УДК 531.36

В. Н. Кошляков (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ В ПРОБЛЕМЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ПОДВЕШЕННОГО НА СТРУНЕ

On the basis of the Bogolyubov – Mitropol'skii averaging method, we consider the stability of vertical rotation of a body suspended on a string.

На основі методу усереднення Боголюбова – Митропольського розглядається стійкість вертикального обертання тіла, підвішеного на струні.

1. Постановка задачи. Исходное матричное уравнение. Среди эффективных средств приближенного исследования задач и проблем нелинейной механики (в частности, математических моделей разнообразных колебательных процессов) значительное место принадлежит методу усреднения, основывающемуся на дифференциальных уравнениях, представленных в специальной (стандартной) форме Боголюбова – Митропольского [1]

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \qquad x(0) = x_0. \tag{1}$$

Здесь $x = \operatorname{colon}(x_1, \ldots, x_n)$, $X = \operatorname{colon}(X_1, \ldots, X_n)$ — некоторые n-мерные векторы-столбцы, ε — малый неотрицательный вещественный параметр. Усреднение проводится в правой части уравнения (1).

Устойчивости (неустойчивости) усредненной системы иногда сопутствует аналогичное состояние в исходной системе, когда последняя необязательно имеет стандартную форму (1). Однако общих теорем, оправдывающих в таких случаях применение метода усреднения, нет, и не всегда формальная замена одних уравнений другими может привести к правильному результату. На это обстоятельство, в частности, указано в книге Н. Г. Четаева [2]. Определенное соответствие в решениях точных и усредненных уравнений впервые установил Н. Н. Боголюбов в работе [3], сформулировав теоремы, основывающиеся на стандартной форме (1). Поэтому приведение исходных уравнений рассматриваемой задачи к стандартной форме — необходимый этап при обоснованном применении метода усреднения [4].

В основу дальнейшего рассмотрения положено матричное уравнение вида [5]

$$J\ddot{x} + (D + H)\dot{x} + (\Pi + P)x = 0, \tag{2}$$

где $x = \operatorname{colon}(x_1, \ldots, x_{2m})$ — искомый вектор, $J = J^T$, $D = D^T$, $H = -H^T$, $\Pi = \Pi^T$, $P = -P^T$ (знак $(\cdot)^T$ обозначает транспонирование) — заданные постоянные матрицы размера $2m \times 2m$.

Уравнение (2) описывает поведение многих механических систем, находящихся под действием диссипативных, гироскопических, потенциальных и собственно неконсервативных позиционных сил. В системах, содержащих гироскопы, под J понимается определенно-положительная матрица моментов инерции системы относительно соответствующих осей [6 – 10]. Частным случаем общего уравнения (2) являются рассматриваемые ниже уравнения движения тела на струнном подвесе.

Исследования движения тела на струнном подвесе традиционны для Института математики НАН Украины. Эти исследования были начаты в 50-х годах М. А. Лаврентьевым, А. Ю. Ишлинским, С. В. Малашенко и в настоящее время успешно развиваются их учениками и последователями [11 – 15].

В настоящей работе с помощью метода усреднения исследуется устойчивость вертикального вращения тела, подвешенного на жесткой струне, с учетом диссипативных сил.

2. Уравнения возмущенного движения симметричного тела, подвешенного на струне. Исследование вырожденной системы. Рассмотрим уравнения возмущенного движения, описывающие вертикальное вращение с угловой скоростью ω тяжелого симметричного тела массы m, подвешенного на жесткой невесомой струне.

Пусть $J = \mathrm{diag}(J_1, J_1, J_3)$ — матрица главных центральных моментов инерции тела, $D = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda, \lambda_1)$, $\lambda > 0$, $\lambda_1 > 0$, — матрица коэффициентов действующих на тело линейных диссипативных сил. Предполагаем также, что на тело, помимо силы тяжести mg (g – ускорение свободного падения), действует постоянный активный момент, создаваемый сторонним источником энергии, который поддерживает угловую скорость ω собственного вращения тела постоянной.

Пусть, далее, $a > 0$, $b > 0$ — соответственно расстояние от точки крепления тела к струне до его центра масс, b – длина струны. Принятое в данной работе условие $a > 0$ соответствует расположению центра масс ниже точки крепления тела к струне.

Воспользуемся уравнениями (2.8) статьи [16], которые, применительно к данной задаче, могут быть представлены в виде

$$
\begin{gathered}
J_1\ddot{x}_1 + \lambda\dot{x}_1 + cx_1 - (2J_1 - J_3)\omega\dot{x}_2 + (\lambda_1 - \lambda)\omega x_2 = -\varepsilon mgbx_3,\\
J_1\ddot{x}_2 + \lambda\dot{x}_2 + cx_2 + (2J_1 - J_3)\omega\dot{x}_1 - (\lambda_1 - \lambda)\omega x_1 = -\varepsilon mgbx_4,\\
mb^2\ddot{x}_3 + mb(g - b\omega^2)x_3 - 2mb^2\omega\dot{x}_4 = -\varepsilon mgbx_1,\\
mb^2\ddot{x}_4 + mb(g - b\omega^2)x_4 + 2mb^2\omega\dot{x}_3 = -\varepsilon mgbx_2,
\end{gathered}
\tag{3}
$$

где

$$
c = (J_3 - J_1)\omega^2 + mga\Big(\frac{a}{b} + 1\Big), \quad \varepsilon = \frac{a}{b}.
$$

Составляющие λ и λ_1 матрицы D — некоторые постоянные, зависящие от формы поверхности тела. При различающихся между собой коэффициентах диссипации λ и λ_1 (в работе [16] они обозначены соответственно через D_1 и D_3) в уравнениях возмущенного движения возникают неконсервативные позиционные составляющие $(\lambda_1 - \lambda)\omega x_2$ и $(\lambda_1 - \lambda)\omega x_1$, учтенные в первых двух уравнениях системы (3).

Введенный в правую часть уравнений (3) безразмерный параметр ε будем далее считать величиной, меньшей единицы. Этот параметр можно рассматривать, в известном смысле, как звено, связывающее переменные x_1, x_2 с переменными x_2, x_4.

В уравнениях (3) диссипация учтена лишь в первых двух уравнениях. Однако, как показано в работе [16], диссипация оказывается полной за счет взаимосвязи переменных x_s. Вместе с тем при $\varepsilon = 0$, что соответствует вырожденному случаю [4], уравнения (3) распадаются на две независимые системы уравнений, причем в уравнениях относительно переменных x_3 и x_4 диссипация вообще отсутствует. Поэтому определим вырожденный случай уравнениями

$$\begin{gathered}
J_1\ddot{x}_1 + \lambda\dot{x}_1 + cx_1 - (2J_1 - J_3)\omega\dot{x}_2 + (\lambda_1 - \lambda)\omega x_2 = 0,\\
J_1\ddot{x}_2 + \lambda\dot{x}_2 + cx_2 + (2J_1 - J_3)\omega\dot{x}_1 - (\lambda_1 - \lambda)\omega x_1 = 0,\\
mb^2\ddot{x}_3 + f\dot{x}_3 + mb(g - b\omega^2)x_3 - 2mb^2\omega\dot{x}_4 = 0,\\
mb^2\ddot{x}_4 + f\dot{x}_4 + mb(g - b\omega^2)x_4 + 2mb^2\omega\dot{x}_3 = 0,
\end{gathered} \tag{4}$$

предусмотрев в двух последних уравнениях системы (3) демпфирующие члены $f\dot{x}_3$ и $f\dot{x}_4$. Величина коэффициента $f > 0$ полагается малой. Введение сил $f\dot{x}_3$ и $f\dot{x}_4$ оправдано, поскольку в действительности силы с полной диссипацией всегда существуют в реальной системе [2].

Два первых уравнения (4) являются частным случаем матричного уравнения (2), в котором следует считать

$$\begin{gathered}
x = \operatorname{colon}(x_1, x_2), \quad J = J_1E, \quad D = \lambda E, \quad H = (2J_1 - J_3)\omega S,\\
P = (\lambda - \lambda_1)\omega S, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.
\end{gathered} \tag{5}$$

Указанные уравнения, таким образом, содержат неконсервативные позиционные силы с матрицей P. Силы такой структуры усложняют исследование устойчивости. В работах [7 – 10] показано, что при определенных условиях неконсервативные позиционные структуры можно исключить из уравнений с помощью преобразования Ляпунова, не изменяющего, как известно, свойств устойчивости.

Положим в первых двух уравнениях (4) [8]

$$x = L(t)y, \tag{6}$$

где $y = \operatorname{colon}(y_1, y_2)$, а матрицу $L(t)$ определим условием

$$\dot{L}(t) = -D^{-1}PL(t), \tag{7}$$

в котором матрицы D и P удовлетворяют выражениям (5). Рассматривая условие (6) как уравнение относительно матрицы $L(t) = \|l_{jk}(t)\|_1^2$ и удовлетворяя начальному условию $L(0) = E$, находим $L(t)$ в виде ортогональной матрицы

$$L(t) = \begin{bmatrix} \cos\omega_1 t & -\sin\omega_1 t \\ \sin\omega_1 t & \cos\omega_1 t \end{bmatrix}, \quad \omega_1 = \frac{1}{\lambda}\Big(\lambda_1 - \lambda\Big)\omega. \tag{8}$$

В силу структуры матриц (5) выполняются полученные в работе [8] необходимые и достаточные условия приводимости уравнения относительно вектора $y = \operatorname{colon}(y_1, y_2)$ к виду

$$J_1\ddot{y} + V_1\dot{y} + W_1 y = 0, \tag{9}$$

где матрицы V_1 и W_1 являются постоянными:

$$V_1 = D + H + 2JA, \quad W_1 = JA^2 + \Pi + HA, \quad A = D^{-1}P. \tag{10}$$

Матрица W_1 получается, к тому же, симметрической и, следовательно, не содержит неконсервативных элементов. Действительно, с помощью выражений (5) и (8) имеем

$$W_1 = c_{11}^* E,$$

где

$$c_{11}^* = mga\Big(\frac{a}{b} + 1\Big) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Big(J_3\lambda - J_1\lambda_1\Big)\omega^2. \qquad (11)$$

Из (10) получаем

$$V_1 = D + H_1,$$

где с учетом выражений (5), (8) и (10) следует считать

$$H_1 = H + 2JA = H + 2J_1\omega_1 S = \begin{bmatrix} 0 & -h_1 \\ h_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad h_1 = \frac{1}{\lambda}\Big(2J_1\lambda_1 - J_3\lambda\Big)\omega. \quad (12)$$

Матрица H_1 является, таким образом, кососимметрической. Что касается второй группы уравнений (4) относительно переменных x_3 и x_4, то они не содержат неконсервативных позиционных структур, а потому не подвергаются преобразованию.

Обозначая $x_3 = y_3,\ x_4 = y_4$, записываем вырожденные уравнения в виде

$$\begin{gathered} J_1\ddot{y}_1 + \lambda\dot{y}_1 - h_1\dot{y}_2 + c_{11}^* y_1 = 0, \qquad mb^2\ddot{y}_3 + f\dot{y}_3 - h_2\dot{y}_4 + c_{33}^* y_3 = 0, \\ J_1\ddot{y}_2 + \lambda\dot{y}_2 + h_1\dot{y}_1 + c_{11}^* y_2 = 0, \qquad mb^2\ddot{y}_4 + f\dot{y}_4 + h_2\dot{y}_3 + c_{33}^* y_4 = 0, \\ h_2 = 2mb^2\omega, \qquad c_{33}^* = mb(g - b\omega^2). \end{gathered} \qquad (13)$$

Тривиальное решение системы (13) при учете лишь потенциальных структур будет устойчивым, если $c_{11}^* > 0$ и $c_{33}^* > 0$, что соответствует условиям [9]

$$mga\Big(\frac{a}{b} + 1\Big) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Big(J_3\lambda - J_1\lambda_1\Big)\omega^2 > 0, \qquad \omega < \nu, \qquad \nu = \sqrt{g/b}. \qquad (14)$$

Оно становится асимптотически устойчивым при добавлении сил с полной диссипацией, когда $\lambda > 0, f > 0$, и произвольных гироскопических сил, которым в рассматриваемом случае соответствует матрица (12) [2].

Первое из условий (14) упрощается, если воспользоваться концепцией Зоммерфельда–Гринхилла [6, 7], согласно которой можно положить $\lambda = \mu J_1,\ \lambda_1 = \mu J_3$, где μ — некоторая положительная константа, зависящая от свойств среды. Тогда имеем $J_3\lambda - J_1\lambda_1 = 0$, вследствие чего первое из условий (14) принимает вид

$$mga\Big(\frac{a}{b} + 1\Big) > 0. \qquad (15)$$

Поскольку принято $a > 0$, а длина струны всегда положительна ($b > 0$), условие (15) выполняется. Из него, в частности, вытекает известный вывод, что при расположении центра масс тела ниже точки крепления его к стержню вертикальное вращение тела устойчиво [15].

На основе решений вырожденной системы формируется замена переменных, приводящая к уравнениям в стандартной форме. Для этой цели далее понадобится система (13), преобразованная к переменным y_s. Ограничиваясь учетом гироскопических и консервативных структур и учитывая обозначения в уравнениях (13), имеем

$$
\begin{aligned}
J_1\ddot{y}_1 - h_1\dot{y}_2 + c_{11}^* y_1 &= \varepsilon mgb(-y_3\cos\omega_1 t - y_4\sin\omega_1 t),\\
J_1\ddot{y}_2 + h_1\dot{y}_1 + c_{11}^* y_2 &= \varepsilon mgb(y_3\sin\omega_1 t - y_4\cos\omega_1 t),\\
mb^2\ddot{y}_3 - h_2\dot{y}_4 + c_{33}^* y_3 &= \varepsilon mgb(-y_1\cos\omega_1 t + y_2\sin\omega_1 t),\\
mb^2\ddot{y}_4 + h_2\dot{y}_3 + c_{33}^* y_4 &= \varepsilon mgb(-y_1\sin\omega_1 t - y_2\cos\omega_1 t).
\end{aligned} \tag{16}
$$

3. Стандартная форма уравнений. Применение метода усреднения. Для приведения уравнений (16) к стандартному виду используется методика, предложенная в работе [6], которая позволяет, не изменяя условий устойчивости, преобразовывать исходные уравнения (в данном случае уравнения (16)) так, чтобы преобразованные уравнения не содержали гироскопических членов. В соответствии с указанной методикой перейдем в уравнениях (16) к новым переменным $y'_s, s = \overline{1,4}$, с помощью подстановок

$$
\mathrm{colon}(y_1, y_2) = \mathcal{L}(t)\mathrm{colon}(y'_1, y'_2), \qquad \mathrm{colon}(y_3, y_4) = \tilde{\mathcal{L}}(t)\mathrm{colon}(y'_3, y'_4), \tag{17}
$$

в которых матрицы $\mathcal{L}(t)$ и $\tilde{\mathcal{L}}(t)$ размера 2×2 удовлетворяют условиям

$$
\dot{\mathcal{L}}(t) = -\frac{1}{2}J^{-1}H_1\mathcal{L}(t), \qquad \dot{\tilde{\mathcal{L}}}(t) = -\frac{1}{2}\tilde{J}^{-1}H_2\tilde{\mathcal{L}}(t), \tag{18}
$$

где

$$
J = \mathrm{diag}(J_1, J_1),\ \ \tilde{J} = \mathrm{diag}(mb^2, mb^2),\ \ H_1 = \begin{bmatrix} 0 & -h_1 \\ h_1 & 0 \end{bmatrix},\ \ H_2 = \begin{bmatrix} 0 & -h_2 \\ h_2 & 0 \end{bmatrix}.
$$

Рассматривая условия (18) как уравнения относительно матриц $\mathcal{L}(t)$ и $\tilde{\mathcal{L}}(t)$ и считая $\mathcal{L}(0) = \tilde{\mathcal{L}}(0) = E$, получаем

$$
\mathcal{L}(t) = \begin{bmatrix} \cos kt & \sin kt \\ -\sin kt & \cos kt \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\mathcal{L}}(t) = \begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix}, \qquad k = \frac{h_1}{2J_1}. \tag{19}
$$

Матрицы (19) ортогональны и, следовательно, являются матрицами Ляпунова. Поэтому преобразования (17) и (18) не изменяют свойств устойчивости тривиального решения системы (16). Учитывая также, что матрицы $\Pi = \mathrm{diag}(c_{11}^*, c_{22}^*)$, $J^{-1}H_1^2$ коммутируют с матрицей $\mathcal{L}(t)$, а соответственно матрицы $\tilde{\Pi} = \mathrm{diag}(c_{33}^*, c_{44}^*)$, $\tilde{J}^{-2}H_2^2$ — с матрицей $\tilde{\mathcal{L}}(t)$, приходим к уравнениям

$$
\begin{aligned}
J_1\ddot{y}'_1 + c_{11}y'_1 &= \varepsilon mgb(-y'_3\cos\Omega t - y'_4\sin\Omega t),\\
J_1\ddot{y}'_2 + c_{11}y'_2 &= \varepsilon mgb(y'_3\cos\Omega t - y'_4\sin\Omega t),\\
mb^2\ddot{y}'_3 + c_{33}y'_3 &= \varepsilon mgb(-y'_1\cos\Omega t + y'_2\sin\Omega t),\\
mb^2\ddot{y}'_4 + c_{33}y'_4 &= \varepsilon mgb(-y'_1\sin\Omega t - y'_2\cos\Omega t),\\
\Omega &= \frac{J_3}{2J_1}\omega,
\end{aligned} \tag{20}
$$

где

$$
\begin{aligned}
c_{11} &= c_{11}^* + \frac{1}{4}\frac{h_1^2}{J_1} = mga\Big(\frac{a}{b}+1\Big) + \frac{\omega^2 J_3^2}{4J_1},\\
c_{33} &= c_{33}^* + \frac{1}{4}\frac{h_2^2}{mb^2} = mb(g - b\omega^2) + mb^2\omega^2 = mgb.
\end{aligned} \tag{21}
$$

Таким образом, величины c_{11} и c_{33} всегда положительны при $c_{11}^* > 0$ и $c_{33}^* > 0$, т. е. при выполнении условий (14) устойчивости вырожденной системы.

Уравнения в стандартной форме получаются на основе вырожденной системы, получающейся из системы (20) при $\varepsilon = 0$. Положим $y_1' = z_1,\ \dot{y}' = z_2$ в первом из уравнений системы (20). Применительно к вырожденной системе имеем решение

$$z_1 = c_1 \cos nt + c_2 \sin nt, \qquad z_2 = -c_1 n \sin nt + c_2 n \cos nt, \qquad n = \sqrt{\frac{c_{11}}{J_1}}, \tag{22}$$

определяющее переход к переменным $\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$ стандартной формы. Полагаем

$$z_1 = y_1' = \zeta_1(t) \cos nt + \zeta_2(t) \sin nt, \quad z_2 = -\zeta_1(t) n \sin nt + \zeta_2(t) \cos nt. \tag{23}$$

Используя уравнение $\dot{z}_1 = z_2$ и первое из уравнений системы (20), представленные в виде

$$\dot{z}_2 + n z_1 = -\frac{\varepsilon m g b}{J_1 n}(y_3' \cos \Omega t + y_4' \sin \Omega t),$$

получаем с помощью выражений (23) два уравнения относительно переменных $\dot{\zeta}_1$ и $\dot{\zeta}_2$, решения которых имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= \frac{\varepsilon m g b}{J_1 n}(y_3' \cos \Omega t + y_4' \sin \Omega t) \sin nt, \\ \dot{\zeta}_2 &= -\frac{\varepsilon m g b}{J_1 n}(y_3' \cos \Omega t + y_4' \sin \Omega t) \cos nt. \end{aligned} \tag{24}$$

Продолжая этот процесс применительно к остальным уравнениям системы (20) и учитывая связи

$$\begin{gathered} y_1' = \zeta_1 \cos nt + \zeta_2 \sin nt, \qquad y_3' = \zeta_5 \cos \nu t + \zeta_6 \sin \nu t, \\ y_2' = \zeta_3 \cos nt + \zeta_4 \sin nt, \qquad y_4' = \zeta_7 \cos \nu t + \zeta_8 \sin \nu t, \\ \nu = \sqrt{\frac{c_{33}}{m b^2}} = \sqrt{\frac{g}{b}}, \end{gathered} \tag{25}$$

приходим к стандартной форме уравнений относительно переменных $\zeta_s, s = \overline{1,8}$. Введя матрицу $\zeta = \mathrm{colon}(\zeta_1, \ldots, \zeta_8)$, представим эту форму в виде

$$\dot{\zeta} = \varepsilon Q(t) \zeta, \qquad Q(t) = \begin{bmatrix} 0 & Q_1(t) \\ Q_2(t) & 0 \end{bmatrix}, \tag{26}$$

где блоки $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ имеют вид

$$Q_1(t) = \frac{mgl}{J_1 n} \left[\begin{array}{cc} \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma \\ -\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma & -\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma \\ -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma & -\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \\ \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{cc} \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma & \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \\ -\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma & -\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma \\ \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma \\ -\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma & -\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma \end{array} \right], \tag{27}$$

$$Q_2(t) = \frac{g}{b\omega^2} \left[\begin{array}{cc} \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma \\ -\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma & -\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma \\ \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \\ -\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma & -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma \end{array} \right.$$

$$\begin{matrix} -\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma & -\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \\ \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma & \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma \\ \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma \\ -\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma & -\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma \end{matrix}\Bigg] .$$

Здесь

$$\alpha = \Omega t, \quad \beta = \nu t, \quad \gamma = nt. \tag{28}$$

Усреднение проводится в правой части уравнения (26) путем выявления постоянных составляющих в элементах матриц (27). Для этой цели удобно использовать известные формулы преобразования произведений синусов и косинусов величин α, β и γ, входящих в матрицы $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$. Постоянные составляющие выделяются из произведений $\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$, $\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma$, $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ и $\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$. Использовав символ усреднения $\langle\cdot\rangle$, положим $\langle\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma\rangle = l_1$, $\langle\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma\rangle = l_2$, $\langle\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\rangle = l_3$, $\langle\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma\rangle = l_4$. Знаки величин l_j, равных по модулю $\frac{1}{4}$, определяются далее.

Постоянные составляющие в указанных выше четырех произведениях выделяются в трех случаях, а именно когда

$$\gamma + \beta = \alpha, \quad \beta + \alpha = \gamma, \quad \alpha + \gamma = \beta. \tag{29}$$

В первом из указанных случаев имеем $l_1 = -\frac{1}{4}$, $l_2 = l_3 = l_4 = \frac{1}{4}$, во втором — $l_1 = l_2 = l_3 = \frac{1}{4}$, $l_4 = -\frac{1}{4}$, а в третьем — $l_1 = l_3 = l_4 = \frac{1}{4}$, $l_2 = -\frac{1}{4}$.

Не изменяя обозначений, записываем усредненные уравнения, соответствующие учету указанных выше постоянных составляющих $l_j, j = \overline{1,4}$. Эти уравнения разбиваются на две независимые системы уравнений:

$$\begin{gathered} \dot\zeta_1 = \varepsilon_1(l_1\zeta_6 + l_2\zeta_7), \quad \dot\zeta_2 = \varepsilon_1(-l_3\zeta_5 - l_4\zeta_8), \\ \dot\zeta_4 = \varepsilon_1(l_4\zeta_6 - l_3\zeta_7), \quad \dot\zeta_3 = \varepsilon_1(-l_2\zeta_5 + l_1\zeta_8), \\ \varepsilon_1 = \frac{mgl}{J_1 n}, \quad \varepsilon_2 = \frac{g}{b\omega^2}\varepsilon, \\ \dot\zeta_6 = \varepsilon_2(-l_3\zeta_1 + l_2\zeta_4), \quad \dot\zeta_5 = \varepsilon_2(l_1\zeta_2 - l_4\zeta_3), \\ \dot\zeta_7 = \varepsilon_2(l_4\zeta_1 + l_1\zeta_4), \quad \dot\zeta_8 = \varepsilon_2(-l_2\zeta_2 - l_3\zeta_3). \end{gathered} \tag{30}$$

Системы (30) имеют одинаковое характеристическое уравнение

$$x^4 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2(l_1l_3 - l_2l_4)x^2 + \varepsilon_1^2\varepsilon_2^2(l_1l_3 + l_2l_4)^2 = 0. \tag{31}$$

Для того чтобы корни уравнения (31) были чисто мнимыми, требуется положительность его коэффициентов и положительность дискриминанта $\triangle$, выражение которого приводится к виду

$$\triangle = -16\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 l_1l_2l_3l_4. \tag{32}$$

Поскольку в случаях (29) произведение $l_1l_2l_3l_4$ всегда отрицательно (одна из величин l_s отрицательна, а остальные положительны), условие $\triangle > 0$ выполняется. Остается удовлетворить условию

$$l_1l_3 - l_2l_4 > 0, \tag{33}$$

так как при $\varepsilon > 0$ всегда $\varepsilon_1\varepsilon_2 > 0$. Условие (33) не выполняется в первом из случаев (29) и выполняется в остальных двух. Таким образом, при $\gamma + \beta = \alpha$ имеет место возрастание величин ζ_s и, следовательно, развитие неустойчивости в усредненных уравнениях. Учитывая обозначения при выражениях (21), (22) и (28), условие $\gamma + \beta = \alpha$ записываем в виде

$$\sqrt{\frac{c_{11}}{J_1}} + \nu = \frac{J_3}{2J_1}\omega. \tag{34}$$

Эффект неустойчивости в усредненных уравнениях не имеет места, если $\gamma+\beta \neq \alpha$, т. е.

$$\sqrt{\frac{c_{11}}{J_1}} + \nu \neq \frac{J_3}{2J_1}\omega. \tag{35}$$

Условию (35) соответствует неасимптотическая устойчивость в усредненных уравнениях (30). При этом условии, согласно теореме Кельвина – Четаева, учет в усредненной системе сил с полной диссипацией приводит к асимптотической устойчивости в этих уравнениях. Согласно результатам К. Банфи [17], в случае асимптотической устойчивости в усредненных уравнениях оценки Н. Н. Боголюбова ε-близости решений точной и усредненной систем оказываются справедливыми на бесконечном интервале времени.

Запишем условие (34) с учетом (22) в виде

$$n + \frac{J_3}{2J_1}\Big(\frac{2J_1}{J_3}\nu - \omega\Big) = 0. \tag{36}$$

Согласно второму из условий (14), относящемуся к устойчивости вырожденных уравнений, должно иметь место неравенство $\nu > \omega$. Поскольку всегда можно считать $2J_1 > J_3$ (при $2J_1 = J_3$ тело вырождается в бесконечно тонкую пластинку в экваториальной плоскости), при $\nu > \omega$ и подавно будет выполняться условие $2J_1\nu > J_3\omega$, вследствие чего левая часть выражения (31) оказывается положительной. Таким образом, условие (34) не выполняется. Поэтому анализ усредненных уравнений не добавляет дополнительных условий к неравенствам (14), полученных из вырожденных уравнений.

Можно дать и иную интерпретацию изложенному выше. Выражение (34) имеет структуру условия главного комбинационного параметрического резонанса, когда сумма двух собственных частот системы равна частоте возбуждения. Это согласуется со структурой уравнений (20), имеющих периодические коэффициенты с частотой Ω, которая является частотой возбуждения. Указанные уравнения получены в результате преобразований Ляпунова (6) и (17), не изменяющих свойств устойчивости уравнений, к которым они применяются.

Главный параметрический резонанс в уравнениях (20) отсутствует при выполнении условия (35), которому соответствует, как показано в работе [18], ограниченность в решениях указанных уравнений на интервале $(-\infty, +\infty)$ при достаточно малом ε.

Таким образом, неравенства (14) можно рассматривать как достаточные условия устойчивости вертикального вращения симметричного тела, подвешенного на жесткой струне, в случае, когда центр масс тела находится ниже точки крепления стержня к телу $(a > 0)$, а величина параметра $\varepsilon = a/b$ достаточно мала в сравнении с единицей.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
2. *Четаев Н. Т.* Устойчивость движения. – М.: Гостехиздат, 1955. – 207 с.
3. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. – Киев: Изд-во АН УССР, 1945. – 136 с.
4. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Прикладные методы в теории колебаний. – М.: Наука, 1988. – 328 с.
5. *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы. – М.: Наука, 1974. – 344 с.
6. *Кошляков В. Н.* О структурных преобразованиях динамических систем с гироскопическими силами // Прикл. математика и механика. – 1997. – **61**, вып. 5. – С. 774 – 780.
7. *Кошляков В. Н.* О структурных преобразованиях неконсервативных систем // Там же. – 2000. – **64**, вып. 6. – С. 933 – 941.
8. *Кошляков В. Н., Макаров В. Л.* К теории гироскопических систем с неконсервативными силами // Там же. – 2001. – **65**, вып. 4. – С. 698 – 704.
9. *Кошляков В. Н., Стороженко В. А.* Влияние диссипации на устойчивость движения тела, подвешенного на стержне // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2005. – № 3. – С. 22 – 33.
10. *Кошляков В. Н., Макаров В. Л.* Структурный анализ некоторого класса динамических систем // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 8. – С. 1089 – 1097.
11. *Лаврентьев М. А.* Кумулятивный заряд и принципы его работы // Успехи мат. наук. – 1957. – **12**, вып. 4. – С. 41 – 56.
12. *Ишлинский А. Ю.* Пример бифуркации, не приводящий к появлению неустойчивых форм стационарного движения // Докл. АН СССР. – 1957. – **117**, № 1. – С. 47 – 49.
13. *Малашенко С. В.* Некоторые экспериментальные исследования, относящиеся к вращению тела // Прикл. математика и теор. физика. – 1960. – № 3. – С. 205 – 211.
14. *Морозова Е. П.* Об устойчивости вращения твердого тела, подвешенного на струне // Прикл. математика и механика. – 1956. – **20**, вып. 5. – С. 621 – 626.
15. *Ишлинский А. Ю., Стороженко В. А., Темченко М. Е.* Вращение твердого тела на струне и смежные задачи. – М.: Наука, 1991. – 303 с.
16. *Карапетян А. В., Лагутина И. С.* Об устойчивости равномерных вращений волчка, подвешенного на струне, с учетом диссипативного и постоянного моментов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 1. – С. 53 – 57.
17. *Banfi C.* Sull'appossimazionedi processi non stazionari in mechanika non lineare // Boll. Unione mat. ital. – 1967. – **22**, № 4. – P. 442 – 450.
18. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Параметрический резонанс в линейных системах. – М.: Наука, 1987. – 328 с.

Получено 16.08.2006