УДК 517.9

М. Є. Дудкін (Нац. тех. ун-т України „КПІ", Київ),
В. Д. Кошманенко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ТОЧКОВИЙ СПЕКТР САМОСПРЯЖЕНИХ ОПЕРАТОРІВ, ЩО ВИНИКАЄ ПРИ СИНГУЛЯРНИХ ЗБУРЕННЯХ СКІНЧЕННОГО РАНГУ*

We discuss purely singular finite rank perturbations of a self-adjoint operator A in a Hilbert space $\mathcal{H}$. The perturbed operators $\tilde{A}$ are defined by the Krein resolvent formula $(\tilde{A}-z)^{-1} = (A-z)^{-1} + B_z$, $\operatorname{Im} z \neq 0$, where B_z are finite rank operators such that $\operatorname{dom} B_z \cap \operatorname{dom} A = \{0\}$. For an arbitrary system of orthonormal vectors $\{\psi_i\}_{i=1}^{n<\infty}$ with the condition $\operatorname{span}\{\psi_i\} \cap \operatorname{dom} A = \{0\}$ and an arbitrary set of real numbers $\lambda_i \in \mathbb{R}^1$, we construct the operator $\tilde{A}$ that solves the eigenvalue problem $\tilde{A}\psi_i = \lambda_i \psi_i$, $i = 1, \ldots, n$. We prove the uniqueness of $\tilde{A}$ under the condition $\operatorname{rank} B_z = n$.

Розглядаються чисто сингулярні збурення скінченного рангу самоспряженого оператора A в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Збурені оператори $\tilde{A}$ визначаються формулою Крейна для резольвент $(\tilde{A}-z)^{-1} = (A-z)^{-1} + B_z$, $\operatorname{Im} z \neq 0$, де B_z — оператори скінченного рангу такі, що $\operatorname{dom} B_z \cap \operatorname{dom} A = \{0\}$. Для довільної системи ортонормованих векторів $\{\psi_i\}_{i=1}^{n<\infty}$ з умовою $\operatorname{span}\{\psi_i\} \cap \operatorname{dom} A = \{0\}$ та довільного набору дійсних чисел $\lambda_i \in \mathbb{R}^1$ побудовано оператор $\tilde{A}$, який розв'язує задачу на власні значення: $\tilde{A}\psi_i = \lambda_i \psi_i$, $i = 1, \ldots, n$. Доведено єдиність $\tilde{A}$ при умові, що $\operatorname{rank} B_z = n$.

1. Вступ. Нехай в комплексному сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ і нормою $\|\cdot\|$ задано необмежений самоспряжений оператор $A = A^*$ з областю визначення $\mathfrak{D}(A) \equiv \operatorname{dom} A$. Інший самоспряжений оператор $\tilde{A}$ в $\mathcal{H}$ називається [1–8] (порівн. з [9, 10]) чисто сингулярно збуреним відносно A; позначаємо $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s(A)$, якщо область

$$\mathfrak{D} := \left\{ f \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(\tilde{A}) : Af = \tilde{A}f \right\} \tag{1}$$

є щільною в $\mathcal{H}$. Зрозуміло, що для кожного $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s(A)$ існує щільно визначений симетричний оператор

$$\dot{A} := A \restriction \mathfrak{D} = \tilde{A} \restriction \mathfrak{D}, \qquad \mathfrak{D}(\dot{A}) = \mathfrak{D} \tag{2}$$

з нетривіальними індексами дефекту

$$\mathrm{n}^{\pm}(\dot{A}) = \dim \operatorname{Ker} (\dot{A} \pm i)^* \neq 0.$$

У цій роботі розглядається підклас операторів $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s^n(A)$, де

$$n = \mathrm{n}^+(\dot{A}) = \mathrm{n}^-(\dot{A}) < \infty.$$

Досліджується проблема існування і побудови оператора $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s^n(A)$, який розв'язує задачу на власні значення

$$\tilde{A}\psi_i = \lambda_i \psi_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

* Підтримано проектом INTAS № 00-257 та проектами DFG 436 UKR 113 / 53 і 113 / 67.

для довільних наперед заданих дійсних чисел λ_i та системи ортонормованих векторів $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ таких, що $\operatorname{span}\{\psi_i\} \cap \operatorname{dom} A = \{0\}$.

Дослідження спектра, зокрема точкового, у самоспряжених розширень симетричних операторів зі скінченними індексами дефекту в загальному вигляді вперше проводилось у роботі М. Г. Крейна [11], де доведено існування принаймні одного розширення з наперед заданими власними значеннями з поля регулярності симетричного оператора (див. також [12 – 16]). У цьому напрямку відмітимо ще роботи [17, 18], де, зокрема, в термінах просторів граничних значень та функції Вейля доводилось існування будь-якої компоненти спектра в лакунах симетричного оператора.

Ми пропонуємо розглядати задачу на власні значення для самоспряжених розширень симетричного оператора з точки зору теорії сингулярно збурених операторів. Суть нашого результату в тому, що точки λ_i в (3) є довільними, зокрема можуть належати спектру оператора A. Зазначимо, що в [19] аналогічний результат доведено у випадку, коли оператор A додатний, точки $\lambda_i \le 0$ і $\tilde{A}$ не є обов'язково чисто сингулярно збуреним оператором.

Основним результатом роботи є така теорема.

Теорема 1. *Для необмеженого самоспряженого оператора A в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ існує єдиний чисто сингулярно збурений оператор $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s^n(A)$, який розв'язує задачу на власні значення* (3) *з довільними наперед заданими числами $\lambda_i \in \mathbb{R}^1$, $i = 1, \ldots, n < \infty$, та будь-якою множиною ортонормованих векторів $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ з умовою*

$$\operatorname{span}\{\psi_i\}_{i=1}^n \cap \mathfrak{D}(A) = \{0\}. \tag{4}$$

Зазначимо, що доведення цієї теореми конструктивне. Резольвента оператора A будується послідовно, з використанням на кожному кроці чисто сингулярного збурення рангу 1.

2. Сингулярні збурення рангу один. Нехай $\dot{A} \subset \dot{A}^*$ — замкнений симетричний оператор з областю визначення $\mathfrak{D}(\dot{A})$, щільною в $\mathcal{H}$. Припустимо, що його індекси дефекту $\mathrm{n}^{\pm}(\dot{A}) = 1$. Тоді

$$\mathcal{H} = \mathfrak{M}_z \oplus \mathfrak{N}_z, \qquad \operatorname{Im} z \neq 0,$$

де

$$\mathfrak{M}_z = (\dot{A} - z)\mathfrak{D}(\dot{A})$$

— область значень оператора $\dot{A} - z$, а

$$\mathfrak{N}_z := \mathfrak{M}_z^{\perp} = \operatorname{Ker}(\dot{A}^* - \bar{z})$$

— дефектний підпростір, $\dim \mathfrak{N}_z = 1$.

Нехай $\mathcal{A}(\dot{A})$ — множина усіх самоспряжених розширень оператора $\dot{A}$. Зафіксуємо деяке самоспряжене розширення $A \in \mathcal{A}(\dot{A})$. Зрозуміло, що кожний оператор $\tilde{A} \neq A$ з множини $\mathcal{A}(\dot{A})$ належить і множині $\mathcal{P}_s^1(A)$. При цьому область $\mathfrak{D}$ в (1) збігається з $\mathfrak{D}(\dot{A})$. Відомо [11, 14], що $\mathfrak{N}_z \cap \mathfrak{D}(A) = \{0\}$.

Теорема 2 [11, 12]. *Резольвента кожного самоспряженого оператора $\tilde{A} \in \mathcal{A}(\dot{A})$, $\tilde{A} \neq A$, задається формулою Крейна,*

$$(\tilde{A} - z)^{-1} = (A - z)^{-1} + b_z^{-1}(\cdot, \eta_{\bar{z}})\eta_z, \tag{5}$$

де вектор-функція η_z *із значеннями в* $\mathfrak{N}_z$ *задовольняє рівняння*

$$\eta_z = (A-\xi)(A-z)^{-1}\eta_\xi, \quad \operatorname{Im} z, \operatorname{Im}\xi \neq 0, \tag{6}$$

а значення скалярної функції b_z *пов'язані співвідношеннями*

$$b_z = b_\xi + (\xi - z)(\eta_\xi, \eta_{\bar{z}}), \quad \operatorname{Im} z, \operatorname{Im}\xi \neq 0, \tag{7}$$

$$\bar{b}_z = b_{\bar{z}}. \tag{8}$$

Використовуючи теорему 2, одержуємо опис усіх операторів $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s^1(A)$ (порівн. з [2, 5]).

Теорема 3. *Самоспряжений в* $\mathcal{H}$ *оператор* $\tilde{A} \neq A$ *належить до множини* $\mathcal{P}_s^1(A)$ *тоді і лише тоді, коли для будь-якого* $z_0 \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$ *(а отже, і для всіх таких* z*) існують підпростір*

$$\mathfrak{N}_{z_0} \subset \mathcal{H}, \quad \dim \mathfrak{N}_{z_0} = 1, \ \mathfrak{N}_{z_0} \cap \mathfrak{D}(A) = \{0\}, \tag{9}$$

та число

$$b_{z_0} \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Im} b_{z_0} = -\operatorname{Im} z_0, \tag{10}$$

такі, що

$$(\tilde{A} - z_0)^{-1} = (A - z_0)^{-1} + b_{z_0}^{-1}(\cdot, \eta_{\bar{z}_0})\eta_{z_0}, \tag{11}$$

де $\eta_{z_0} \in \mathfrak{N}_{z_0}$, $\|\eta_{z_0}\| = 1$, *а*

$$\eta_{\bar{z}_0} = (A - z_0)(A - \bar{z}_0)^{-1}\eta_{z_0}.$$

Для довільної точки $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} z \neq 0$, *резольвента оператора* $\tilde{A}$ *задається формулою* (5), *де функції*

$$\eta_z = (A - z_0)(A - z)^{-1}\eta_{z_0}, \tag{12}$$

$$b_z = b_{z_0} + (z_0 - z)(\eta_{z_0}, \eta_{\bar{z}}) \tag{13}$$

задовольняють співвідношення (6) – (8).

Доведення. *Необхідність.* Якщо $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s^1(A)$, то $\tilde{A} \in \mathcal{A}(\dot{A})$ з $\dot{A} := A \restriction \mathfrak{D}$, де $\mathfrak{D}$ визначено згідно з (1). Умови (9) – (11), а також співвідношення (12), (13) виконуються завдяки (5) – (8). Зокрема, (10) випливає з (7), (8). Справді, на підставі (7)

$$b_{\bar{z}_0} = b_{z_0} + (z_0 - \bar{z}_0)(\eta_{z_0}, \eta_{z_0}).$$

Тому завдяки (8)

$$\bar{b}_{z_0} - b_{z_0} = -2i \operatorname{Im} b_{z_0} = 2i \operatorname{Im} z_0,$$

тобто $\operatorname{Im} b_{z_0} = -\operatorname{Im} z_0$, де без втрати загальності вектор η_{z_0} нормовано на 1.

Достатність. Покажемо, що права частина (11) визначає самоспряжений оператор $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s^1(A)$. З цією метою розглянемо оператор-функцію

$$\tilde{R}(z) = (A - z)^{-1} + b_z^{-1}(\cdot, \eta_{\bar{z}})\eta_z \tag{14}$$

з η_z і b_z, заданими згідно з (12), (13), і покажемо, що вона є резольвентою самоспряженого оператора $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s^1(A)$, тобто $(\tilde{A} - z)^{-1} = \tilde{R}(z)$.

Насамперед переконаємось, що $\tilde{R}(z)$ є псевдорезольвентою [20, с. 533], тобто задовольняє тотожність Гільберта

$$\tilde{R}(z) - \tilde{R}(\xi) = (z-\xi)\tilde{R}(z)\tilde{R}(\xi), \qquad \operatorname{Im} z, \operatorname{Im}\xi \neq 0. \tag{15}$$

Виходячи з (14), переписуємо (15) у вигляді

$$R(z) + b_z^{-1}(\cdot, \eta_{\bar{z}})\eta_z - R(\xi) - b_\xi^{-1}(\cdot, \eta_{\bar{\xi}})\eta_\xi =$$
$$= (z-\xi)\Big[R(z) + b_z^{-1}(\cdot, \eta_{\bar{z}})\eta_z\Big]\cdot\Big[R(\xi) + b_\xi^{-1}(\cdot, \eta_{\bar{\xi}})\eta_\xi\Big], \tag{16}$$

де $R(z) = (A - z)^{-1}$. Використовуючи тотожність Гільберта для самоспряженого оператора A, одержуємо

$$b_z^{-1}(\cdot, \eta_{\bar{z}})\eta_z - b_\xi^{-1}(\cdot, \eta_{\bar{\xi}})\eta_\xi = (z-\xi)b_\xi^{-1}(\cdot, \eta_{\bar{\xi}})R(z)\eta_\xi +$$
$$+ (z-\xi)b_z^{-1}(\cdot, R(\xi)\eta_{\bar{z}})\eta_z + (z-\xi)b_z^{-1}b_\xi^{-1}(\cdot, \eta_{\bar{\xi}})(\eta_\xi, \eta_{\bar{z}})\eta_z. \tag{17}$$

На підставі (12) маємо

$$\eta_z - \eta_\xi = (z-\xi)(A-z)^{-1}\eta_\xi, \qquad \operatorname{Im} z, \operatorname{Im}\xi \neq 0.$$

Тому (17) спрощується і набирає вигляду

$$0 = b_\xi^{-1}(\cdot, \eta_{\bar{\xi}})\eta_z - b_z^{-1}(\cdot, \eta_{\bar{\xi}})\eta_z +$$
$$+ (z-\xi)b_z^{-1}b_\xi^{-1}(\cdot, \eta_{\bar{\xi}})(\eta_\xi, \eta_{\bar{z}})\eta_z. \tag{18}$$

З іншого боку, права частина (18) дорівнює нулю внаслідок (13). Отже, (15) виконується.

Псевдорезольвента $\tilde{R}(z)$ є резольвентою деякого щільно визначеного замкненого оператора (див. [20, с. 533], а також [21], теорема 7.7.1) тоді і лише тоді, коли $\operatorname{Ker}\tilde{R}(z_0) = \{0\}$ хоча б для однієї точки $z_0 \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$. Для всіх $0 \neq f \perp \eta_{\bar{z}_0}$ внаслідок (11)

$$\tilde{R}(z_0)f = (A - z_0)^{-1}f \neq 0.$$

Для вектора $\eta_{\bar{z}_0}$ маємо також

$$\tilde{R}(z_0)\eta_{\bar{z}_0} = (A-z_0)^{-1}\eta_{\bar{z}_0} + b_{z_0}^{-1}\|\eta_{\bar{z}_0}\|^2\eta_{z_0} \neq 0,$$

оскільки $(A - z_0)^{-1}\eta_{\bar{z}_0} \in \mathfrak{D}(A)$, а $\eta_{z_0} \notin \mathfrak{D}(A)$ внаслідок (9). Отже, $\tilde{R}(z) = (\tilde{A} - z)^{-1}$ є резольвентою замкненого оператора $\tilde{A}$ в $\mathcal{H}$. Насправді $\tilde{A}$ — самоспряжений оператор. Щоб у цьому переконатись, потрібно показати (див. [21], теорема 7.7.3, а також [20, с. 533]), що

$$\left(\tilde{R}(z)\right)^* = \tilde{R}(\bar{z}). \tag{19}$$

Рівність (19) справедлива, оскільки з (10) випливає (8), а це у свою чергу приводить до того, що

$$\left(\tilde{R}(z)\right)^* = (A-z)^{-1} + b_{\bar{z}}^{-1}(\cdot, \eta_z)\eta_{\bar{z}} = \tilde{R}(\bar{z}).$$

Отже, $\tilde{R}(z)$ є резольвентою самоспряженого оператора $\tilde{A}$, для якого справедлива формула (11). Залишилось довести, що область $\mathfrak{D}$, визначена згідно з (1), є щільною в $\mathcal{H}$. Позначимо

$$\mathfrak{M}_{z_0} := (\tilde{A} - z_0)\mathfrak{D} = (A - z_0)\mathfrak{D}. \tag{20}$$

З (11) випливає $\mathfrak{M}_{z_0}^{\perp} = \mathfrak{N}_{z_0}$. Нехай $\varphi \perp \mathfrak{D}$. Тоді внаслідок (20) для всіх $f \in \mathfrak{D}$, $f = (A - z_0)^{-1} h$, $h \in \mathfrak{M}_{z_0}$ маємо

$$0 = (\varphi, f) = \left(\varphi, (A - z_0)^{-1} h\right) = \left((A - \bar{z}_0)^{-1}\varphi, h\right).$$

Це означає, що $(A - \bar{z}_0)^{-1}\varphi \in \mathfrak{N}_{z_0}$, але на підставі (9) це можливо лише для $\varphi = 0$. Таким чином, доведено, що $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s^1(A)$.

Теорему доведено.

Теорема 1 у випадку $n = 1$ формулюється таким чином (порівн. з теоремою 2 в [19]).

Теорема 4. *Для довільного самоспряженого необмеженого оператора* A *у просторі Гільберта* $\mathcal{H}$ *існує єдино визначений чисто сингулярно збурений оператор* $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s^1(A)$, *який розв'язує задачу*

$$\tilde{A}\psi = \lambda\psi \tag{21}$$

для будь-якого наперед заданого вектора $\psi \in \mathcal{H} \setminus \mathfrak{D}(A)$ *та довільного числа* $\lambda \in \mathbb{R}^1$.

Доведення. Зафіксуємо $z_0 \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$, і покладемо

$$\eta_{z_0} := (A - \lambda)(A - z_0)^{-1}\psi, \tag{22}$$

$$b_{z_0} := (\lambda - z_0)(\psi, \eta_{\bar{z}_0}). \tag{23}$$

Для довільних $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} z \neq 0$, функції η_z, b_z визначаємо формулами (12), (13). Виходячи з функціонального числення для оператора A одержуємо

$$\eta_z = (A - \lambda)(A - z)^{-1}\psi = \psi + (z - \lambda)(A - z)^{-1}\psi, \tag{24}$$

$$b_z := (\lambda - z)(\psi, \eta_{\bar{z}}). \tag{25}$$

Розглянемо оператор-функцію $\tilde{R}(z)$ вигляду (14). Переконаємося, використовуючи теорему 3, що вона є резольвентою деякого самоспряженого оператора. Для цього достатньо показати, що функції η_z, b_z задовольняють співвідношення (6) – (8). Справедливість (6) перевіряється тривіально, виходячи з (22), (24). Рівність (7) встановлюється також безпосередньо на основі тотожності Гільберта для резольвенти оператора A. З (24), (25) випливає

$$\bar{b}_z = (\lambda - \bar{z})(\eta_{\bar{z}}, \psi) = (\lambda - \bar{z})\left((A - \lambda)(A - \bar{z})^{-1}\psi, \psi\right) = b_{\bar{z}},$$

тобто (8) також виконується. Отже, $\tilde{R}(z) = (\tilde{A} - z)^{-1}$, де $\tilde{A}$ — самоспряжений оператор в $\mathcal{H}$. Належність $\tilde{A}$ до $\mathcal{P}_s^1$ встановлюється таким чином. Покладемо $\mathfrak{N}_{z_0} := \{c\eta_{z_0}\}_{c \in \mathbb{C}}$. Умова $\mathfrak{N}_{z_0} \cap \mathfrak{D}(A) = \{0\}$ випливає із зображення (24),

$$\eta_z = \psi + (z - \lambda)(A - z)^{-1}\psi \notin \mathcal{D}(A),$$

оскільки $\psi \notin \mathcal{D}(A)$. Рівність (10) є наслідком (13) та самоспряженості $\tilde{A}$, якщо вектор ψ нормувати таким чином, щоб $\|\eta_{z_0}\| = 1$. За теоремою 3 оператор $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s^1(A)$. Його резольвента має вигляд

$$(\tilde{A}-z)^{-1} = (A-z)^{-1} + \frac{1}{(\lambda-z)(\psi, \eta_{\bar{z}})}(\cdot, \eta_{\bar{z}})\eta_z, \tag{26}$$

де η_z визначається за вектором ψ згідно з (24).

З (26) на підставі (24) маємо

$$(\tilde{A}-z)^{-1}\psi = (A-z)^{-1}\psi + \frac{1}{\lambda-z}\eta_z =$$

$$= (A-z)^{-1}\psi + \frac{1}{\lambda-z}\left(\psi + (z-\lambda)(A-z)^{-1}\psi\right) = \frac{1}{\lambda-z}\psi.$$

Отже, $\tilde{A}$ розв'язує задачу (21).

Оператор $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s^1$, який розв'язує задачу (21), єдиний, оскільки зображення (11) разом з умовою

$$(\tilde{A}-z_0)^{-1}\psi = \frac{1}{\lambda-z_0}\psi$$

однозначно фіксує число b_{z_0} та вектор η_{z_0} (з точністю до фазового множника $e^{-\theta}$, $0 \le \theta < 2\pi$).

3. Доведення теореми 1. Використаємо метод математичної індукції, виходячи з теореми 4. Введемо аналогічно (14) оператор-функцію $R_1(z)$, змінивши позначення:

$$R_1(z) = (A-z)^{-1} + b_1^{-1}(z)\left(\cdot, \eta_1(\bar{z})\right)\eta_1(z), \quad \operatorname{Im} z \neq 0, \tag{27}$$

де $R_1(z) \equiv \tilde{R}(z)$ (див. (26)) є резольвентою оператора $A_1 = \tilde{A}$ і (див. (24), (25))

$$\eta_1(z) \equiv \eta_z = (A-\lambda_1)(A-z)^{-1}\psi_1, \tag{28}$$

$$b_1(z) \equiv b_z = (\lambda_1 - z)\left(\psi_1, \eta_1(\bar{z})\right) \tag{29}$$

з $\psi = \psi_1$ та $\lambda = \lambda_1$. Згідно з доведенням теореми 4 оператор-функція

$$\tilde{R}(z) := R_2(z) = R_1(z) + b_2^{-1}(z)\left(\cdot, \eta_2(\bar{z})\right)\eta_2(z)$$

з $\eta_2(z), b_2(z)$, визначеними формулами (28), (29) з λ_2, ψ_2 і A_1 замість λ_1, ψ_1 і A, є резольвентою єдиного оператора $A_2 \in \mathcal{P}_s^1(A_1)$, який розв'язує задачу $A_2\psi_2 = \lambda_2\psi_2$, тільки якщо $\psi_2 \notin \mathfrak{D}(A_1)$. Останній факт випливає з умови (4). Справді, з (27) одержуємо опис області визначення оператора A_1:

$$\mathfrak{D}(A_1) = \{h \in \mathcal{H}: h = f + c(z)\eta_1(z),\ f \in \mathfrak{D}(A)\},$$

де

$$c(z) = b_1^{-1}(z)((A-\lambda_1)f, \psi_1).$$

Якщо тепер припустити, що

$$\psi_2 = f + c(z)\eta_1(z),$$

то на підставі рівності

$$\eta_1(z) = \psi_1 + (z-\lambda_1)(A-z)^{-1}\psi_1$$

це означає, що

$$\psi_2 - c(z)\psi_1 = f + (z-\lambda_1)c(z)(A-z)^{-1}\psi_1 \in \mathfrak{D}(A),$$

а це суперечить умові (4). Отже, $\psi_2 \notin \mathfrak{D}(A_1)$ і $A_2 \in \mathcal{P}_s^1(A_1)$. Переконаємось, що A_2 розв'язує задачу $A_2\psi_1 = \lambda_1\psi_1$. Справді, з (27) на підставі рівності $A_1\psi_1 = \lambda_1\psi_1$ маємо

$$(A_2 - z)^{-1}\psi_1 = \frac{1}{z-\lambda_1}\psi_1,$$

оскільки завдяки $\psi_1 \perp \psi_2$

$$\left(\psi_1, \eta_2(\bar{z})\right) = \left((A_1-\lambda_2)\psi_1, (A_1-z)^{-1}\psi_2\right) = 0.$$

Неважко переконатись, що аналогічні міркування справедливі на будь-якому k-му кроці, $1 < k \le n$. За методом математичної індукції оператор-функція

$$\tilde{R}(z) \equiv R_n(z) = (A_{n-1}-z)^{-1} + b_n^{-1}(z)\left(\cdot, \eta_n(\bar{z})\right)\eta_n(z)$$

з $\eta_n(z)$ та $b_n(z)$, визначеними згідно з (28), (29) по ψ_n, λ_n та оператору A_{n-1}, є резольвентою самоспряженого оператора $A_n \in \mathcal{P}_s^1(A_{n-1})$, який розв'язує задачу (3).

Залишилось довести, що $A_n \in \mathcal{P}_s^n(A)$ і є єдиним таким оператором.

За побудовою

$$(A_n - z)^{-1} = (A-z)^{-1} + B_n(z), \tag{30}$$

де $\operatorname{rank} B_n(z) = n$. Справді,

$$B_n(z) = \sum_{k=1}^{n} b_k^{-1}(z)\left(\cdot, \eta_k(\bar{z})\right)\eta_k(z), \tag{31}$$

де $b_k(z)$, $\eta_k(z)$ визначені згідно з (28), (29) (або (24), (25)) по ψ_k, λ_k та оператору A_{k-1}. Легко перевірити, що на підставі (4) всі вектори $\eta_k(z)$ лінійно незалежні і не належать $\mathfrak{D}(A)$. Тому за теоремою А1 з [1] область

$$\mathfrak{D} = (A-z)^{-1}\operatorname{Ker} B_n(z) = (A_n - z)^{-1}\operatorname{Ker} B_n(z)$$

є щільною в $\mathcal{H}$ і симетричний оператор

$$\dot{A} = A \restriction \mathfrak{D} = \dot{A}_n \restriction \mathfrak{D}$$

має індекси дефекту

$$\mathrm{n}^+(\dot{A}) = \mathrm{n}^-(\dot{A}) = n.$$

Отже, $A_n \in \mathcal{P}_s^n(A)$. Єдиність A_n є наслідком (30), (31), оскільки оператор $B_n(z)$ на множині n лінійно незалежних векторів ψ_i (зауважимо, що $\operatorname{span}\{\psi_i\} \cap \operatorname{Ker} B_n(z) = \{0\}$) має фіксовані значення,

$$B_n(z)\psi_i = \frac{1}{\lambda_i - z}\psi_i - (A-z)^{-1}\psi_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

а на підпросторі $\operatorname{Ker} B_n(z)$ резольвента $R_n(z)$ збігається з $R(z)$.

1. *Albeverio S., Karwowski W., Koshmanenko V.* Square power of singularly perturbed operators // Math. Nachr. – 1995. – **173**. – P. 5 – 24.
2. *Albeverio S., Koshmanenko V.* Singular rank one perturbations of self-adjoint operators and Krein theory of self-adjoint extensions // Potential Anal. – 1999. – **11**. – P. 279 – 287.
3. *Albeverio S., Kurasov P.* Singular perturbations of differential operators and solvable Schrödinger type operators. – Cambridge: Univ. Press, 2000. – 265 p.
4. *Karwowski W., Koshmanenko V., Ota S.* Schrödinger operator perturbed by operators related to null-sets // Positivity. – 1998. – **77**, № 2. – P. 18 – 34.
5. *Nizhnik L.* The singular rank-one perturbations of self-adjoint operators // Meth. Funct. Anal. and Topology. – 2001. – **7**, № 3. – P. 54 – 66.
6. *Koshmanenko V. D.* Towards the rank-one singular perturbations of self-adjoint operators // Ukr. Math. J. – 1991. – **43**, № 11. – P. 1559 – 1566.
7. *Кошманенко В. Д.* Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 176 с.
8. *Koshmanenko V.* Singular quadratic forms in perturbation theory. – Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1999. – 308 p.
9. *Albeverio S., Kurasov P.* Rank one perturbations, approximations and self-adjoint extensions // J. Funct. Anal. – 1997. – **148**. – P. 152 – 169.
10. *Gesztesy F., Simon B.* Rank-one perturbations at infinite coupling // Ibid. – 1995. – **128**. – P. 245 – 252.
11. *Крейн М. Г.* Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения. I // Мат. сб. – 1947. – **20(62)**, № 3. – С. 431 – 495.
12. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966. – 544 с.
13. *Albeverio S., Karwowski W., Koshmanenko V.* On negative eigenvalues of generalized Laplace operator // Repts Math. Phys. – 2000. – **45**, № 2. – P. 307 – 325.
14. *Alonso A., Simon B.* The Birman – Krein – Vishik theory of self-adjoint extensions of semibounded operators // J. Operator Theory. – 1980. – **4**. – P. 251 – 270.
15. *Кошманенко В., Самойленко О.* Сингулярні збурення скінченного рангу. Точковий спектр // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 11. – P. 1186 – 1212.
16. *Posilicano A. A.* Krein-like formula for singular perturbations of self-adjoint operators and applications // J. Funct. Anal. – 2001. – **183**. – P. 109 – 147.
17. *Derkach V. A., Malamud M. M.* General resolvents and the boundary value problem for Hermitian operators with gaps // Ibid. – 1991. – **95**. – P. 1 – 95.
18. *Brasche J. F., Malamud M., Neidhardt H.* Weyl function and spectral properties of self-adjoint extensions // Intehral Equat. and Operator Theory. – 2002. – **43**. – P. 264 – 289.
19. *Koshmanenko V.* A variant of the inverse negative eigenvalues problem in singular perturbation theory // Meth. Funct. Anal. and Topology. – 2002. – **8**, № 1. – P. 49 – 69.
20. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
21. *Плеснер А. И.* Спектральная теория линейных операторов. – М.: Наука, 1965. – 624 с.

Одержано 11.04.2002