УДК 512.544

О. Ю. Дашкова (Днепропетр. нац. ун-т им. О. Гончара)

О МОДУЛЯХ НАД ГРУППОВЫМИ КОЛЬЦАМИ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП

We study an $\mathbf{R}G$-module A, where $\mathbf{R}$ is a ring, $A/C_A(G)$ is not a minimax $\mathbf{R}$-module, $C_G(A) = 1$, and G is a nilpotent group. Let $\mathfrak{L}_{nm}(G)$ be the system of all subgroups $H \leq G$ such that the quotient modules $A/C_A(H)$ are not minimax $\mathbf{R}$-modules. We investigate a $\mathbf{R}G$-module A such that $\mathfrak{L}_{nm}(G)$ satisfies either the weak minimal condition or the weak maximal condition as an ordered set. It is proved that a nilpotent group G that satisfies these conditions is a minimax group.

Вивчається $\mathbf{R}G$-модуль A такий, що $\mathbf{R}$ — кільце, $A/C_A(G)$ не є мінімаксним $\mathbf{R}$-модулем, $C_G(A) = 1$, G — нільпотентна група. Розглядається система $\mathfrak{L}_{nm}(G)$ усіх підгруп $H \leq G$, для яких фактор-модулі $A/C_A(H)$ не є мінімаксними $\mathbf{R}$-модулями. Досліджується $\mathbf{R}G$-модуль A такий, що $\mathfrak{L}_{nm}(G)$ задовольняє або слабку умову мінімальності, або слабку умову максимальності як упорядкована множина. Доведено, що нільпотентна група G, яка задовольняє ці умови, мінімаксна.

1. Введение. Пусть A — векторное пространство над полем F. Подгруппы группы $GL(F, A)$ всех автоморфизмов пространства A называются линейными группами. Если A имеет конечную размерность над полем F, $GL(F, A)$ можно рассматривать как группу невырожденных $(n \times n)$-матриц, где $n = \dim_F A$. Конечномерные линейные группы играют важную роль в различных областях науки и изучались достаточно много. В случае, когда пространство A имеет бесконечную размерность над полем F, ситуация кардинально меняется. Бесконечномерные линейные группы исследовались мало. Изучение этого класса групп требует дополнительных ограничений. К таким ограничениям относятся различные условия конечности. Одним из условий конечности, которое достойно особого внимания, является финитарность линейной группы. Группа G называется финитарной, если для каждого ее элемента g подпространство $C_A(g)$ имеет конечную коразмерность в A (см., например [1, 2]). Финитарные линейные группы изучались многими алгебраистами, и в этом направлении был получен ряд интересных результатов [2]. В [3] было введено другое условие конечности, налагаемое на бесконечномерные линейные группы. Авторы ввели понятие центральной размерности бесконечномерной линейной группы. Пусть H — подгруппа группы $GL(F, A)$. H действует на фактор-пространстве $A/C_A(H)$ естественным образом. Авторы определяют $\mathrm{centdim}_F H$ как $\dim_F(A/C_A(H))$. Говорят, что подгруппа H имеет конечную центральную размерность, если $\mathrm{centdim}_F H$ конечна, и H имеет бесконечную центральную размерность, если $\mathrm{centdim}_F H$ бесконечна.

Пусть $G \leq GL(F, A)$. В [3] была рассмотрена система $\mathfrak{L}_{id}(G)$ всех подгрупп группы G, имеющих бесконечную центральную размерность. Чтобы исследовать бесконечномерные линейные группы, которые по своей структуре близки к конечномерным, следует рассмотреть случай, когда система $\mathfrak{L}_{id}(G)$ „достаточно мала”. Так, в [3] изучались локально разрешимые бесконечномерные линейные группы, у которых $\mathfrak{L}_{id}(G)$ удовлетворяет условию минимальности как упорядоченное множество. Разрешимые бесконечномерные линейные группы, у которых $\mathfrak{L}_{id}(G)$ удовлетворяет условию максимальности как упорядоченное множество, исследовались в [4].

Слабое условие минимальности и слабое условие максимальности являются наиболее естественными теоретико-групповыми обобщениями обычных условий минимальности и максимальности. Слабое условие минимальности было введено в рассмотрение Д. И. Зайцевым [5], а слабое условие максимальности — Р. Бэром [6]. Пусть G — группа, $\mathcal{M}$ — некоторое семейство подгрупп группы G. Говорят, что группа G удовлетворяет слабому условию минимальности для $\mathcal{M}$-подгрупп, если $\mathcal{M}$ удовлетворяет слабому условию минимальности, т. е. если для любого убывающего ряда подгрупп из множества $\mathcal{M}$

$$G_0 \geq G_1 \geq \ldots \geq G_n \geq G_{n+1} \geq \ldots$$

существует натуральное число $m \in \mathbb{N}$ такое, что индекс $|G_n \colon G_{n+1}|$ конечен для каждого $n \geq m$. Группа G удовлетворяет слабому условию максимальности для $\mathcal{M}$-подгрупп, если $\mathcal{M}$ удовлетворяет слабому условию максимальности, т. е. если для любого возрастающего ряда подгрупп из множества $\mathcal{M}$

$$G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_n \leq G_{n+1} \leq \ldots$$

существует натуральное число $m \in \mathbb{N}$ такое, что индекс $|G_n \colon G_{n+1}|$ конечен для каждого $n \geq m$. В [7] изучались бесконечномерные периодические локально радикальные группы G, у которых $\mathfrak{L}_{id}(G)$ удовлетворяет либо слабому условию минимальности, либо слабому условию максимальности, а в [8] исследовались локально нильпотентные группы G, у которых $\mathfrak{L}_{id}(G)$ удовлетворяет либо слабому условию минимальности, либо слабому условию максимальности.

Если $G \leq GL(F, A)$, то A можно рассматривать как FG-модуль. Естественным обощением этого случая является рассмотрение $\mathbf{R}G$-модуля A, где $\mathbf{R}$ — кольцо. При этом обобщением понятия центральной размерности подгруппы линейной группы является понятие коцентрализатора подгруппы, введенное в [9]. Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, где $\mathbf{R}$ — кольцо, G — группа. Если $H \leq G$, то фактор-модуль $A/C_A(H)$, рассматриваемый как $\mathbf{R}$-модуль, называется коцентрализатором подгруппы H в модуле A. Следует отметить, что в теории модулей существует ряд обобщений конечномерного векторного пространства. Это модули, имеющие конечные композиционные ряды, конечнопорожденные, нетеровы и артиновы модули.

Исследование алгебраических систем, удовлетворяющих условиям минимальности и максимальности, остается достаточно актуальным. Примерами таких систем являются классы нетеровых и артиновых модулей. Напомним, что модуль называется артиновым, если упорядоченное множество его подмодулей удовлетворяет условию минимальности. Модуль называется нетеровым, если упорядоченное множество его подмодулей удовлетворяет условию максимальности. Естественным обобщением классов артиновых и нетеровых модулей является класс минимаксных модулей (см. гл. 7 [10]). $\mathbf{R}$-модуль A называется минимаксным, если он имеет конечный ряд подмодулей, каждый фактор которого является либо нетеровым $\mathbf{R}$-модулем, либо артиновым $\mathbf{R}$-модулем.

Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, где $\mathbf{R}$ — произвольное кольцо, $\mathfrak{L}_{nm}(G)$ — система всех подгрупп группы G, коцентрализаторы которых в модуле A не являются минимаксными $\mathbf{R}$-модулями, упорядоченная относительно обычного включения подгрупп. Если $\mathfrak{L}_{nm}(G)$ удовлетворяет слабому условию минимальности как упорядоченное множество, будем говорить, что группа G удовлетворяет условию $W_{\min -nm}$. Если же $\mathfrak{L}_{nm}(G)$ удовлетворяет слабому условию максимальности как упорядоченное множество, будем говорить, что группа G удовлетворяет условию $W_{\max -nm}$.

Целью настоящей работы является изучение нильпотентных групп, удовлетворяющих либо условию $W_{\min -nm}$, либо условию $W_{\max -nm}$. Основным результатом работы является теорема 3.1, обобщающая один из основных результатов [8] — теорему 2.6.

2. Предварительные результаты. В настоящем пункте получены некоторые элементарные свойства модулей рассматриваемого вида.

Далее в пп. 2, 3 рассматривается $\mathbf{R}G$-модуль A такой, что $C_G(A) = 1$, и всюду, кроме лемм 3.4, 3.5, коцентрализатор группы G в модуле A не является минимаксным $\mathbf{R}$-модулем.

Лемма 2.1. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль. Имеют место следующие утверждения*:

(i) *Если $L \leq H \leq G$ и коцентрализатор подгруппы H в модуле A является минимаксным $\mathbf{R}$-модулем, то и коцентрализатор подгруппы L в модуле A — минимаксный $\mathbf{R}$-модуль.*

(ii) *Если $L, H \leq G$ и коцентрализаторы подгрупп L и H в модуле A являются минимаксными $\mathbf{R}$-модулями, то коцентрализатор подгруппы $\langle L, H\rangle$ в модуле A — минимаксный $\mathbf{R}$-модуль.*

***Следствие* 2.1.** *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль. Множество $MD(G)$ всех элементов $x \in G$ таких, что коцентрализатор группы $\langle x\rangle$ в модуле A — минимаксный $\mathbf{R}$-модуль, является нормальной подгруппой группы G.*

Доказательство. По лемме 2.1 (ii) $MD(G)$ является подгруппой группы G. Поскольку $C_A(x^g) = C_A(x)g$ для всех $x, g \in G$, отсюда следует, что $MD(G)$ нормальна в группе G.

Следствие доказано.

Лемма 2.2. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, H — подгруппа группы G. Предположим, что H содержит нормальную подгруппу K, коцентрализатор которой в модуле A не является минимаксным $\mathbf{R}$-модулем. Тогда*:

(1) *если G удовлетворяет условию $W_{\min -nm}$, то фактор-группа H/K удовлетворяет слабому условию минимальности для подгрупп;*

(2) *если G удовлетворяет условию $W_{\max -nm}$, то фактор-группа H/K удовлетворяет слабому условию максимальности для подгрупп.*

Лемма 2.3. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, L, K и H — подгруппы группы G такие, что*:

(i) *K — нормальная подгруппа группы L*;

(ii) *K и L — H-инвариантные подгруппы*;

(iii) $L/K \cap HK/K = \langle 1\rangle$;

(iv) *$L/K = Dr_{n\in \mathbf{N}}\, L_n/K$, где $L_n/K \neq \langle 1\rangle$ — H-инвариантная подгруппа для любого $n \in \mathbf{N}$.*

Тогда имеют место следующие утверждения:

(1) *если G удовлетворяет условию $W_{\max -nm}$, то коцентрализатор подгруппы HL в модуле A является минимаксным $\mathbf{R}$-модулем*;

(2) *если G удовлетворяет условию $W_{\min -nm}$, то коцентрализатор подгруппы HK в модуле A является минимаксным $\mathbf{R}$-модулем.*

Доказательство. Существуют два бесконечных подмножества Σ и Δ множества $\mathbb{N}$ такие, что $\Sigma \cup \Delta = \mathbb{N}$, $\Sigma \cap \Delta = \varnothing$. Поскольку множество Δ бесконечно, существуют бесконечный строго возрастающий ряд подмножеств множества Δ

$$\Delta(1) \subset \Delta(2) \subset \ldots \subset \Delta(k) \subset \ldots,$$

а также бесконечный строго убывающий ряд подмножеств множества Δ

$$\Delta^*(1) \supset \Delta^*(2) \supset \ldots \supset \Delta^*(k) \supset \ldots$$

такие, что множества $\Delta(k+1) \setminus \Delta(k)$ и $\Delta^*(k) \setminus \Delta^*(k+1)$ бесконечны для каждого $n \in \mathbb{N}$. Пусть

$$D_k/K = Dr_{t \in \Sigma \cup \Delta(k)} L_t/K$$

и

$$D_k^*/K = Dr_{t \in \Sigma \cup \Delta^*(k)} L_t/K.$$

Сначала рассмотрим строго возрастающий ряд подгрупп

$$HD_1 < HD_2 < \ldots < HD_k < \ldots.$$

По построению индексы $|HD_{k+1} \colon HD_k|$ бесконечны. Если группа G удовлетворяет условию $W_{\max -nm}$, то централизатор подгруппы HD_m в модуле A является минимаксным $\mathbf{R}$-модулем для каждого $m \in \mathbb{N}$. Поскольку $\langle H, L_t | t \in \Sigma \rangle \leq HD_m$, из леммы 2.1 следует, что коцентрализатор подгруппы $\langle H, L_t | t \in \Sigma \rangle$ в модуле A также является минимаксным $\mathbf{R}$-модулем. Аналогично устанавливаем, что коцентрализатор подгруппы $\langle H, L_t | t \in \Delta \rangle$ в модуле A является минимаксным $\mathbf{R}$-модулем.

Учитывая равенство $\Sigma \cup \Delta = \mathbb{N}$, получаем

$$\langle \langle H, L_t | t \in \Delta \rangle, \langle H, L_t | t \in \Sigma \rangle \rangle = \langle H, L_t | t \in \Sigma \cup \Delta \rangle = HL.$$

По лемме 2.1 коцентрализатор подгруппы HL в модуле A является минимаксным $\mathbf{R}$-модулем.

Аналогично можно построить строго убывающий ряд подгрупп

$$HD_1^* > HD_2^* > \ldots > HD_k^* > \ldots$$

такой, что индексы $|HD_k^* \colon HD_{k+1}^*|$ бесконечны. Если группа G удовлетворяет условию $W_{\min -nm}$, то существует такое $m \in \mathbb{N}$, что коцентрализатор подгруппы HD_m^* в модуле A является минимаксным $\mathbf{R}$-модулем. Поскольку $HK \leq HD_m^*$, по лемме 2.1 коцентрализатор подгруппы HK в модуле A также является минимаксным $\mathbf{R}$-модулем.

Лемма доказана.

***Следствие* 2.2.** *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, L, K и H — подгруппы группы G такие, что*:

(i) K *— нормальная подгруппа группы* L;

(ii) K *и* L *— H-инвариантные подгруппы*;

(iii) $L/K = Dr_{n \in \mathbb{N}} L_n/K$, *где* $L_n/K \neq \langle 1 \rangle$ *— H-инвариантная подгруппа для любого* $n \in \mathbb{N}$;

(iv) *множество* $\mathbb{N} \backslash \mathrm{Supp}(L/K \cap HK/K)$ *бесконечно.*

Если группа G удовлетворяет либо условию $W_{\min -nm}$, либо условию $W_{\max -nm}$, то коцентрализатор подгруппы HK в модуле A является минимаксным $\mathbf{R}$-модулем. В частности, коцентрализатор подгруппы H в модуле A является минимаксным $\mathbf{R}$-модулем.

Доказательство. Пусть $\Delta = \mathbb{N} \backslash \mathrm{Supp}(L/K \cap HK/K)$ и $T/K = Dr_{n \in \Delta} L_n/K$. Тогда $T/K \cap HK/K = \langle 1 \rangle$. Применим лемму 2.3. Следствие доказано.

***Следствие* 2.3.** *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, L, K и H — подгруппы группы G такие, что*:

(i) K *— нормальная подгруппа группы* L;

(ii) K *и* L *— H-инвариантные подгруппы*;

(iii) $L/K = Dr_{n\in\mathbb{N}}\, L_n/K$, *где* $L_n/K \neq \langle 1\rangle$ — H*-инвариантная подгруппа для любого* $n \in \mathbb{N}$.

Если группа G *удовлетворяет либо условию* $W_{\min -nm}$, *либо условию* $W_{\max -nm}$, *то коцентрализатор подгруппы* $\langle h\rangle K$ *в модуле* A *является минимаксным* $\mathbf{R}$*-модулем для каждого* $h \in H$. *В частности,* $H \leq MD(G)$.

Доказательство. Пусть $h \in H$. Поскольку L_n/K — H-инвариантная подгруппа для любого $n \in \mathbb{N}$, то L_n/K — $\langle h\rangle$-инвариантная подгруппа для любого $n \in \mathbb{N}$. В частности, множество $\mathrm{Supp}(\langle h\rangle K/K \cap L/K)$ конечно. По следствию 2.2 коцентрализатор подгруппы $\langle h\rangle K$ в модуле A является минимаксным $\mathbf{R}$-модулем.

Лемма доказана.

***Следствие* 2.4.** *Пусть* A — $\mathbf{R}G$*-модуль. Предположим, что* $L \leq G$ *и* L *содержит нормальную подгруппу* K *такую, что* $L/K = Dr_{n\in\mathbb{N}}\, L_n/K$, *где* $L_n/K \neq \langle 1\rangle$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$. *Если группа* G *удовлетворяет либо условию* $W_{\min -nm}$, *либо условию* $W_{\max -nm}$, *то коцентрализатор подгруппы* L *в модуле* A *является минимаксным* $\mathbf{R}$*-модулем.*

Доказательство. Как и ранее, выбираем два бесконечных подмножества Σ и Δ множества $\mathbb{N}$ такие, что $\Sigma \cup \Delta = \mathbb{N}$, $\Sigma \cap \Delta = \varnothing$. Пусть $D/K = Dr_{n\in\Sigma} L_n/K$ и $S/K = Dr_{n\in\Delta} L_n/K$. Поскольку $L_n/K \neq \langle 1\rangle$ L-инвариантна для любого $n \in \mathbb{N}$, по лемме 2.3 коцентрализаторы подгрупп D и S в модуле A являются минимаксными $\mathbf{R}$-модулями. Так как $L = DS$, по лемме 2.1 коцентрализатор подгруппы L в модуле A — минимаксный $\mathbf{R}$-модуль.

Следствие доказано.

3. О структуре нильпотентных групп, удовлетворяющих либо условию $W_{\min -nm}$, либо условию $W_{\max -nm}$.

Лемма 3.1. *Пусть* A — $\mathbf{R}G$*-модуль и группа* G *удовлетворяет либо условию* $W_{\min -nm}$, *либо условию* $W_{\max -nm}$. *Пусть* K *и* H — *подгруппы группы* G *такие, что* K — *нормальная подгруппа* H, *и* H/K — *бесконечная элементарная абелева* p*-группа для некоторого простого числа* p. *Предположим также, что подгруппы* K *и* H $\langle g\rangle$*-инвариантны для некоторого* $g \in G$. *Если* $g^k \in C_G(H/K)$ *для некоторого* $k \in \mathbb{N}$, *то* $g \in MD(G)$.

Доказательство. Пусть $M = H/K$. Выберем $1 \neq b_1 \in M$ и положим $B_1 = \langle b_1\rangle^{\langle g\rangle}$. Поскольку элемент g индуцирует на M автоморфизм конечного порядка, подгруппа B_1 конечна. Справедливо равенство $M = B_1 \times C_1$ для некоторой подгруппы C_1. Множество $\left\{C_1^y | y \in \langle g\rangle\right\}$ конечно. Пусть

$$\left\{C_1^y | y \in \langle g\rangle\right\} = \{U_1, \ldots, U_m\}.$$

Отсюда следует, что $\langle g\rangle$-инвариантная подгруппа

$$D_1 = U_1 \cap \ldots \cap U_m = \mathrm{Core}_{\langle g\rangle}(C_1)$$

имеет конечный индекс в M. Пусть $1 \neq b_2 \in D_1$ и $B_2 = \langle b_2\rangle^{\langle g\rangle}$. Тогда $\langle B_1, B_2\rangle = B_1 \times B_2$. Как и ранее, устанавливаем, что $M = (B_1 \times B_2) \times C_2$ для некоторой подгруппы C_2. Продолжив рассуждения аналогичным образом, можно построить бесконечное семейство $\{B_n | n \in \mathbb{N}\}$ неединичных $\langle g\rangle$-инвариантных подгрупп такое, что $\langle B_n | n \in \mathbb{N}\rangle = Dr_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Согласно следствию 2.3, $g \in MD(G)$.

Лемма доказана.

***Следствие* 3.1.** *Пусть* A — $\mathbf{R}G$*-модуль и группа* G *удовлетворяет либо условию* $W_{\min -nm}$, *либо условию* $W_{\max -nm}$. *Пусть* K *и* H — *подгруппы группы* G *такие, что* K — *нормальная* *подгруппа H, и H/K — периодическая почти локально разрешимая группа. Если фактор-группа H/K не является черниковской, то $H \leq MD(G)$.*

Доказательство. Пусть L/K — локально разрешимая нормальная подгруппа H/K конечного индекса. Поскольку фактор-группа H/K не является черниковской, L/K также не является черниковской. Пусть g — произвольный элемент подгруппы H. Тогда L/K содержит абелеву $\langle g \rangle$-инвариантную подгруппу C/K, которая не является черниковской [11]. Если множество $\pi(C/K)$ бесконечно, по следствию 2.3 $g \in MD(G)$. Если же $\pi(C/K)$ конечно, то существует простое число p, для которого силовская p-подгруппа P/K фактор-группы C/K не является черниковской. Отсюда следует, что нижний слой B/K подгруппы P/K бесконечен, и поэтому L/K содержит $\langle g \rangle$-инвариантную бесконечную элементарную абелеву подгруппу B/K. Согласно лемме 3.1 $g \in MD(G)$.

Следствие доказано.

***Следствие* 3.2.** *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль и группа G удовлетворяет либо условию $W_{\min -nm}$, либо условию $W_{\max -nm}$. Пусть K и H — подгруппы группы G такие, что K — нормальная подгруппа H, и H/K — локально конечная группа. Если фактор-группа H/K не является черниковской, то $H \leq MD(G)$.*

Доказательство. Пусть g — произвольный элемент подгруппы H и $C/K = C_{H/K}(gK)$. Если фактор-группа C/K не является черниковской, то по теореме 5.8 [12] C/K содержит абелеву подгруппу D/K, являющуюся прямым произведением бесконечного множества нетривиальных циклических подгрупп. Согласно следствию 2.3 $g \in MD(G)$. Предположим, что фактор-группа C/K является черниковской. Согласно [13] H/K — почти локально разрешимая группа. Применяя следствие 3.1, получаем, что $g \in MD(G)$. Следовательно, $H \leq MD(G)$.

Следствие доказано.

Далее через $\pi(G)$ обозначено множество всех простых делителей порядков элементов группы G.

Лемма 3.2. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль и группа G удовлетворяет либо условию $W_{\min -nm}$, либо условию $W_{\max -nm}$. Пусть K и H — подгруппы группы G такие, что K — нормальная подгруппа H, и H/K — периодическая почти абелева группа. Тогда либо фактор-группа H/K черниковская, либо коцентрализатор подгруппы H в модуле A является минимаксным $\mathbf{R}$-модулем.*

Доказательство. Предположим противное. Согласно следствию 3.1 $H \leq MD(G)$. Пусть U/K — нормальная абелева подгруппа фактор-группы H/K такая, что H/U конечна.

Покажем, что множество $\pi(U/K)$ конечно. Если $\pi(U/K)$ бесконечно, то коцентрализатор подгруппы U в модуле A является минимаксным $\mathbf{R}$-модулем по следствию 2.4. Поскольку фактор-группа H/U конечна, $H = US$ для некоторой конечнопорожденной подгруппы S. Так как S — конечнопорожденная подгруппа $MD(G)$, коцентрализатор подгруппы S в модуле A является минимаксным $\mathbf{R}$-модулем. По лемме 2.1 коцентрализатор подгруппы H в модуле A является минимаксным $\mathbf{R}$-модулем. Противоречие. Следовательно, множество $\pi(U/K)$ конечно.

Пусть $p \in \pi(U/K)$. Если фактор-группа $(U/K)/(U/K)^p$ бесконечна, по следствию 2.3 коцентрализатор подгруппы U в модуле A является минимаксным $\mathbf{R}$-модулем. Как и ранее, приходим к противоречию. Следовательно, фактор-группа $(U/K)/(U/K)^p$ конечна для каждого простого числа $p \in \pi(U/K)$. Пусть P/K — силовская p-подгруппа фактор-группы U/K. Тогда $P/K = (V/K) \times (D/K)$, где фактор-группа D/K делима, а V/K конечна (лемма 3 [14]). Предположим, что фактор-группа D/K не является черниковской. Тогда U/K содержит делимую фактор-группу, которая не является черниковской. Согласно следствию 2.4, коцентрализатор подгруппы U в модуле A является минимаксным $\mathbf{R}$-модулем. Следовательно, коцентрализатор подгруппы H в модуле A является минимаксным $\mathbf{R}$-модулем. Противоречие. Следовательно, фактор-группа D/K черниковская. Отсюда вытекает, что фактор-группа P/K также является черниковской. Поскольку это справедливо для любого простого числа $p \in \pi(U/K)$, фактор-группа U/K черниковская. Следовательно, H/K — черниковская группа. Противоречие.

Лемма доказана.

Напомним, что минимаксной группой называется группа, имеющая конечный субнормальный ряд, факторы которого удовлетворяют либо условию минимальности, либо условию максимальности (см. гл. 10 [15]).

Лемма 3.3. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, группа G удовлетворяет либо условию $W_{\min -nm}$, либо условию $W_{\max -nm}$. Если H — нормальная подгруппа группы G такая, что фактор-группа G/H почти абелева, то G/H минимаксна.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть фактор-группа G/H не является минимаксной. Пусть A_0 — нормальная подгруппа группы G такая, что фактор-группа A_0/H абелева, а G/A_0 конечна. Согласно данному предположению фактор-группа A_0/H не является минимаксной. Отметим, что если U — некоторая G-инвариантная подгруппа A_0 такая, что $H \leq U$ и A_0/U — периодическая фактор-группа, то по лемме 3.2 фактор-группа G/U является черниковской. В частности, фактор-группа A_0/U черниковская.

Покажем, что 0-ранг $r_0(A_0/H)$ бесконечен. Предположим противное. Пусть $r_0(A_0/H)$ конечен. Следовательно, можно выбрать максимальное $\mathbb{Z}$-независимое подмножество $\{a_1H, \ldots, a_kH\}$ фактор-группы A_0/H. Пусть $B/H = \langle a_1H, \ldots, a_kH\rangle^{G/H}$. Поскольку фактор-группа G/A конечна, B/H — конечнопорожденная абелева подгруппа A_0/H такая, что фактор-группа A_0/B периодическая. Ранее было установлено, что в этом случае A_0/B — черниковская группа. Отсюда вытекает, что фактор-группа A_0/H минимаксна. Противоречие. Следовательно, ранг $r_0(A_0/H)$ бесконечен.

Пусть c_1H — элемент бесконечного порядка фактор-группы A_0/H. Пусть $C_1/H = \langle c_1H\rangle^{G/H}$. Так как фактор-группа G/A_0 конечна, C_1/H — конечнопорожденная G-инвариантная абелева подгруппа A_0/H. Существует натуральное число t такое, что $D_1/H = (C_1/H)^t$ — свободная абелева фактор-группа. По построению D_1/H G-инвариантна. Предположим, что мы построили возрастающий ряд

$$\langle 1\rangle = D_0/H \leq D_1/H \leq \ldots \leq D_\alpha/H$$

G-инвариантных подгрупп A_0/H, все факторы которого свободные абелевы. Из теоремы 2 (§1, гл. 3 [16]) следует, что фактор-группа D_α/H свободная абелева. Если фактор-группа A_0/D_α не является периодической, то существует элемент $c_{\alpha+1}D_\alpha$ бесконечного порядка. Пусть $C_{\alpha+1}/D_\alpha = \langle c_{\alpha+1}D_\alpha\rangle^{G/H}$. Поскольку фактор-группа G/A_0 конечна, $C_{\alpha+1}/D_\alpha$ — конечнопорожденная G-инвариантная абелева подгруппа фактор-группы A_0/D_α. Можно указать натуральное число r такое, что $D_{\alpha+1}/D_\alpha = (C_{\alpha+1}/D_\alpha)^r$ — свободная абелева фактор-группа. По построению фактор-группа $D_{\alpha+1}/D_\alpha$ G-инвариантна. Более того, существует порядковое число γ такое, что фактор-группа A_0/D_γ периодическая. Отметим, что $E/H = D_\gamma/H$ свободная абелева. Так как фактор-группа A_0/E периодическая, A_0/E черниковская. В частности, множество $\pi(A_0/E)$ конечно. Выберем простое число $p \notin \pi(A_0/E)$. Так как E/H — свободная абелева фактор-группа, $E/H \neq (E/H)^p = L/H$. Кроме того, $(E/H)/(L/H)$ — бесконечная элементарная абелева p-группа. Следовательно, силовская p-подгруппа A_0/L является бесконечной элементарной абелевой. Если W/L — силовская p'-подгруппа A_0/L, то A_0/W — бесконечная элементарная абелева p-группа. Поэтому A_0/W не является черниковской группой. Противоречие.

Лемма доказана.

***Следствие* 3.3.** *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, группа G удовлетворяет либо условию $W_{\min-nm}$, либо условию $W_{\max-nm}$. Тогда фактор-группа $G/[G,G]$ минимаксна.*

Лемма 3.4 (следствие 2.4 [8]). *Пусть G — группа, центр $Z(G)$ группы G содержит бесконечную элементарную абелеву p-подгруппу E такую, что G/E — минимаксная нильпотентная фактор-группа. Тогда G содержит нормальную подгруппу L такую, что G/L — бесконечная элементарная абелева p-группа.*

Лемма 3.5 (лемма 2.5 [8]). *Пусть G — группа, центр $Z(G)$ группы G содержит делимую абелеву p-подгруппу E такую, что E не является черниковской и фактор-группа G/E нильпотентна и минимаксна. Тогда G содержит нормальную минимаксную подгруппу L такую, что G/L — делимая абелева p-группа, не являющаяся черниковской.*

Нам также понадобятся следующие обозначения. Пусть C — абелева группа конечного специального ранга, M — максимальное $\mathbb{Z}$-независимое подмножество C, $B = \langle M \rangle$ и $\mathrm{Sp}(C)$ — множество простых чисел таких, что силовские p-подгруппы фактор-группы C/B бесконечны. Множество $\mathrm{Sp}(C)$ называется спектром группы C.

Пусть V — другая конечнопорожденная подгруппа группы C такая, что фактор-группа C/V периодическая. Тогда фактор-группы

$$B/(B\cap V) \simeq BV/V, \qquad V/(B\cap V) \simeq BV/B$$

конечны. Отсюда следует, что множество $\mathrm{Sp}(C)$ не зависит от выбора конечнопорожденной подгруппы B.

Пусть G — нильпотентная группа конечного специального ранга и $\langle 1 \rangle = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \ldots \leq Z_n(G) = G$ — верхний центральный ряд группы G. Пусть

$$\mathrm{Sp}(G) = \mathrm{Sp}(Z_1(G)/Z_0(G)) \cup \ldots \cup \mathrm{Sp}(Z_n(G)/Z_{n-1}(G)).$$

Из определения множества $\mathrm{Sp}\,(G)$ следует, что это множество можно определить как объединение спектров всех факторов любого центрального ряда группы G. Отметим, что если H — нормальная подгруппа группы G такая, что фактор-группа G/H периодическая, и если p — простое число, $p \notin \mathrm{Sp}(G)$, то силовские p-подгруппы фактор-группы G/H конечны.

Теорема 3.1. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, группа G удовлетворяет либо условию $W_{\min-nm}$, либо условию $W_{\max-nm}$. Если группа G содержит нормальную подгруппу H такую, что фактор-группа G/H нильпотентна, то G/H минимаксна.*

Доказательство. Пусть $\langle 1\rangle = Z_0/H \leq Z_1/H \leq \ldots \leq Z_n/H = G/H$ — верхний центральный ряд фактор-группы G/H. Докажем индукцией по числу n, что G/H минимаксна. Если $n = 1$, то фактор-группа G/H абелева, и по следствию 3.3 G/H минимаксна. Предположим, что $n > 1$. Согласно индуктивному предположению фактор-группа G/Z_1 минимаксна. Докажем, что фактор-группа Z_1/H также минимаксна. Предположим противное. Покажем, что в этом случае группа G содержит нормальную подгруппу U такую, что G/U — периодическая абелева неминимаксная фактор-группа. Тогда по следствию 3.3 получим противоречие.

Пусть $L = G/H$, $C_0 = Z_0/H$, $C_1 = Z_1/H, \ldots,$ $C_n = Z_n/H$. Тогда $C_1 \leq Z(L)$. Выберем в C_1 максимальное $\mathbb{Z}$-независимое подмножество $\{b_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$. Тогда $B = \langle b_\lambda | \lambda \in \Lambda\rangle = Dr_{\lambda\in\Lambda}\langle b_\lambda\rangle$, и C_1/B — периодическая абелева фактор-группа.

Предположим, что множество $\pi(C_1/B)$ бесконечно. Поскольку фактор-группа L/C_1 минимаксна, множество $\sigma = \mathrm{Sp}(L/C_1)$ конечно. Отсюда следует, что множество $\pi(C_1/B)\backslash\sigma$ бесконечно. Пусть D/B — силовская σ-подгруппа фактор-группы C_1/B. Тогда $\pi(C_1/D)$ — бесконечное множество. Для каждого элемента $cD \in C_2/D$ отображение $gD \longrightarrow [gD, cD]$ задает гомоморфизм из L/D в C_1/D, ядро которого в точности совпадает с $C_{L/D}(cD)$. Поскольку $[G/D, cD] \leq C_1/D$, из изоморфизма

$$[L/D, cD] \simeq (L/D)/C_{L/D}(cD)$$

следует, что $(L/D)/C_{L/D}(cD)$ — периодическая абелева фактор-группа и $\pi((L/D)/C_{L/D}(cD)) \subseteq \pi(C_1/D)$. В частности, $\pi((L/D)/C_{L/D}(cD)) \cap \mathrm{Sp}(L/C_1) = \varnothing$. Из включения $C_1/D \leq C_{L/D}(cD)$ вытекает, что $(L/D)/C_{L/D}(cD)$ — нильпотентная минимаксная группа и $\mathrm{Sp}((L/D)/C_{L/D}(cD)) \subseteq \mathrm{Sp}(L/C_1)$. Таким образом, силовские q-подгруппы $(L/D)/C_{L/D}(cD)$ конечны для всех $q \in \pi((L/D)/C_{L/D}(cD))$. В частности, множество $\pi((L/D)/C_{L/D}(cD))$ конечно. Отсюда следует, что фактор-группа $(L/D)/C_{L/D}(cD)$ конечна и поэтому $C_2/D \leq FC(L/D)$, где $FC(L/D)$ — $FC(L/D)$-центр фактор-группы L/D. Фактор-группа C_2/C_1 имеет конечный специальный ранг, поэтому C_2 содержит конечное множество элементов $c_1, c_2, \ldots, c_t$ такое, что фактор-группа $C_2/\langle c_1, c_2, \ldots, c_t\rangle C_1$ периодическая. Пусть $F/D = \langle c_1D, c_2D, \ldots, c_tD\rangle^{L/D}$. Тогда F/D — конечнопорожденная фактор-группа и пересечение $(F/D) \cap (C_1/D)$ конечно. Отсюда следует, что фактор-группа C_2/F периодическая и множество $\pi(C_2/F)$ бесконечно. Проводя аналогичные рассуждения, через конечное число шагов построим нормальную подгруппу E группы L такую, что L/E — периодическая нильпотентная фактор-группа и $\pi(L/E)$ бесконечно. Согласно следствию 2.4 коцентрализатор группы G в модуле A является минимаксным $\mathbf{R}$-модулем. Противоречие. Следовательно, множество $\pi(C_1/B)$ конечно.

Предположим теперь, что подгруппа B имеет бесконечный специальный ранг. Пусть $p \notin \pi(C_1/B)$. Поскольку B — свободная абелева подгруппа, $B \neq B^p = U$ и B/U — бесконечная элементарная абелева p-группа. Отсюда следует, что силовская p-подгруппа фактор-группы C_1/U является бесконечной элементарной абелевой. Пусть Q/U — силовская p'-подгруппа фактор-группы C_1/U. Тогда C_1/Q — бесконечная элементарная абелева фактор-группа. Согласно лемме 3.4, группа G содержит нормальную подгруппу X такую, что G/X — бесконечная элементарная абелева p-группа, что противоречит следствию 3.3. Полученное противоречие свидетельствует о том, что множество Λ конечно, и поэтому подгруппа B конечно порождена.

Пусть $p \in \pi(C_1/B)$ и P/B — силовская p-подгруппа фактор-группы C_1/B. Как и ранее, устанавливаем, что фактор-группа $(P/B)/(P/B)^p$ конечна. Тогда по лемме 3 [14]

$$P/B = (V/B) \times (K/B),$$

где K/B — делимая фактор-группа, а V/B конечна. Предположим, что фактор-группа K/B не является черниковской. Тогда по лемме 3.5 группа G содержит нормальную подгруппу W такую, что G/W — делимая абелева p-группа, не являющаяся черниковской, что противоречит следствию 3.3. Следовательно, фактор-группы K/B и P/B являются черниковскими. Отсюда с учетом конечности множества $\pi(C_1/B)$ следует, что фактор-группа C_1/B черниковская. Так как абелева подгруппа B конечно порождена, то C_1 минимаксна. Следовательно, $C_1 = Z_1/H$ минимаксна. В силу индуктивного предположения фактор-группа G/H также минимаксна.

Теорема доказана.

***Следствие* 3.4.** *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, группа G удовлетворяет либо условию $W_{\min -nm}$, либо условию $W_{\max -nm}$. Если группа G нильпотентна, то она минимаксна.*

1. *Phillips R. E.* The structure of groups of finitary transformations // J. Algebra. – 1988. – **119**, № 2. – P. 400 – 448.
2. *Phillips R. E.* Finitary linear groups: a survey. “Finite and locally finite groups” // NATO ASI Ser. C. Math. Phys. Sci. – 1995. – **471**. – P. 111 – 146.
3. *Dixon M. R., Evans M. J., Kurdachenko L. A.* Linear groups with the minimal condition on subgroups of infinite central dimension // J. Algebra. – 2004. – **277**, № 1. – P. 172 – 186.
4. *Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya.* Linear groups with the maximal condition on subgroups of infinite central dimension // Publ. Mat. – 2008. – **50**. – P. 103 – 131.
5. *Зайцев Д. И.* Группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности // Укр. мат. журн. – 1968. – **20**, № 4. – С. 472 – 482.
6. *Baer R.* Polyminimaxgruppen // Math. Ann. – 1968. – **175**. – P. 1 – 43.
7. *Munoz–Escolano J. M., Otal J., Semko N. N.* Periodic linear groups with the weak chain conditions on subgroups of infinite central dimension // Communs Algebra. – 2008. – **36**. – P. 749 – 763.
8. *Kurdachenko L. A., Munoz–Escolano J. M., Otal J.* Locally nilpotent linear groups with the weak chain conditions on subgroups of infinite central dimension // Publ. Mat. – 2008. – **52**. – P. 151 – 169.
9. *Курдаченко Л. А.* О группах с минимаксными классами сопряженных элементов // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. – С. 160 – 177.
10. *Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya., Semko N. N.* Insight into Modules over Dedekind domains. – Kiev: Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine, 2008. – 119 p.
11. *Зайцев Д. И.* О разрешимых подгруппах локально разрешимых групп // Докл. АН СССР. – 1974. – **214**, № 6. – С. 1250 – 1253.
12. *Kegel O. H., Wehrfritz B. A. F.* Locally finite groups. – North-Holland etc.: North-Holland Math. Library, 1973. – 210 p.
13. *Hartley B.* Fixed points of automorphisms of certain locally finite groups and Chevalley groups // J. London Math. Soc. – 1988. – **37**, № 2. – P. 421 – 436.
14. *Курдаченко Л. А.* Непериодические FC-группы и связанные классы локально нормальных групп и абелевых групп без кручения // Сиб. мат. журн. – 1986. – **27**. – С. 227 – 236.
15. *Robinson D. J. S.* Finiteness conditions and generalized soluble groups // Ergebnisse Math. und ihrer Grenzgebiete. – 1972. – **2**. – 254 p.
16. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. – М.: Наука, 1972. – 240 с.

Получено 10.10.11