} \\ M_1-\zeta M_2 \end{pmatrix} Z \begin{pmatrix} M_1^*-M_2^* \\ -i(M_1^*+M_2^*) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{48}$$

Здесь

$$Z = (I-\zeta T_\theta)^{-1}\mathbf{P}^{-1}(I-T_\theta^*)^{-1}, \qquad \zeta = \frac{\lambda+i}{\lambda-i}.$$

Доказательство. Используя (43) – (46) и формулу (40) для $\mathfrak{L}$-резольвентной матрицы, для всех $h \in \mathfrak{L}$, $\lambda \in \rho(A,\mathfrak{L})$ получаем следующие тождества:

$$\begin{aligned} w_{11}(\lambda)h &= -Q(\lambda)\mathcal{P}(\infty)^*h = \frac{1}{i-\lambda}P_0(N^*-I)Z(N-I)h, \\ w_{12}(\lambda)h &= -h + Q(\lambda)Q(\infty)^*h = -h - \frac{i}{i-\lambda}P_0(N^*-I)Z(N+I)h, \\ w_{21}(\lambda)h &= \mathcal{P}(\lambda)\mathcal{P}(\infty)^*h = h + P_0(N^*-\zeta)Z(N-I)h, \\ w_{22}(\lambda)h &= \lambda h - \mathcal{P}(\lambda)Q(\infty)^*h = \lambda h - iP_0(N^*-\zeta)Z(N+I)h, \end{aligned} \tag{49}$$

где

$$Z = (I-\zeta T_\theta)^{-1}D^{-1}(I-T_\theta^*)^{-1}P_{K_\theta}.$$

Из равенств (49) следует

$$W_\infty(\lambda) = \begin{pmatrix} -P_0\dfrac{N^*-I}{\lambda-i}Z(N-I) & -I + iP_0\dfrac{N^*-I}{\lambda-i}Z(N+I) \\ i + P_0(N^*-\zeta)Z(N-I) & \lambda - iP_0(N^*-\zeta)Z(N+I)\end{pmatrix}. \tag{50}$$

Ясно, что формулу (50) можно записать в виде (48).

Сравнивая предложение 6 и теорему 2, получаем следующий результат (для простоты формулировок ограничимся случаем $\tilde\kappa = \kappa$).

Теорема 3. *Пусть* $sq_-(\mathbf{P}) = \kappa$, $0 \in \rho(\mathbf{P})$, $1 \in \rho(\theta)$ *и матрица-функция* $\Omega(\zeta)$ *определена равенством*

$$\Omega(\zeta) = I + (1-\zeta)\begin{pmatrix} M_2 \\ M_1\end{pmatrix}(I-\zeta T_\theta)^{-1}\mathbf{P}^{-1}(I-T_\theta^*)^{-1}\begin{pmatrix} -M_2^* \\ M_1^*\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{51}$$

Тогда формула

$$s(z) = [\omega_{11}(\zeta)\tau(\zeta) + \omega_{12}(\zeta)][\omega_{21}(\zeta)\tau(\zeta) + \omega_{22}(\zeta)]^{-1} \tag{52}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством всех решений задачи $SNP(\kappa, \eta, \theta)$ *и множеством всех функций Шура* $\tau \in S_0([\mathfrak{L}])$, *для которых* $s \in S_\kappa([\mathfrak{L}])$ *и*

$$\det[\omega_{21}(0)\tau(0) + \omega_{22}(0)] \ne 0. \tag{53}$$

Доказательство. Пусть $s(z)$ — решение задачи $SNP(\kappa, \eta, \theta)$. В силу теоремы 2 существует $\mathfrak{L}$-минимальное самосопряженное расширение $\tilde A$ оператора A такое, что $\pm i \in \rho(\tilde A)$, $\operatorname{ind}_-\tilde{\mathcal{K}} = \kappa$ и выполняется равенство (35). Отсюда следует условие $\Delta(i) \ne 0$, где

$$\Delta(\lambda) = \det[w_{21}(\lambda)\psi(\lambda) + w_{22}(\lambda)\phi(\lambda)].$$

Пусть $\tau \in S_0$ определена равенством

$$\tau(\zeta) = (\psi(\lambda)+i\phi(\lambda))(\psi(\lambda)-i\phi(\lambda))^{-1}, \qquad \lambda = \lambda(\zeta). \tag{54}$$

Из равенства (51) следует, что оператор-функция

$$I + (\lambda+i)P_{\mathfrak{L}}(\tilde A-\lambda)^{-1}\big|_{\mathfrak{L}} = [\omega_{21}(\zeta)\tau(\zeta) + \omega_{22}(\zeta)]\Delta(\lambda)^{-1} \tag{55}$$

обратима в точке $\lambda = \lambda(\zeta) \in \rho(\tilde A)$, если и только если

$$\det[\omega_{21}(\zeta)\tau(\zeta) + \omega_{22}(\zeta)] \ne 0. \tag{56}$$

Далее, из равенства

$$I + (\lambda-i)P_{\mathfrak{L}}(\tilde A-\lambda)^{-1}\big|_{\mathfrak{L}} = [\omega_{11}(\zeta)\tau(\zeta) + \omega_{12}(\zeta)]\Delta(\lambda)^{-1} \tag{57}$$

следует формула (52), справедливая для всех ζ, удовлетворяющих условиям $\Delta(\lambda(\zeta)) \ne 0$ и (56). Тождество (55) показывает, что параметр $\tau(\zeta)$ удовлетворяет (53), так как

$$\omega_{21}(0)\tau(0) + \omega_{22}(0) = w_{21}(-i)\psi(-i) + w_{22}(-i)\phi(-i).$$

Обратно, допустим, что $\tau(\in S_0)$ удовлетворяет условию (53) и $s \in S_\kappa$. Тогда пара $\{\phi, \psi\}$, определенная равенством (54), соответствует самосопряженному расширению $\tilde{A}$ оператора A с $\pm i \in \rho(\tilde{A})$ в равенстве (41). В силу теоремы 2 функция $s(\zeta)$, определенная равенством (35), является решением задачи $SNP(\kappa, \eta, \theta)$. Остается заметить, что формула (52) следует из (35), (41) и (55), (57).

Теорема доказана.

Простые примеры показывают, что условие $s \in S_\kappa$ может не выполняться для тех $\tau \in S_0$, для которых $\bar{z}_j$ является собственным значением соответствующего расширения U.

Пример. Найти функции $s \in S_1$, голоморфные в точке $1/2$ и удовлетворяющие условию

$$s(1/2) = 2. \tag{58}$$

Задача эквивалентна задаче $SNP(1, \eta, \theta)$, где $\eta \equiv 2$, $\theta = \dfrac{1-2z}{2-z}$. Пространство K_θ здесь одномерно, $K_\theta = \operatorname{span}\dfrac{1}{2-z}$ и для $e_0 = \dfrac{1}{2-z}$ получаем

$$T_\theta e_0 = \frac{1}{2}e_0, \quad M_1 e_0 = 1, \quad M_2 e_0 = \frac{1}{2}, \quad \langle e_0, e_0\rangle_{K_\theta} = \frac{1}{3},$$

$$\langle M_1^*, e_0\rangle_{K_\theta} = 1 = 3\langle e_0, e_0\rangle_{K_\theta}, \quad \langle M_2^*, e_0\rangle_{K_\theta} = \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\langle e_0, e_0\rangle_{K_\theta},$$

$$\mathbf{P} = 1 - NN^* = -3.$$

Матрица решений (51) принимает вид

$$\Omega(z) = I + (1-z)\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}\left(I - \frac{z}{2}\right)^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right)2\begin{pmatrix} -3/2 \\ 3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} =$$

$$= I + \frac{1-z}{2-z}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, множество решений задачи описывается формулой

$$s(z) = \frac{(3-2z)\tau(z) - (2-2z)}{(2-2z)\tau(z) - (2-3z)}, \tag{59}$$

в которой $\tau \in S_0$, $\tau(0) \neq 1$ и при этом $s \in S_1$. Последнее условие эквивалентно условию $\tau(1/2) \neq 1/2$ (см. следствие 2). Если же $\tau(1/2) = 1/2$, то соответствующая функция s попадает в класс S_0 и не удовлетворяет интерполяционному условию (58). Например, при $\tau(z) \equiv 1/2$ имеем $s(z) \equiv 1/2$.

Отсюда, в частности, следует ошибочность следствия E из [10]. Там множество решений задачи (58) параметризуется формулой типа (59), в которой $\tau \in S_0$ и параметры τ, для которых $\tau(1/2) = 1/2$, не исключаются из рассмотрения.

В случае, когда θ — произведение Бляшке – Потапова, можно указать достаточные условия на τ, обеспечивающие попадание s в класс S_κ.

Следствие 2. *Пусть в условиях теоремы* 1 θ — *произведение Бляшке – Потапова, нули которого* z_j, $j \in J \subset \mathbb{N}$, *удовлетворяют условию* $\bar{z}_j \in \rho(V)$. *Тогда задача* $SNP(\kappa, \eta, \theta)$ *разрешима и функция* $s(z)$, *определяемая равенством* (41), *является решением задачи* $SNP(\kappa, \eta, \theta)$ *для всех* $\tau \in S_0([\Omega])$, *для которых*

$$\det[\omega_{21}(z_j)\tau(z_j) + \omega_{22}(z_j)] \neq 0 \quad \forall j \in J \cup \{0\}, \quad z_0 = 0. \tag{60}$$

Доказательство. Действительно, из условий $\bar{z}_j \in \rho(V)$ и (60) следует, что $\bar{z}_j \in \rho(U)$ для соответствующего $\mathcal{K}$-минимального расширения U оператора V (см. (42)). В силу предложения 4 расширение U оказывается $\mathfrak{L}$-минимальным и в силу следствия 1 функция s, определяемая формулой (31), попадает в класс S_κ.

1. *Krein M. G., Langer H.* Über die verallgemeinerten Resolventen und die characteristische Function eines isometrischen Operators im Raume Π_κ // Hilbert space Operators and Operator Algebras (Collog. Math. Soc. Janos Bolyai). – Amsterdam: North-Holland, 1972. – Vol. 5. – P. 353 – 399.
2. *Адамян В. М., Аров Д. З., Крейн М. Г.* Аналитические свойства пар Шмидта ганкелева оператора и обобщенная задача Шура – Такаги // Мат. сб. – 1971. – **86**, № 1 – С. 43 – 75.
3. *Федчина И. П.* Критерий разрешимости касательной проблемы Неванлинны – Пика // Мат. исслед. – 1972. – **26**. – С. 213 – 226.
4. *Нудельман А. А.* Об одном обобщении классических интерполяционных задач // Докл. АН СССР. – 1981. – **256**. – С. 790 – 793.
5. *Ball J. A., Gohberg L., Rodman L.* Interpolation of rational matrix functions // Oper. Theory: Adv. Appl. – 1988. – **45**. – P. 1 – 72.
6. *Alpay D., Bruinsma P., Dijksma A., de Snoo H. S. V.* Interpolation problems, extensions of symmetric operators and reproducing kernel Pontryagin spaces. I // Ibid. – 1991. – **50**. – P. 35 – 82.
7. *Amirshadyan A., Derkach V.* Interpolation in generalized Nevanlinna and Stieltjes classes // J. Operator Theory. – 1999. – **42**. – P. 145 – 188.
8. *Sarason D.* Generalized interpolation in H^∞ // Trans. Amer. Math. Soc. – 1967. – **127**. – P. 179 – 203.
9. *Ball J. A., Helton J. W.* A Beurling – Lax theorem for the Lie group $U(m, n)$ which contains most classical interpolation theory // J. Operator Theory. – 1983. – **9**. – P. 107 – 142.
10. *Ball J. A., Helton J. W.* Interpolation problems of Pick – Nevanlinna and Loewner types for meromorphic matrix functions // Integr. Equat. Oper. Theory. – 1986. – **9**. – P. 155 – 203.
11. *Gheondea A.* On generalized interpolation and shift invariant maximal semidefinite subspaces // Oper. Theory: Adv. Appl. – 1998. – **103**. – P. 121 – 136.
12. *Аров Д. З.* Обобщенная бикасательная проблема Каратеодори – Неванлинны – Пика и (j, J_0)-внутренние матрицы-функции // Изв. РАН. Сер. мат. – 1993. – **57**, № 1.
13. *Хейфец А. Я.* Обобщенная бикасательная задача Шура – Неванлинны – Пика и связанное с нею равенство Парсеваля // Теория функций, функцион. анализ и их прил. (Харьков). – 1990. – **54**. – С. 89 – 96.
14. *Кацнельсон В. Э., Хейфец А. Я., Юдицкий П. М.* Абстрактная интерполяционная задача и теория расширений изометрических операторов // Операторы в функцион. пространствах и вопросы теории функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – С. 83 – 96.
15. *Derkach V. A.* On indefinite abstract interpolation problem // Methods Funct. Analysis and Topology. – 2001. – **7**, № 4 – P. 87 – 100.
16. *Крейн М. Г.* О резольвентах эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m) // Докл. АН СССР. – 1946. – **52**, № 8. – С. 657 – 660.
17. *Крейн М. Г., Саакян Ш. Н.* Некоторые новые результаты в теории резольвент эрмитовых операторов // Там же. – 1966. – **169**, № 2. – С. 657 – 660.
18. *Alpay D., Dijksma A., Rovnyak J., de Snoo H. S. V.* Schur functions, operator colligations, and reproducing kernel Pontryagin spaces // Oper. Theory: Adv. Appl. – 1997. – **96**. – 229 p.
19. *Dijksma A., Langer H., de Snoo H. S. V.* Characteristic functions of unitary colligations in Π_κ-spaces // Ibid. – 1986. – **19**. – P. 125 – 194.
20. *Секефальви-Надь Б., Фойаш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Мир, 1970. – 431 с.
21. *Крейн М. Г.* Фундаментальные аспекты теории представлений эрмитовых операторов с индексами дефекта (n, n) // Укр. мат. журн. – 1949. – **1**, № 2. – С. 3 – 66.
22. *Derkach V. A.* On generalized resolvents of Hermitian relations in Krein spaces // J. Math. Sci. – 1999. – **97**, № 5. – P. 4420 – 4460.
23. *Derkach V. A., Malamud M. M.* The extension theory of Hermitian operators and the moment problem // Ibid. – 1995. – **73**. – P. 141 – 242.
24. *Derkach V.* On indefinite generalized interpolation. – Helsinki, 2000. – 22 p. – (Preprint / Univ. Helsinki, 262).

Получено 12.12.2001