УДК 517.925

В. М. Евтухов (Одес. нац. ун-т),
Н. С. Васильева (Одес. акад. стр-ва и архит.)

УСЛОВИЯ КОЛЕБЛЕМОСТИ И НЕКОЛЕБЛЕМОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

For a class of second-order semilinear differential equations, we prove theorems on oscillatory and nonoscillatory nature of all proper solutions. These theorems are analogs of the well-known Kneser theorems for linear differential equations.

Для одного класу напівлінійних диференціальних рівнянь другого порядку встановлено теореми про коливність та неколивність усіх правильних розв'язків, що є аналогами відомих теорем А. Кнезера для лінійних диференціальних рівнянь.

1. Постановка вопроса и некоторые вспомогательные предложения. Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i(t)|y|^{1-\lambda_i}|y'|^{\lambda_i}\operatorname{sign} y, \tag{1.1}$$

где $\alpha_i \in \{-1, 1\}$, $i = 1, \ldots, n$, $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < 1$, $p_i\colon [a; \omega[\to]0; +\infty[$, $i = 1, \ldots, n$, — непрерывные функции.

Решение y уравнения (1.1) называется правильным, если оно определено в некоторой левой окрестности ω и для любого τ из этой окрестности удовлетворяет условию

$$\sup\Big\{|y'(t)| : \tau \leq t < \omega\Big\} > 0.$$

Правильное решение называется колеблющимся, если оно имеет последовательность нулей, сходящуюся к ω, и неколеблющимся — в противном случае.

При $n = 1$ и $\lambda_1 = 0$ уравнение (1.1) является линейным дифференциальным уравнением вида

$$y'' = \alpha_1 p_1(t) y. \tag{1.2$_1$}$$

В работах [1 – 3] при установлении асимптотики неколеблющихся решений выяснилось, что в общем случае $n \geq 1$ и $0 \leq \lambda_1 < \ldots < \lambda_n$ уравнение (1.1) наследует ряд свойств линейных дифференциальных уравнений. В частности, в некоторых случаях здесь возникает аналог характеристического уравнения и вопрос об асимптотике решается в терминах его корней.

Целью настоящей статьи является установление признаков колеблемости и неколеблемости всех правильных решений уравнения (1.1), которые являются аналогами известных теорем А. Кнезера [4] для уравнения (1.2$_1$), а также аналогами теорем из [5] для уравнения

$$y'' = \alpha_1 p_1(t)|y|^{1-\lambda_1}|y'|^{\lambda_1}\operatorname{sign} y. \tag{1.2$_2$}$$

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1.1. *Каждое непродолжаемое решение уравнения* (1.1) *определено в промежутке* $[a;\omega[$ *и для любого* $k \in \{1,\ldots,n\}$ *при* $a \le s < t < \omega$ *выполняются неравенства*

$$\rho_k(y)(s)\exp\left[-(2-\lambda_k)\int\limits_s^t\left(|1+\alpha_k p_k(\tau)| + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^n p_i(\tau)\right)d\tau\right] \le$$

$$\le \rho_k(y)(t) \le$$

$$\le \rho_k(y)(s)\exp\left[(2-\lambda_k)\int\limits_s^t\left(|1+\alpha_k p_k(\tau)| + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^n p_i(\tau)\right)d\tau\right], \qquad (1.3)$$

где

$$\rho_k(y)(t) = \big|y'(t)\big|^{2-\lambda_k} + \big|y(t)\big|^{2-\lambda_k}.$$

Доказательство. Пусть $y\colon]t_0,t_1[\to R$ — произвольное непродолжаемое решение уравнения (1.1). Покажем, что это решение при $t_0 < s < t < t_1$ удовлетворяет неравенствам (1.3). Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ согласно (1.1) имеем

$$(\rho_k(y)(t)+\varepsilon)' = (2-\lambda_k)|y|^{1-\lambda_k}|y'|\operatorname{sign} y\big[1+\alpha_k p_k(t)\big] +$$

$$+(2-\lambda_k)\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^n \alpha_i p_i(t)|y|^{1-\lambda_i}|y'|^{\lambda_i-\lambda_k+1}\operatorname{sign}(yy')$$

при $t \in]t_0,t_1[$.

Разделив это равенство на $[\rho_k(y)(t)+\varepsilon]$ и проинтегрировав от s до t, $t_0 \le s \le$ $\le t < t_1$, получим

$$(\rho_k(y)(t)+\varepsilon) = [\rho_k(y)(s)+\varepsilon]\exp\left[\int\limits_s^t\left(\frac{(2-\lambda_k)|y|^{1-\lambda_k}y'\operatorname{sign} y[1+\alpha_k p_k(\tau)]}{[\rho_k(y)(\tau)+\varepsilon]} +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(2-\lambda_k)\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^n \alpha_i p_i(\tau)|y|^{1-\lambda_i}|y'|^{\lambda_i-\lambda_k+1}\operatorname{sign}(yy')}{[\rho_k(y)(\tau)+\varepsilon]}\right)d\tau\right]. \qquad (1.4)$$

Поскольку при $\tau \in [s;t[$ выполняются неравенства

$$|y(t)| \le \big[\rho_k(y)(\tau)\big]^{\frac{1}{2-\lambda_k}}, \qquad |y'(\tau)| \le \big[\rho_k(y)(\tau)\big]^{\frac{1}{2-\lambda_k}},$$

имеет место оценка

$$\left|\int\limits_s^t (2-\lambda_k)\left(\frac{|y|^{1-\lambda_k}y'\operatorname{sign} y[1+\alpha_k p_k(\tau)]}{[\rho_k(y)(\tau)+\varepsilon]} +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^n \alpha_i p_i(\tau)|y|^{1-\lambda_i}|y'|^{\lambda_i-\lambda_k+1}\operatorname{sign}(yy')}{[\rho_k(y)(\tau)+\varepsilon]}\right)d\tau\right| \le$$

$$\leq (2-\lambda_k) \int\limits_s^t \left(|1+\alpha_k p_k(\tau)| + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^n p_i(\tau) \right) d\tau.$$

Поэтому из (1.4) в силу произвольности ε получим (1.3). Установленные при $t_0 \leq \leq s \leq t < t_1$ неравенства (1.3), очевидно, не противоречат тому, что $y\colon]t_0, t_1[\to R$ — непродолжаемое решение уравнения (1.1) в случаях, когда $t_0 = a$, $t_1 = \omega$ и точка a входит в область определения y.

Лемма доказана.

***Следствие* 1.1.** *Любое ненулевое решение y уравнения* (1.1) *на каждом отрезке* $[a; b[\in [a;\omega[$ *имеет не более конечного числа нулей.*

***Следствие* 1.2.** *Если* $\lambda_1 = 0$*, то каждое ненулевое решение уравнения* (1.1) *является правильным. Если же* $0 < \lambda_1$*, то каждое ненулевое решение уравнения* (1.1) *либо является правильным, либо тождественно равно постоянной, отличной от нуля на некотором промежутке* $[t_0;\omega[\subset [a;\omega[$[1].

***Замечание* 1.1.** При $\lambda_1 > 0$ уравнения (1.1) имеет решения каждого из указанных в следствии 1.2 типов. В частности, любое решение уравнения

$$\left(|y'|^{1-\lambda_1}\operatorname{sign} y'\right)' = (1-\lambda_1)\sum_{i=1}^n \alpha_i p_i(t)|y|^{1-\lambda_i}|y'|^{\lambda_i-\lambda_1}\operatorname{sign} y$$

при $\lambda_1 > 0$ определено в промежутке $[a;\omega[$ и является правильным решением уравнения (1.1).

2. Об условиях неколеблемости всех правильных решений уравнения (1.1).

Теорема 2.1. *Пусть для некоторого* $k \in \{1,\ldots,n\}$ *на промежутке* $[t_0;\omega[$, *где* $t_0 \in [a;\omega[$, *выполняется неравенство*

$$-\sum_{i=1}^n \alpha_i p_i^*(t)\left(\frac{1-\lambda_k}{2-\lambda_k}\right)^{\lambda i-\lambda_k} \leq \frac{1}{2-\lambda_k}\left(\frac{1-\lambda_k}{2-\lambda_k}\right)^{1-\lambda_k}, \tag{2.1}$$

где

$$p_i^*(t) = p_i(t)\left[\pi_\omega(t)\right]^{2-\lambda_i}, \qquad \pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если } \omega = +\infty, \\ \omega - t, & \text{если } \omega < +\infty. \end{cases} \tag{2.2}$$

Тогда каждое правильное решение уравнения (1.1) *является неколеблющимся.*

Доказательство. Уравнение (1.1) с помощью замены

$$y(t) = [\pi_\omega(t)]^{\frac{1-\lambda_k}{2-\lambda_k}}\,\xi(\tau), \qquad \tau = \beta\ln\pi_\omega(t), \tag{2.3}$$

где

$$\beta = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega = +\infty, \\ -1, & \text{если } \omega < +\infty, \end{cases}$$

сведем к уравнению

[1] Доказательство следствия 1.1 аналогично приведенному в [6, с. 252]. Следствие 1.2 очевидно.

$$\left[\xi' + \beta\frac{1-\lambda_k}{2-\lambda_k}\xi\right]' - \frac{\beta}{2-\lambda_k}\left[\xi' + \beta\frac{1-\lambda_k}{2-\lambda_k}\xi\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i(\tau)|\xi|^{1-\lambda_i}\left|\xi' + \beta\frac{1-\lambda_k}{2-\lambda_k}\xi\right|^{\lambda_i} \operatorname{sign}\xi, \tag{2.4}$$

где

$$q_i(\tau) = q_i(\tau(t)) = p_i^*(t). \tag{2.5}$$

Предположим теперь, что уравнение (1.1) имеет правильное колеблющееся решение y. Согласно лемме 1.1, это решение определено в промежутке $[a;\omega[$ и имеет свойство

$$|y(t)| + |y'(t)| \neq 0 \quad \text{при} \quad t \in [a;\omega[.$$

В силу замены (2.3) соответствующее y решение ξ: $[\alpha, +\infty[\to R$, $\alpha = \beta \ln \pi_\omega(a)$, уравнения (2.4) также является колеблющимся и удовлетворяет условию

$$|\xi(\tau)| + |\xi'(\tau)| \neq 0 \quad \text{при} \quad \tau \in [\alpha; +\infty[.$$

Поэтому в любой окрестности $+\infty$, а значит и на промежутке $[\beta \ln \pi_\omega(a); +\infty[$, существуют точки τ_1 и τ_2, $\tau_2 > \tau_1$, такие, что

$$\xi(\tau_1) = 0, \quad \xi'(\tau_2) = 0 \qquad \text{и} \qquad \xi'(\tau) > 0 \quad \text{при} \quad \tau \in [\tau_1; \tau_2[. \tag{2.6}$$

Поскольку $\xi'(\tau_2) = 0$ и $\xi(\tau_2) > 0$, в некоторой левой окрестности τ_2, согласно (2.4), имеет место соотношение

$$\frac{\left[1 + \beta\,\dfrac{2-\lambda_k}{1-\lambda_k}\,\dfrac{\xi'(\tau)}{\xi(\tau)}\right]'}{\left[1 + \beta\,\dfrac{2-\lambda_k}{1-\lambda_k}\,\dfrac{\xi'(\tau)}{\xi(\tau)}\right]^{\lambda_k}} =$$

$$= \beta\sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i(\tau)\left(\frac{1-\lambda_k}{2-\lambda_k}\right)^{\lambda_i - 1}\left[1 + \beta\,\frac{2-\lambda_k}{1-\lambda_k}\,\frac{\xi'(\tau)}{\xi(\tau)}\right]^{\lambda_i-\lambda_k} +$$

$$+\beta\left[1 + \beta\frac{2-\lambda_k}{1-\lambda_k}\,\frac{\xi'(\tau)}{\xi(\tau)}\right]^{1-\lambda_k}\left[\frac{1}{2-\lambda_k} - \beta\,\frac{\xi'(\tau)}{\xi(\tau)}\right],$$

которое при $\tau \to \tau_2 - 0$ можно представить в виде

$$\left(\frac{\xi'(\tau)}{\xi(\tau)}\right)' = \frac{1-\lambda_k}{2-\lambda_k}[1 + o(1)]\left\{\frac{1}{2-\lambda_k} + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i q_i(\tau)\left(\frac{1-\lambda_k}{2-\lambda_k}\right)^{\lambda_i-1} +\right.$$

$$\left. +\beta\sum_{i=1}^{n}\alpha_i q_i(\tau)\left(\frac{1-\lambda_k}{2-\lambda_k}\right)^{\lambda_i-2}(\lambda_i - \lambda_k)\frac{\xi'(\tau)}{\xi(\tau)} + o\left(\frac{\xi'(\tau)}{\xi(\tau)}\right)\right\}.$$

Отсюда с учетом (2.1), (2.2) и (2.6) следует, что для некоторого $\tau_* \in\,]\tau_1; \tau_2[$ при $\tau \in [\tau_*; \tau_2[$ выполняется неравенство

$$\frac{\left(\dfrac{\xi'(\tau)}{\xi(\tau)}\right)'}{\dfrac{\xi'(\tau)}{\xi(\tau)}} \geq \beta \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i(\tau) \left(\frac{1-\lambda_k}{2-\lambda_k}\right)^{\lambda_i - 1} (\lambda_i - \lambda_k) + o\,(1)\,.$$

Пусть

$$\lim_{\tau \to \tau_2} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i(\tau) \left(\frac{1-\lambda_k}{2-\lambda_k}\right)^{\lambda_i - 1} (\lambda_i - \lambda_k) = L.$$

Тогда для любой постоянной $c < L$ существует $\tau_0 \in [\tau_*; \tau_2[$ такое, что

$$\frac{\left(\dfrac{\xi'(\tau)}{\xi(\tau)}\right)'}{\dfrac{\xi'(\tau)}{\xi(\tau)}} \geq c \quad \text{при} \quad \tau \in [\tau_0; \tau_2[.$$

Интегрируя это неравенство от τ_0 до τ, находим

$$\ln \frac{\xi'(\tau)}{\xi(\tau)} - \ln \frac{\xi'(\tau_0)}{\xi(\tau_0)} \geq c(\tau - \tau_0) \quad \text{при} \quad \tau \in [\tau_0; \tau_2[.$$

Отсюда, переходя к пределу при $\tau \to \tau_2 - 0$, в силу (2.6) будем иметь

$$-\infty \geq c(\tau_2 - \tau_0) = \text{const}.$$

Полученное противоречие доказывает, что наше предположение о существовании правильного колеблющегося решения уравнения (1.1) было неверным. Следовательно, любое правильное решение уравнения (1.1) является неколеблющимся.

Теорема доказана.

***Следствие* 2.1.** *Если* $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 1$, *то все решения уравнения* (1.1) *являются неколеблющимися.*

***Замечание* 2.1.** Условие (2.1) при $n = 1$ и $\lambda_1 = 0$, т. е. в случае линейного дифференциального уравнения (1.2_1), принимает вид

$$-\alpha_1 p_1(t)\,[\pi_\omega(t)]^2 \leq \frac{1}{4} \quad \text{при} \quad t \in [t_0; \omega[.$$

Это есть известное условие А. Кнезера [4] неколеблемости всех решений уравнения (1.2_1). В случае уравнения (1.2_2), где $\lambda_1 \in [0, 1[$, оно имеет вид

$$-\alpha_1 p_1(t) [\pi_\omega(t)]^{2-\lambda_1} \leq \frac{1}{2-\lambda_1} \left(\frac{1-\lambda_1}{2-\lambda_1}\right)^{2-\lambda_1} \qquad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[$$

и совпадает с условием, полученным в работе [5].

***Замечание* 2.2.** Из следствия 1.2 ясно, что уравнение (1.1) может допускать колеблющиеся решения лишь в случаях, когда существуют $i \in \{1, \ldots, n\}$, для которых $\alpha_i = -1$. Более того, нетрудно доказать, что для колеблемости всех правильных решений необходимо, чтобы $\alpha_1 = \alpha_n = -1$.

3. Об условиях колеблемости всех правильных решений уравнения (1.1).

Теорема 3.1. *Пусть* $\alpha_1 = \alpha_n = -1$,[2]

$$m = \max\{i \in \{1,\dots,n\}\colon \alpha_i = -1 \quad \textit{при} \quad 1 \le i \le m\},$$

$$l = \min\{i \in \{1,\dots,n\}\colon \alpha_i = -1 \quad \textit{при} \quad l \le i \le n\},$$

$$\Gamma_+ = \{i \in \{2,\dots,n-1\}\colon \alpha_i = 1\}.$$

Если для некоторых $k \in \{1,\dots,n\}$ *и* $t_0 \in [a;\omega[$ *выполняются неравенства*

$$\inf_{t\in[t_0,\omega[}\left\{-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i p_i^*(t)\left(\frac{1-\lambda_k}{2-\lambda_k}\right)^{\lambda_i-\lambda_k}\right\} > \frac{1}{2-\lambda_k}\left(\frac{1-\lambda_k}{2-\lambda_k}\right)^{1-\lambda_k}, \tag{3.1}$$

$$\inf_{t\in[t_0;\omega[}\left\{\sum_{i=1}^{m} p_i^*(t)\left(\frac{1-\lambda_k}{2-\lambda_k}\right)^{\lambda_i-\lambda_m} - \sum_{i\in\Gamma_+} p_i^*(t)\left(\frac{1-\lambda_k}{2-\lambda_k}\right)^{\lambda_i-\lambda_m}\right\} >$$

$$> \frac{1}{2-\lambda_m}\left(\frac{1-\lambda_m}{2-\lambda_m}\right)^{1-\lambda_m}, \tag{3.2}$$

$$\inf_{t\in[t_0;\omega[}\left\{\sum_{i=l}^{n} p_i^*(t)\left(\frac{1-\lambda_k}{2-\lambda_k}\right)^{\lambda_i-\lambda_l} - \sum_{i\in\Gamma_+} p_i^*(t)\left(\frac{1-\lambda_k}{2-\lambda_k}\right)^{\lambda_i-\lambda_l}\right\} >$$

$$> \frac{1}{2-\lambda_l}\left(\frac{1-\lambda_l}{2-\lambda_l}\right)^{1-\lambda_l}, \tag{3.3}$$

где p_i^* *— функции из формулы* (2.2), *то каждое правильное решение уравнения* (1.1) *является колеблющимся.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что уравнение (1.1) имеет правильное неколеблющееся решение y. Тогда, не ограничивая общности, можно считать, что

$$y(t) > 0 \quad \text{и} \quad y'(t) \ne 0 \quad \text{при} \quad t \in [t_0;\omega[,$$

где t_0 — некоторое число из промежутка $[a;\omega[$.

Данному решению y уравнения (1.1) в силу замен (2.3) соответствует решение ξ: $[\tau_0;+\infty[\to R$, $\tau_0 = \beta\ln\pi_\omega(t_0)$, уравнения (2.4), удовлетворяющее условиям

$$\xi(\tau) > 0,\ \xi'(\tau) + \beta\frac{1-\lambda_k}{2-\lambda_k}\xi(\tau) \ne 0 \quad \text{при} \quad \tau \ge \tau_0.$$

Согласно (2.4), для этого решения $\xi(\tau)$ имеем

$$z'(\tau) + z^2(\tau) - \beta z(\tau) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i q_i(\tau)|z(\tau)|^{\lambda_i}, \tag{3.4}$$

где $q_i(\tau)$ взято из (2.5),

$$z(\tau) = \frac{\xi'(\tau)}{\xi(\tau)} + \beta\frac{1-\lambda_k}{2-\lambda_k}.$$

[2] См. замечание 2.2 из п. 2.

Теперь заметим, что для любого $\lambda < 1$ функция

$$\varphi_\lambda(z) = |z|^{2-\lambda} - \beta|z|^{1-\lambda}\mathrm{sign}\, z \tag{3.5}$$

при $z \in R$ удовлетворяет неравенству

$$\varphi_\lambda(z) \geq \varphi_\lambda\left(\beta\frac{1-\lambda}{2-\lambda}\right) = -\frac{1}{2-\lambda}\left(\frac{1-\lambda}{2-\lambda}\right)^{1-\lambda}. \tag{3.6}$$

Покажем, использовав это неравенство и условие (3.1), что решение $z(\tau) \colon [\tau_0; +\infty[\to \to R\backslash\{0\}$ уравнения (3.4) на некотором промежутке $[\tau_1; +\infty[$ удовлетворяет одному из неравенств

$$|z(\tau)| < \left(\frac{1-\lambda_k}{2-\lambda_k}\right) \tag{3.7$_1$}$$

либо

$$\big|z(\tau)\big| > \left(\frac{1-\lambda_k}{2-\lambda_k}\right). \tag{3.7$_2$}$$

Допустим противное, т. е. что существует последовательность $\{\tau_j\}$, $j = 1, 2, \ldots$, сходящаяся к $+\infty$, такая, что

$$|z(\tau_j)| = \left(\frac{1-\lambda_k}{2-\lambda_k}\right) \quad \text{при всех} \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{3.8}$$

Тогда из (3.4) с учетом (3.5) имеем

$$\frac{z'(\tau_j)}{|z(\tau_j)|^{\lambda_k}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i(\tau_j)\left(\frac{1-\lambda_k}{2-\lambda_k}\right)^{\lambda_i - \lambda_k} - \varphi_{\lambda_k}(z(\tau_j)).$$

Отсюда в силу (3.6) и условия (3.1) получаем

$$z'(\tau_j) < 0 \quad \text{при всех} \quad j = 1, 2, \ldots,$$

что противоречит (3.8).

Значит, на некотором промежутке $[\tau_1; +\infty[$ решение $z(\tau)$ удовлетворяет одному из неравенств (3.7$_i$), $i = 1, 2$.

Допустим сначала, что выполняется (3.7_1). Тогда из (3.4) с учетом (3.5) находим

$$\frac{z'(\tau)}{|z(\tau)|^{\lambda_m}} = -\varphi_{\lambda_m}(z) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i(\tau)\,|z(\tau)|^{\lambda_i - \lambda_m} \leq$$

$$\leq -\varphi_{\lambda_m}(z) - \sum_{i=1}^{m} q_i(\tau)\,|z(\tau)|^{\lambda_i - \lambda_m} + \sum_{i \in \Gamma_+} q_i(\tau)\,|z(\tau)|^{\lambda_i - \lambda_m} <$$

$$< -\left(\varphi_{\lambda_m}(z) + \sum_{i=1}^{m} q_i(\tau)\left(\frac{1-\lambda_k}{2-\lambda_k}\right)^{\lambda_i-\lambda_m} - \sum_{i \in \Gamma_+} q_i(\tau)\left(\frac{1-\lambda_k}{2-\lambda_k}\right)^{\lambda_i-\lambda_m}\right). \tag{3.9}$$

Кроме того, в силу (1.4), (2.1) и условия (3.1) существуют $\varepsilon > 0$ и $\tau_1 \geq \tau_0$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{m} q_i(\tau)\left(\frac{1-\lambda_k}{2-\lambda_k}\right)^{\lambda_i-\lambda_m} - \sum_{i\in\Gamma_+} q_i(\tau)\left(\frac{1-\lambda_k}{2-\lambda_k}\right)^{\lambda_i-\lambda_m} >$$

$$> \frac{1+\varepsilon}{2-\lambda_m}\left(\frac{1-\lambda_m}{2-\lambda_m}\right)^{1-\lambda_m} \quad \text{при} \quad \tau \geq \tau_1.$$

Поэтому из (3.9) с учетом (3.6) получаем

$$\frac{z'(\tau)}{|z(\tau)|^{\lambda_m}} \leq -\frac{\varepsilon}{2-\lambda_m}\left(\frac{1-\lambda_m}{2-\lambda_m}\right)^{1-\lambda_m} \quad \text{при} \quad \tau \geq \tau_1.$$

Интегрируя это неравенство от τ_1 до τ, имеем

$$\frac{|z(\tau)|^{1-\lambda_m}\operatorname{sign} z(\tau)}{(1-\lambda_m)} \leq \frac{|z(\tau_1)|^{1-\lambda_m}\operatorname{sign} z(\tau_1)}{(1-\lambda_m)} - \frac{\varepsilon}{2-\lambda_m}\left(\frac{1-\lambda_m}{2-\lambda_m}\right)^{1-\lambda_m}(\tau-\tau_1)$$

при $\tau \geq \tau_1$, откуда следует, что

$$z(\tau) \to -\infty \quad \text{при} \quad \tau \to +\infty,$$

что противоречит (3.7_1).

Пусть теперь выполняется условие (3.7_2). Тогда с учетом условия (3.3) из соотношения (3.4) получаем

$$\frac{z'(\tau)}{|z(\tau)|^{\lambda_l}} + |z(\tau)|^{2-\lambda_l} - \beta|z(\tau)|^{1-\lambda_l}\operatorname{sign} z(\tau) \leq$$

$$\leq -\frac{1+\varepsilon}{2-\lambda_l}\left(\frac{1-\lambda_l}{2-\lambda_l}\right)^{1-\lambda_l} \quad \text{при} \quad \tau \geq \tau_1 \quad (\tau_1 \in [\tau_0; +\infty[). \tag{3.10}$$

Отсюда, как в предыдущем случае, доказываем, что $z(\tau) \to -\infty$ при $\tau \to +\infty$.

Далее, перепишем (3.10) в виде

$$\frac{z'(\tau)}{|z(\tau)|^2} + 1 + \frac{1}{z(\tau)} \leq -\frac{1+\varepsilon}{2-\lambda_l}\left(\frac{1-\lambda_l}{2-\lambda_l}\right)^{1-\lambda_l}\frac{1}{|z(\tau)|^{2-\lambda_l}}. \tag{3.11}$$

Поскольку $z(\tau) \to -\infty$ при $\tau \to +\infty$, из соотношения (3.11) ясно, что для некоторого $\tau_1 \geq \tau_0$ выполняется неравенство

$$\frac{z'(\tau)}{z^2(\tau)} \leq -\frac{1}{2} \quad \text{при} \quad \tau \geq \tau_1 \ .$$

Интегрируя это неравенство на промежутке от τ_1 до τ, получаем

$$-\frac{1}{z(\tau)} + \frac{1}{z(\tau_1)} \leq -\frac{1}{2}(\tau-\tau_1).$$

Отсюда, переходя к пределу и учитывая, что $z(\tau) \to -\infty$ при $\tau \to +\infty$, имеем

$$\frac{1}{z(\tau_1)} \leq -\infty,$$

что, очевидно, невозможно.

Полученные в каждом из двух возможных случаев противоречия доказывают, что наше предположение о существовании хотя бы одного неколеблющегося решения уравнения (1.1) было неверным. Значит, все правильные решения уравнения (1.1) являются колеблющимися.

***Следствие* 3.1.** *Если* $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = -1$ *и для некоторых* k *и* $t_0 \in [a,\omega[$ *выполняются неравенства*

$$\inf_{t\in[t_0;\omega[} \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i^*(t) \left(\frac{1-\lambda_k}{2-\lambda_k}\right)^{\lambda_i-\lambda_k} \right\} > \frac{1}{2-\lambda_k}\left(\frac{1-\lambda_k}{2-\lambda_k}\right)^{1-\lambda_k},$$

$$\inf_{t\in[t_0;\omega[} \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i^*(t) \left(\frac{1-\lambda_k}{2-\lambda_k}\right)^{\lambda_i-\lambda_1} \right\} > \frac{1}{2-\lambda_1}\left(\frac{1-\lambda_1}{2-\lambda_1}\right)^{1-\lambda_1},$$

то все решения уравнения (1.1) *являются колеблющимися.*

Действительно, в данном случае множество Γ_+ является пустым, а условие (3.2) вытекает из (3.3) в силу того, что функция

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{2-\lambda}\left(\frac{1-\lambda}{2-\lambda}\right)^{1-\lambda}$$

является убывающей на промежутке $[0,1[$.

***Замечание* 3.1.** Условия (3.1)–(3.3) при $n=1$ и $\lambda_1 \in [0,1[$, т. е. в случаях линейного дифференциального уравнения (1.2_1) и полулинейного дифференциального уравнения (1.2_2) принимают соответственно вид

$$\alpha_1 = -1, \qquad \inf p_1(t)\,[\pi_\omega(t)]^2 > \frac{1}{4} \quad \text{при} \quad t \in [t_0,\omega[$$

и

$$\alpha_1 = -1, \qquad \inf p_1(t)\,[\pi_\omega(t)]^{2-\lambda_1} > \frac{1-\lambda_1}{2-\lambda_1}\left(\frac{1-\lambda_1}{2-\lambda_1}\right)^{1-\lambda_1} \quad \text{при} \quad t \in [t_0,\omega[.$$

Первое из них является известным условием А. Крезера [4] колеблемости всех решений линейного дифференциального уравнения (1.2_1), а второе — полученным в [5] условием колеблемости всех правильных решений уравнения (1.2_2).

Это есть известное условие А. Кнезера колеблемости всех решений уравнения (1.2).

1. *Евтухов В. М., Васильева Н. С.* Асимптотические представления правильных решений одного полулинейного дифференциального уравнения второго порядка // Сообщ. АН Грузии. – 1995. – **152**, № 2. – С. 228–234.
2. *Евтухов В. М., Васильева Н. С.* Асимптотические представления правильных решений одного полулинейного дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1995. – **31**, № 9. – С. 1591–1592.
3. *Evtukhov V. M., Vasilieva N. S.* Asymptotic representations of proper nonoscillations solutions of a class semilinear differential equations of the second order// Nonlinear Oscillations. – 2001. – **4**, № 2. – P. 190–215.
4. *Kneser A.* Untersuchung uber die reelen Nullstellen der Integrale linearer Differentialgleichungen // Math. Ann. – 1893. – **42**, № 3. – S. 409–435.
5. *Евтухов В. М.* Об условиях колеблемости и неколеблемости решений одного полулинейного дифференциального уравнения второго порядка // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 7. – С. 833–841.
6. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 467 с.

Получено 13.09.2006