УДК 517.929

Я. Й. Бігун (Чернів. нац. ун-т)

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ТА УСЕРЕДНЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ БАГАТОЧАСТОТНИХ ЗАДАЧ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

We use the method of averaging over fast variables in studying multifrequency systems with linearly transformed argument. We prove the existence of solutions of initial and boundary-value problems in a small neighborhood of a solution of averaged problem. We obtain an estimate of error of the averaging method for slow variables.

Метод усреднения по быстрым переменным применен к исследованию многочастотных систем с линейно преобразованным аргументом. Доказано существование решения начальной и краевой задач в малой окрестности решения усредненной задачи и получена оценка погрешности метода усреднения для медленных переменных.

1. Вступ. Досить жорсткі обмеження при обґрунтуванні методу усереднення для багаточастотних систем пов'язані з резонансом частот [1 – 3]. Якщо вектор частот залежить від повільного часу $\tau = \varepsilon t$ (ε — малий додатний параметр), то умови незастрягання системи в околі резонансів, як запропоновано в [4] чи в загальному випадку в [3], досить накласти тільки на цей вектор. У разі залежності частот від повільних змінних обмеження стосуються всіх функцій у правій частині системи як для випадку двочастотної [5], так і для систем із довільним числом частот [1, 2, 6]. Ефективність таких умов зростає, якщо вони пов'язані з певною множиною резонансних гармонік в околі розв'язку усередненої задачі [1 – 3, 7]. Резонансні системи із запізненням методом усереднення досліджувались у роботах [8 – 10].

У даній роботі обґрунтовано метод усереднення для початкової задачі з лінійно перетвореним аргументом і вектором частот, залежним від τ і повільних змінних, зокрема, із запізненням. Одержаний результат застосовано для дослідження існування розв'язку й обґрунтування методу усереднення для деяких крайових задач. Використано методику, запропоновану в [7]. Для аналогічних систем із сталим запізненням і вектором частот, залежним від повільних змінних, метод усереднення обґрунтовано в [11].

2. Постановка задачі. Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $G = [0, L] \times D \times D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times [0, \varepsilon_0]$, λ, θ і σ — деякі числа із (0,1), $x_\lambda(\tau) = x(\lambda\tau)$, $k, l \in Z^m$, $\|k\| = |k_1| + \ldots + |k_m|$, $p = (k, l) \in Z^{2m}$, $\|p\|_\theta = \|k\| + \theta \|l\|$. Розглянемо систему рівнянь з n повільними змінними x і $m \geq 1$ швидкими змінними φ вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = A(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta) + \varepsilon X(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta, \varepsilon),$$
$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau, x, x_\sigma)}{\varepsilon} + Y(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta, \varepsilon), \qquad (1)$$

де вектор-функції A, X і Y є 2π-періодичними за змінними φ_ν, $\varphi_{\theta\nu}$, $\nu = 1, \ldots, m$.

Побудуємо усереднену систему першого наближення для повільних змінних

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = A_0(\tau, \bar{x}, \bar{x}_\lambda), \qquad \tau \in [0, L], \tag{2}$$

де

$$A_0(\tau, x, x_\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} A(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta) d\varphi d\varphi_\theta .$$

Припустимо, що існує розв'язок $\bar{x} = \bar{x}(\tau, \bar{y})$ системи (2), $\bar{x}(0, \bar{y}) = \bar{y}$, який лежить в D разом із деяким ρ-околом $D_\rho(\bar{x})$. Покажемо, що тоді існує розв'язок системи (1) такий, що $x(0, \bar{y}, \overline{\psi}, \varepsilon) = \bar{y}$, $\varphi(0, \bar{y}, \overline{\psi}, \varepsilon) = \overline{\psi}$ і справджується нерівність

$$\| x(\tau, \bar{y}, \overline{\psi}, \varepsilon) - \bar{x}(\tau, \bar{y}) \| \le c_1 \varepsilon^{(1-3\beta)/2} \tag{3}$$

для всіх $\tau \in [0, L]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, де $\varepsilon^* \le \varepsilon_0$, $c_1 > 0$ не залежить від ε, $\beta \in [0, 1/3)$.

Зафіксуємо $\rho_1 \in (0, \rho]$. Через $\bar{x}(\tau, \bar{y}; [0, L])$ позначимо траєкторію розв'язку $\bar{x}(\tau, \bar{y})$ при $\tau \in [0, L]$, а через $D_{\rho_1}(\bar{z})$ — ρ_1-окіл траєкторії

$$\bar{z}(\tau, \bar{y}; [0, L]) = \bar{x}(\tau, \bar{y}; [0, L]) \times \bar{x}_\sigma(\tau, \bar{y}; [0, L]) \times \bar{x}_\theta(\tau, \bar{y}; [0, L]) \times \bar{x}_{\theta\sigma}(\tau, \bar{y}; [0, L])$$

в D^4. Нехай P — множина цілочислових векторів p, для яких відповідні коефіцієнти Фур'є $A_p(\tau, x, x_\lambda)$ функції $A(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta)$ тотожно не дорівнюють нулю в $D_{\rho_1}(\bar{x} \times \bar{x}_\lambda)$; $u = (x, x_\sigma, x_\theta, x_{\sigma\theta})$, $h = (x_\sigma, x_{\theta\sigma}, x_{\sigma\sigma}, x_{\sigma\sigma\theta})$, $u_\theta = (x_\theta, x_{\sigma\theta}, x_{\theta\theta}, x_{\sigma\theta\theta})$ (для h_θ, $v = (\varphi, \varphi_\theta)$ і $w = v_\sigma := (\varphi_\sigma, \varphi_{\theta\sigma})$ позначення аналогічні).

Умовою резонансу частот у системі (1) в точці $\tau_0 \in [0, L]$ є виконання для деякого вектора $p \in Z^{2m} \setminus \{0\}$ рівності

$$\gamma_p(\tau_0, u(\tau_0, \varepsilon)) := (k, \omega(\tau_0, x(\tau_0, \varepsilon), x(\sigma\tau_0, \varepsilon))) +$$
$$+ \theta(l, \omega(\theta\tau_0, x(\theta\tau_0, \varepsilon), x(\sigma\theta\tau_0, \varepsilon))) \cong 0. \tag{4}$$

Нехай $d(\varepsilon) = \varepsilon^\alpha$ для деякого $\alpha \in [0, 1/2)$. Введемо фінітну функцію $h_d \in C^1(\mathbb{R})$ вигляду

$$h_d(s) = \begin{cases} 1, & |s| \le d, \\ 0, & |s| \ge 2d, \\ \cos^2 \dfrac{\pi}{2d}(s - d), & d < |s| < 2d. \end{cases}$$

Позначимо

$$\delta(\tau, x, x_\lambda, u, v, \varepsilon) = A_0(\tau, x, x_\lambda) + \sum_{p \in P} A_p(\tau, x, x_\lambda) h_d(\gamma_p(\tau, u)) e^{i(p, v)},$$

$$\Omega(\tau, x, x_\lambda, x_\sigma, x_{\lambda\sigma}, u, h, v, w, \varepsilon) = \frac{\partial\omega(\tau, x, x_\sigma)}{\partial\tau} + \frac{\partial\omega(\tau, x, x_\sigma)}{\partial x} \delta(\tau, x, x_\lambda, u, v, \varepsilon) +$$
$$+ \frac{\partial\omega(\tau, x, x_\sigma)}{\partial x_\sigma} \delta(\sigma\tau, x_\sigma, x_{\lambda\sigma}, h, w, \varepsilon).$$

Припустимо, що виконуються наступні умови:

1^0) вектор-функції $\omega \in C^1_{\tau,x,x_\sigma}([0, L]\times D\times D, a_1)$, $A \in C^1_{\tau,x,x_\lambda,x_\sigma}(G, a_1)$, $A \in$ $\in C^{l_1}_{\upsilon}(G, a_1)$, $\left(\dfrac{\partial A}{\partial x}, \dfrac{\partial A}{\partial x_\lambda}\right) \in C^{l_2}_{\upsilon}(G, a_1)$, $[X, Y] \in C(G, a_1)$,

$$l_1 \ \geq\ 2m + 1 + \max\left(0,\, 2\chi,\, \frac{(1-3\beta)(\chi+1)}{1-2\alpha-\beta} - 1\right), \qquad l_2 \ \geq\ 2m + \max(0, \chi),$$

та їх похідні до відповідного порядку обмежені сталою a_1;

2^0) існує розв'язок $(x(\tau, \varepsilon), \varphi(\tau, \varepsilon))$ системи (1), визначений для всіх $(\tau, \varepsilon) \in [0, L]\times(0, \varepsilon_0]$ $(x(\tau, \varepsilon)$ лежить в $D\times\mathbb{R}^m$ разом із $D_{\rho_1/2}$-околом);

3^0) для всіх $p \in P$, $u, u_\theta \in D_\rho(\bar z)$ і $h, h_\theta \in D_\rho(\bar z)$, υ, w і w_θ із $\mathbb{R}^{4m}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ виконується нерівність

$$\left|\gamma_p(\tau, u)\right| + \left|\left(k, \Omega(\tau, x, x_\lambda, x_\sigma, x_{\lambda\sigma}, u, h, \upsilon, w, \varepsilon)\right) + \right.$$
$$\left. + \,\theta\left(l, \Omega_\theta(\tau, x, x_\lambda, x_\sigma, x_{\lambda\sigma}, u, h, \upsilon, w, \varepsilon)\right)\right| \ \geq\ a_2\|p\|_\theta^{-\chi}\varepsilon^\beta,$$

де $a_2 > 0$, $\chi \geq -1$, $0 \leq \beta < 1/3$, $2\alpha + \beta < 1$.

Якщо вектор частот ω не залежить від x_σ, то умова 3^0 спрощується, оскільки тоді вимагається виконання нерівності

$$\left|\gamma_p(\tau, x, x_\theta)\right| + \left|\left(k, \Omega(\tau, x, x_\lambda, x_\theta, \upsilon, \varepsilon)\right) + \theta\left(l, \Omega(\tau\theta, x_\theta, x_{\lambda\theta}, x_{\theta\theta}, w, \varepsilon)\right)\right| \ \geq$$
$$\geq\ a_2\|p\|_\theta^{-\chi}\varepsilon^\beta$$

для всіх $\tau \in [0, L]$, $(x, x_\lambda, x_\theta, x_{\lambda\theta}) \in D_\rho(\bar z)$, $\upsilon, \upsilon_\theta \in R^m$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

3. Оцінка осциляційного інтеграла. Розглянемо інтеграл вигляду

$$I_p(\tau, t, \bar t, \varepsilon) \ = \ \int_t^{t+\tau} f(s, \varepsilon)\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_{\bar t}^{s}\gamma_p(s_1, u(s_1, \varepsilon))\,ds_1\right\}ds,$$

де $\tau \in [0, L]$, $t \in R_+$, $\bar t \in R_+$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Зокрема, такий інтеграл одержують, якщо в системі (1) записати рівняння для x і φ в інтегральній формі та скористатись зображенням φ у розкладі функцій у правій частині в ряд Фур'є.

Теорема 1. *Нехай*:

1) $f(\cdot, \varepsilon) \in C^1(R_+)$ $\forall\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *і* $f(\tau, \cdot) \in C(0, \varepsilon_0]$ $\forall t \in R_+$, *на* $G_t = [t, t + L]\times(0, \varepsilon_0]$ *вектор-функції* f *і* $\dfrac{df}{d\tau}$ *є обмеженими*;

2) *виконуються умови* $1^0 - 3^0$ *при* $\tau \in R_+$.

Тоді для всіх $t \in R_+$, $\bar t \in R_+$, $\tau \in [t, t + L]$ *і* $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, $\varepsilon^* \leq \varepsilon_0$, *справджується оцінка*

$$\left\|I_p(\tau, t, \bar t, \varepsilon)\right\| \ \leq\ c_{10}\varepsilon^{(1-3\beta)/2}\left[\|p\|_\theta^{\chi+1}\left(1 + \|p\|_\theta^\chi\right)\sup_{G_t}\|f\| + \|p\|_\theta^\chi\sup_{G_t}\left\|\frac{df}{d\tau}\right\|\right].$$

Оцінка виконується для всіх $p \in P$, *якщо* $\chi = -1$, *і* $p \in P_N = \{p:\ 1 \leq \leq \|p\|_\theta \leq N\}$, *якщо* $\chi > -1$, N — *деяке досить велике число.*

Доведення. Для фіксованого $\alpha \in [0, 1/2)$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ на нерезонансній множині

$$d_t = \left\{\tau : \left|\gamma_p(\tau, x(\tau, \varepsilon))\right| \geq \varepsilon^{\alpha}\right\}$$

при $\tau = [t, t+L]$ і $p \in P$ позбудемося членів ряду Фур'є функції $a(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta)$, яким відповідають резонансні гармоніки. Як і в роботах [2, 3, 7], введемо функцію

$$y(\tau, \varepsilon) = x(\tau, \varepsilon) + \varepsilon U(\tau, \varepsilon), \tag{5}$$

де

$$U(\tau, \varepsilon) = \sum_{p \in P} U_p(\tau, x(\tau, \varepsilon), x_\lambda(\tau, \varepsilon), u(\tau, \varepsilon), \varepsilon) e^{i(p, v(\tau, \varepsilon))}.$$

Коефіцієнти $U_p(\tau, u, \varepsilon)$ визначаються з рівняння

$$\frac{\partial U(\tau, x, x_\lambda, u, v, \varepsilon)}{\partial \varphi}\, \omega(\tau, x, x_\sigma) + \theta\, \frac{\partial U(\tau, x, x_\lambda, u, v, \varepsilon)}{\partial \varphi_\theta}\, \omega(\theta\tau, x_\theta, x_{\sigma\theta}) +$$

$$+ \sum_{p \in P} A_p(\tau, x, x_\lambda)(1 - h_d(\gamma_p(\tau, u))) e^{i(p, v)} = 0.$$

Одержуємо

$$U(\tau, \varepsilon) = -i \sum_{p \in P} \frac{A_p(\tau, x(\tau, \varepsilon), x(\lambda\tau, \varepsilon))}{\gamma_p(\tau, x(\tau, \varepsilon))} (1 - h_d(\gamma_p(\tau, u(\tau, \varepsilon)))) e^{i(p, v(\tau, \varepsilon))}.$$

На підставі умови 1^0 та оцінок коефіцієнтів Фур'є [12] маємо

$$\varepsilon \| U(\tau, \varepsilon) \| \leq \varepsilon^{1-\alpha} \sum_{p \in P} \sup_{G_+} \| A_p \| \leq c_2 \varepsilon^{1-\alpha}, \tag{6}$$

де $c_2 = 2^{2m + l_1} a_1 m^{l_1} \left(1 + \dfrac{1}{l_1 - 2m}\right)$, $G_+ = R_+ \times D \times D$.

Якщо $\varepsilon_1 = \min\left(\varepsilon_0, \left(\dfrac{\rho_1}{2c_2}\right)^{1/(1-\alpha)}\right)$, то $y(\tau, \varepsilon) \in D_\rho(\bar{x})$ для всіх $(\tau, \varepsilon) \in [t, t + L] \times (0, \varepsilon_1]$. Здиференціюємо (5):

$$\frac{dy(\tau, \varepsilon)}{d\tau} = \delta(\tau, x(\tau, \varepsilon), x_\lambda(\tau, \varepsilon), u(\tau, \varepsilon), v(\tau, \varepsilon), \varepsilon) + R(\tau, \varepsilon),$$

де

$$R(\tau, \varepsilon) = \varepsilon \Bigg\{ X(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta, \varepsilon) -$$

$$- i \sum_{p \in P} \frac{A_p(\tau; x, x_\lambda)}{\gamma_p(\tau, u)} ((k, Y) + \theta(l, Y_\theta)) e^{i(p, v)} -$$

$$- i \sum_{p \in P} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \left(A_p(\tau; x, x_\lambda)\, \frac{1 - h_d(\gamma_p(\tau, u))}{\gamma_p(\tau, u)} \right) \right) e^{i(p, v)} \Bigg\}.$$

Отже, рівняння першого наближення для функції y містить відмінні від нуля гармоніки для всіх $p \in P$ на множині d_t. На підставі умови 1^0 маємо

$$\| R(\tau, \varepsilon) \| \leq c_3 \varepsilon^{1-2\alpha}, \tag{7}$$

де

$$c_3 = a_1\left(1 + \sum_{p\in P}\left[\sup_{G_+}\left\|\frac{\partial A_p}{\partial\tau}\right\| + 2a_1\left(\sup_{G_+}\left\|\frac{\partial A_p}{\partial x}\right\| + \lambda\sup_{G_+}\left\|\frac{\partial A_p}{\partial x_\lambda}\right\|\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\pi + a_2\|p\|_\theta\right)\sup_{G_+}\|A_p\|\right]\right).$$

Покажемо, що умова 3^0 забезпечує незастрягання траєкторії $y(\tau, \varepsilon, [0, L])$ на резонансній множині $[t, t+L]\backslash d_t$. Доведемо, що для будь-якого $p \in P$, $(\tau, \varepsilon) \in [t, t+L]\times(0, \varepsilon_4]$, $\varepsilon_4 \le \varepsilon_0$, справджується оцінка

$$\Gamma_p(\tau, \varepsilon) := \left|\gamma_p(\tau, g(\tau, \varepsilon))\right| + \left|\frac{d\gamma_p}{d\tau}(\tau, g(\tau, \varepsilon))\right| \ge \frac{1}{2}a_2\|p\|_\theta^{-\chi}\varepsilon^\beta, \tag{8}$$

де $g = (y, y_\sigma, y_\theta, y_{\sigma\theta})$. Нехай c_4' і c_4 — додатні сталі, якими обмежені відповідно суми

$$\sum_{p\in P}\|p\|_\theta\sup_{G_+}\|A_p\| \quad \text{і} \quad \sum_{p\in P}\left(\sup_{G_+}\left\|\frac{\partial A_p}{\partial x}\right\| + \sup_{G_+}\left\|\frac{\partial A_p}{\partial x_\lambda}\right\|\right),$$

$\varepsilon_2 \le (a_1c_4'\pi)(2n(2a_1 + c_4))^{-1}$. Позначимо через δ^x і δ^y функції $\delta(\tau, x, x_\lambda, u, v, \varepsilon)$ і $\delta(\tau, y, y_\lambda, u, v, \varepsilon)$, коли u набуває відповідно значень $(x, x_\lambda, x_\sigma, x_\theta, x_{\sigma\theta})$ і $(y, y_\lambda, y_\sigma, y_\theta, y_{\sigma\theta})$. Тоді з умови 1^0 та оцінки (6) випливає

$$\Gamma_p(\tau, \varepsilon) \ge \left|\gamma_p(\tau, g(\tau, \varepsilon))\right| + \left|(k, \Omega(\tau, y, y_\lambda, y_\sigma, y_{\lambda\sigma}, u, h, v, w, \varepsilon)) + \right.$$

$$\left. + \theta(l, \Omega_\theta(\tau, y, y_\lambda, y_\sigma, y_{\lambda\sigma}, u, h, v, w, \varepsilon))\right| -$$

$$- \left|\left(k, \frac{\partial\omega}{\partial y}R + \sigma\frac{\partial\omega}{\partial y_\sigma}R_\sigma\right) + \theta^2\left(l, \frac{\partial\omega_\theta}{\partial y_\theta}R_\theta + \sigma\frac{\partial\omega_\theta}{\partial y_{\sigma\theta}}R_{\theta\sigma}\right)\right| -$$

$$- \left|\left(k, \frac{\partial\omega}{\partial y}(\delta^* - \delta^y) + \sigma\frac{\partial\omega}{\partial y_\sigma}(\delta^x_\sigma - \delta^y_\sigma)\right) + \theta^2\left(l, \frac{\partial\omega_\theta}{\partial y_\theta}(\delta^x_\theta - \delta^y_\theta) + \sigma\frac{\partial\omega_\theta}{\partial y_{\theta\sigma}}(\delta^x_{\sigma\theta} - \delta^y_{\theta\sigma})\right)\right| \ge$$

$$\ge a_2\|p\|_\theta^{-\chi}\varepsilon^\beta - c_5\|p\|_\theta\varepsilon^{1-2\alpha},$$

де $c_5 = a_1(1+\sigma)(c_3 + c_6)$, $c_6 = a_1c_3c_4\pi$.

Нехай $\chi = -1$. Тоді оцінка (8) виконується для всіх $p \in P$, якщо

$$\varepsilon_0 \le \varepsilon_3 = \left(\frac{a_2}{2c_5}\right)^{1/(1-2\alpha-\beta)}.$$

При $\chi > -1$ оцінка справджується для будь-якого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_4]$, $\varepsilon_4 = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, якщо $\|p\|_\theta \le N_1 = \left(\dfrac{a_2}{2c_5}\right)^{1/(\alpha+1)}\varepsilon^{(2\alpha+\beta-1)/(\chi+1)}$.

Із (8) випливає, що для будь-яких $s_0 \in [t, t+\tau]$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_4]$, $p \in P_{N_1}$ при $\chi > -1$ і $p \in P$ при $\chi > -1$, виконується одна з оцінок

$$\left|\gamma_p(s_0, g(s_0, \varepsilon))\right| \ge \frac{1}{4}a_2\|p\|_\theta^{-\chi}\varepsilon^\beta \tag{9_1}$$

або

$$\left|\frac{d}{d\tau}\gamma_p(s_0, g(s_0, \varepsilon))\right| \ge \frac{1}{4}a_2\|p\|_\theta^{-\chi}\varepsilon^\beta. \tag{9_2}$$

Якщо виконується нерівність (9_1), то на проміжку $[s_0, \tau]$, довжина якого не перевищує $\delta_p = c_7^{-1}\|p\|_\theta^{-\chi-1}\varepsilon^\beta$, $c_7 = 16a_1 n(1 + m(a_1 + c_2 + c_3)(1+\sigma))a_2^{-1}$,

$$\left|\gamma_p(s, g(s, \varepsilon))\right| \geq \frac{3}{16} a_2\|p\|_\theta^{-\chi}\varepsilon^\beta.$$

Нехай $\varepsilon \leq \varepsilon_5 = \min(\varepsilon_4, c_8^{1/(1-\alpha-\beta)})$, $c_8 = a_2(32a_1c_2m)^{-1}$ при $\chi = -1$ і $N_2 = \min\left(N_1, E(c_8^{1/(\chi+1)}\varepsilon^{(\alpha+\beta-1)/(\chi+1)})\right)$ при $\chi > -1$. Тоді, враховуючи умову 1^0, (5) і (6), одержуємо оцінку

$$\left|\gamma_p(s, u(s, \varepsilon))\right| \geq \frac{1}{8} a_2\|p\|_\theta^{-\chi}\varepsilon^\beta, \tag{10}$$

яка справджується на $[s_0, s_0 + \delta_p]$ для всіх $p \in P_{N_2}$ при $\chi > -1$.

Якщо ж нерівність (9_1) не виконується, то на проміжку $[s_0, \xi_p]$, $\xi_p - s_0 \leq \delta_p$, з неперервності функції $\dfrac{d}{ds}\gamma_p(\tau, g(\tau, \varepsilon))$ випливає

$$\left|\gamma_p(s, g(s, \varepsilon))\right| \geq \frac{a_2}{8}\|p\|_\theta^{-\chi}\varepsilon^\beta. \tag{11}$$

Нехай s_0^* — точка мінімуму функції $\left\|\gamma_p(s, g(s, \varepsilon))\right\|$ на $[s_0, \xi_p]$. Як і в [3], для $s \in [s_0, s_0 + \varepsilon^\eta] \cup [\xi_p - \varepsilon^\eta, \xi_p]$ і деякого $\eta \in (0, 1-\alpha-\beta)$ одержуємо

$$\left|\gamma_p(s, u(s, \varepsilon))\right| \geq \frac{a_2}{16}\|p\|_\theta^{-\chi}\varepsilon^{\beta+\eta}. \tag{12}$$

Нерівність справджується для

$$\varepsilon \leq \varepsilon_6 = \min(\varepsilon_4, c_8^{1/(1-\alpha-\beta-\eta)})$$

при $\chi = -1$ і для $\|p\|_\theta \leq N = \min\left(N_2, E(c_8^{1/(\chi+1)}\varepsilon^{(\alpha+\beta+\eta-1)/(\chi+1)})\right)$ при $\chi > -1$.

Позначимо через $f(s, \varepsilon)$ підінтегральну функцію в інтегралі $I_p(\tau, t, \bar{t}, \varepsilon)$, який запишемо у вигляді

$$I_p(\tau, t, \bar{t}, \varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{q_p-1}\int_{t_\nu}^{t_\nu+\delta_p} f(s, \varepsilon)\,ds + \int_{t+q_p\delta_p}^{t+\tau} f(s, \varepsilon)\,ds,$$

де q_p — ціла частина числа L/δ_p. Якщо в точці t_ν виконується оцінка (9_1), то, інтегруючи частинами, маємо

$$\left\|\int_{t_\nu}^{t_\nu+\delta_p} f(s, \varepsilon)\,ds\right\| \leq \varepsilon^{1-2\beta}\left\{\left(\frac{8}{a_2}\|p\|_\theta^\chi\varepsilon^\beta + \frac{64}{a_2}c_9\|p\|_\theta^{2\chi}\delta_p\right)\sup_{G_t}\|f\| + \right.$$

$$\left. + \frac{8}{a_2}\delta_p\varepsilon^\beta\|p\|_\theta^\chi\sup_{G_t}\left\|\frac{df}{d\tau}\right\|\right\}, \tag{13}$$

де $c_9 = a_1(1 + 2a_1(1+\lambda))$. Якщо ж у точці t_ν виконується (9_2), то на проміжку $[s_0^* - \varepsilon^\eta, s_0^* + \varepsilon^\eta] \cap [s_0, \xi_p]$ інтеграл оцінимо величиною $2\varepsilon^\eta\sup_{G_t}\|f\|$. На $[s_0, s_0^* - \varepsilon^\eta] \cup [s_0^* + \varepsilon^\eta, \xi_p]$ оцінка аналогічна (13), але з урахуванням монотонності функції $\gamma_p(s, u(s, \varepsilon))$. Одержуємо

$$\left\| \int\limits_{t_\nu}^{\xi_\nu} f(s,\varepsilon)\,ds \right\| \le \left(2\varepsilon^{\eta} + \frac{64}{a_2}\|p\|_\theta^\chi \varepsilon^{1-\beta-\eta}\right)\sup_{G_t}\|f\| +$$

$$+ \frac{16}{a_2}\|p\|^\chi \varepsilon^{1-\alpha-\beta}\sup_{G_t}\left\|\frac{df}{d\tau}\right\|. \qquad (14)$$

На $[\alpha_\nu, t+(\nu+1)\delta_p]$ оцінка набирає вигляду (13), оскільки виконується одна з оцінок (9) і, згідно з вибором ξ_ν,

$$\left|\gamma_p(\xi_\nu, g(\xi_\nu,\varepsilon))\right| \ge \frac{1}{4}a_2\|p\|_\theta^{-\chi}\varepsilon^{\beta}.$$

Тоді з (13), (14) випливає

$$\left\|I_p(\tau,0,0,\varepsilon)\right\| \le \frac{2L}{a_2}\|p\|_\theta^{\chi+1}\varepsilon^{1-2\beta-\eta}\big(4(a_2c_7+2c_2)\varepsilon^{\eta} + 8a_2c_7\|p\|_\theta^\chi +$$

$$+ a_2c_7\varepsilon^{\beta+2\eta-1}\big)\sup_{G_t}\|f\| + \left[\frac{8L}{a_2}\|p\|_\theta^\chi\varepsilon^{1-2\beta-\eta}(\varepsilon^\eta+2)\right]\sup_{G_t}\left\|\frac{df}{d\tau}\right\|.$$

Нехай $c_{10} = 8La_2^{-2}\max\big(1, c_2(1+2a_2)+2c_7\big)$, $\varepsilon^* = \min(\varepsilon_5, \varepsilon_6)$. Якщо вибрати $\eta = (1-\beta)/2$, то всі степені параметра ε будуть невід'ємними і найменший серед них дорівнює $(1-3\beta)/2$ при $\beta \in [0, 1/3)$.

Таким чином, одержуємо оцінку з теореми 1.

Теорему доведено.

4. Обґрунтування методу усереднення для системи (1). Оцінка похибки методу усереднення для повільних змінних систем (1) і (2) випливає з оцінки інтеграла $I_p(t,0,0,\varepsilon)$. Справді,

$$\|x(\tau,\bar y,\bar\psi,\varepsilon) - \bar x(s,\bar y)\| \le \varepsilon a_1 L + a_1\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\int\limits_0^\tau \|x(s,\bar y,\bar\psi,\varepsilon) - \bar x(\tau,\bar y)\|ds +$$

$$+ \sum_{p\in P}\sup\left\|\int\limits_0^\tau f_p(s,\varepsilon)\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_0^s \gamma_p(s_1, u(s_1,\varepsilon))\,ds_1\right\}\right\|ds + L\left\|R_N(s,x,x_\lambda,\varphi,\varphi_\theta)\right\|, \quad (15)$$

де

$$f_p(s,\varepsilon) = A_p(s, x(s,\varepsilon), x_\lambda(s,\varepsilon))\exp\left\{-\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_0^s \gamma_p(s_1,u(s_1,\varepsilon))\,ds_1 + i(p,\varphi)\right\},$$

$R_N \equiv 0$ для $\chi = -1$ і $R_N = \sum_{\|p\|>N} A_p(\tau,x,x_\lambda)\exp[i(p,\upsilon)]$ для $\chi > -1$.

Нехай $c_{11} = 0{,}5\min\left(c_8^{1/(\chi+1)}, \left(\frac{a_2}{2c_5}\right)^{1/(\chi+1)}\right)$. Тоді згідно з вибором N в доведенні теореми 1 та умовами на α, β і κ в 1^0 маємо

$$N > c_{10}\varepsilon^{\frac{2\alpha+\beta-1}{2(\chi+1)}}, \qquad \varepsilon \in (0, \bar\varepsilon_1], \qquad \bar\varepsilon_1 \le c_{11}\varepsilon^{\frac{2(\chi+1)}{2\alpha+\beta-1}}.$$

Для R_N одержуємо оцінку [12]

$$\|R_N\| \le 2^{2m}(2m)^{l_1}a_1(l_1-2m)^{-1}N^{2m-l_1} \le c_{12}\varepsilon^{\frac{(l_1-2m)(1-2\alpha-\beta)}{2(\chi+1)}},$$

де $c_{12} = 2^{2m}(2m)^{l_1}a_1c_{11}\varepsilon^{2m-l_1}(l_1-2m)^{-1}$.

На підставі теореми 1

$$\left\| I_p(t, 0, 0, \varepsilon) \right\| \le c_{10}\varepsilon^{(1-3\beta)/2} \sum_{p\in P} \left[\| p \|_\theta^{\chi+1} \left(1 + a_1 + \| p \|_\theta^{\chi}\right) \sup_{G_1} \left\| A_p \right\| + \right.$$

$$\left. + \| p \|_\theta^{\chi} \left(\sup_{G_1} \left\| \frac{\partial A_p}{\partial \tau} \right\| + 2a_1 \left(\sup_{G_1} \left\| \frac{\partial A_p}{\partial x} \right\| + \lambda \sup_{G_1} \left\| \frac{\partial A_p}{\partial x_\lambda} \right\| \right) \right) \right] \le c_{12}\varepsilon^{(1-3\beta)/2},$$

$c_{13} = \mathrm{const}$, $G_1 = [0, L] \times D \times D$.

Застосовуючи лему Гронуолла до нерівності (15), маємо

$$\| x(\tau, \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon) - \bar{x}(\tau, \bar{y}) \| \le \Big(\varepsilon a_1 L + c_{12} L \varepsilon^{\frac{(l_1 - 2m)(1-2\alpha-\beta)}{2(\chi+1)}} +$$

$$+ c_{13}\varepsilon^{(1-3\beta)/2} \Big) \exp\left(a_1(1 + \lambda^{-1})L\right) \le c_1 \varepsilon^{(1-3\beta)/2},$$

де $c_1 = \left((a_1 + c_{12})L + c_{13}\right)\exp\left(a_1(1 + \lambda^{-1})L\right)$. Якщо $\varepsilon^* \le \min\left(\bar{\varepsilon}_1, \left(\frac{\rho}{c_1}\right)^{2/(1-3\beta)}\right)$, то шукана оцінка (3) виконується для всіх $(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon^*]$.

Отже, доведено наступну теорему.

Теорема 2. *Нехай існує розв'язок* $\bar{x} = \bar{x}(\tau, \bar{y})$ *усередненої задачі* (2) *і* $\bar{x}(\tau, \bar{y}) \in D_\rho$ *при* $\tau \in [0, L]$ *та виконуються умови* 1^0 *і* 3^0. *Тоді для всіх* $\tau \in [0, L]$ *і* $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ *існує розв'язок* $\left(x(\tau, \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon), \varphi(\tau, \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon)\right)$ *системи* (1) *і справджується оцінка* (3).

5. Крайова задача. Функціонально-диференціальні рівняння з крайовими умовами досліджувались, наприклад, у роботах [13, 14]. Розглянемо багаточастотну крайову задачу вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= A(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta, \varepsilon), \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{\omega(\tau, x, x_\sigma)}{\varepsilon} + Y(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta, \varepsilon), \end{aligned} \tag{16}$$

$$F\left(x|_{\tau=\tau_0}, \ldots, x|_{\tau=\tau_N}, \varepsilon\right) + \int_0^L \Phi(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta, \varepsilon)\, d\tau = 0, \qquad \varphi|_{\tau=0} = \psi, \tag{17}$$

де $F(x_0, \ldots, x_N, \varepsilon)$ і $\Phi(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta, \varepsilon)$ — n-вимірні вектор-функції, визначені відповідно в $D^{N+1} \times (0, \varepsilon_0]$ і G, функція Φ є 2π-періодичною за змінними φ_ν, $\varphi_{\theta\nu}$; $0 \le \tau_0 < \ldots < \tau_N \le L$, $\psi \in R^m$.

Відповідна (16), (17) усереднена система набирає вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{d\tau} &= A_0(\tau, \bar{x}, \bar{x}_\lambda, \varepsilon), \\ \frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} &= \frac{\omega(\tau, \bar{x}, \bar{x}_\sigma)}{\varepsilon} + Y_0(\tau, \bar{x}, \bar{x}_\lambda, \varepsilon), \end{aligned} \tag{18}$$

$$F\left(\bar{x}|_{\tau=\tau_0}, \ldots, \bar{x}|_{\tau=\tau_N}, \varepsilon\right) + \int_0^L \Phi_0(\tau, \bar{x}, \bar{x}_\lambda, \varepsilon)\, d\tau = 0, \qquad \bar{\varphi}|_{\tau=0} = \psi. \tag{19}$$

Методом усереднення багаточастотні системи без запізнення з інтегральними крайовими умовами досліджувались в [3, 15], а системи вигляду (16) із вектором частот $\omega(\tau)$ — в [16, 17].

Позначимо через $Q_1(\varepsilon)$ матрицю

$$\sum_{\nu=0}^{N} \frac{\partial F}{\partial \bar{x}_\nu}(\bar{x}(\tau_0, \bar{y}, \varepsilon), \ldots, \bar{x}(\tau_N, \bar{y}, \varepsilon), \varepsilon) \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{y}}(\tau_\nu, \bar{y}, \varepsilon) +$$

$$+ \int_0^L \left[\frac{\partial \Phi_0}{\partial x}(\tau, \bar{x}(\tau, \bar{y}, \varepsilon), \bar{x}_\lambda(\tau, \bar{y}, \varepsilon), \varepsilon) \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{y}}(\tau, \bar{y}, \varepsilon) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_\lambda}(\tau, \bar{x}(\tau, \bar{y}, \varepsilon), \bar{x}_\lambda(\tau, \bar{y}, \varepsilon), \varepsilon) \frac{\partial x_\lambda}{\partial \bar{y}}(\tau, \bar{y}, \varepsilon) \right] d\tau.$$

Теорема 3. *Нехай*:

1) *для будь-якого* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *вектор-функції* A, X *і* Φ *задовольняють умову* 1^0, $F \in C_a^2(D^{N+1} \times (0, \varepsilon_0], a_3)$, $a = (x_0, \ldots, x_N)$, $\Phi \in C_b^2(C, a_3)$, $b = (\tau, x, x_\lambda)$;

2) *існує розв'язок усередненої крайової задачі* (18), (19) *і* $\bar{x}(\tau, \bar{y}, \varepsilon) \in D_\rho$ *для всіх* $(\tau, \varepsilon) \in D \times (0, \varepsilon_0]$;

3) *виконується умова* 3^0 *в* ρ*-околі траєкторії* $\bar{z}(\tau, \bar{y}(\varepsilon); [0, L])$ *для всіх* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$;

4) $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0] \det Q_1(\varepsilon) \neq 0$ *і*

$$\left\| Q_1^{-1}(\varepsilon) \right\| \le a_4 \varepsilon^{-\chi_1}, \qquad 0 \le \chi_1 < \frac{1 - 3\beta}{4}.$$

Тоді можна вказати $\bar{\varepsilon} \in (0, \varepsilon_0]$, *сталі* $c_{14} > 0$ *і* $c_{15} > 0$ *такі, що для будь-якого* $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$ *існує розв'язок крайової задачі* (16), (17) *і виконується нерівність*

$$\| x(\tau, \bar{y} + \mu, \psi, \varepsilon) - \bar{x}(\tau, \bar{y}, \varepsilon) \| \le c_{14} \varepsilon^{\alpha_1}, \tag{20}$$

де $\|\mu\| \le c_{15} \varepsilon^{\alpha_1}$, $\alpha_1 = \alpha_0 - \chi_1$, $\alpha_0 = (1 - 3\beta)/2$.

Доведення. Нехай $\rho_1 = \rho/2$, $\mu \in R^n$ і $\|\mu\| \le \rho_1 c_{16}$, де $c_{16} = \exp[-a_1 n(1 + \lambda^{-1})L]$. Тоді для компоненти розв'язку $\bar{x} = \bar{x}(\tau, \bar{y}, \varepsilon)$ крайової задачі (18), (19) виконується нерівність $\| x(\tau, \bar{y} + \mu, \varepsilon) - \bar{x}(\tau, \bar{y}, \varepsilon) \| \le \rho_1$.

Згідно з теоремою 2, якщо $\varepsilon \le \bar{\varepsilon}_1 = \min\left(\varepsilon^*, \left(\frac{\rho}{2c_1}\right)^{1/\alpha_0}\right)$, то існує розв'язок системи (16) на $[0, L]$ і

$$\| x(\tau, \bar{y} + \mu, \psi, \varepsilon) - \bar{x}(\tau, \bar{y} + \mu, \varepsilon) \| \le c_1 \varepsilon^\alpha.$$

Отже, для $(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_0]$

$$\| x(\tau, \bar{y} + \mu, \psi, \varepsilon) - \bar{x}(\tau, \bar{y}) \| \le c_1 \varepsilon^\alpha + c_{16} \|\mu\|. \tag{21}$$

Покажемо, що існує таке μ, для якого розв'язок $x = x(\tau, \bar{y} + \mu, \psi, \varepsilon)$ задовольняє умову (17). Із (17) і (19) маємо

$$F(x|_{\tau=\tau_0}, \ldots, x|_{\tau=\tau_N}, \varepsilon) - F(\bar{x}|_{\tau=\tau_0}, \ldots, \bar{x}|_{\tau=\tau_N}, \varepsilon) + \int_0^L [(\Phi_0(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta, \varepsilon) -$$

$$- \Phi_0(\tau, \tilde{x}, \tilde{x}_\nu, \varepsilon)) + (\Phi_0(\tau, \tilde{x}, \tilde{x}_\lambda, \varepsilon) - \Phi_0(\tau, \bar{x}, \bar{x}_\lambda, \varepsilon))] d\tau = 0,$$

де $\tilde{x} = \bar{x}(\tau, \bar{y} + \mu, \varepsilon)$. Після перетворень одержимо $\mu = M_1(\mu, \varepsilon)$, де

$$M_1(\mu, \varepsilon) = -Q_1^{-1}(\varepsilon)\left[\int_0^L (\Phi_0(\tau, x, x_\lambda, \varepsilon) - \Phi_0(\tau, \tilde{x}, \tilde{x}_\lambda, \varepsilon)) + \right.$$

$$\left. + \sum_{p\neq 0} \int_0^L \Phi_p(\tau, x, x_\lambda, \varepsilon) e^{i(p,v)} d\tau + P_1(\mu, \varepsilon)\right]. \tag{22}$$

На підставі умов 1 і 2 теореми 3 та оцінки (3) для $P_1(\mu, \varepsilon)$ маємо

$$\| P_1(\mu, \varepsilon)\| \leq c_{17}\varepsilon^{2\alpha} + c_{18}\varepsilon^{\alpha}\|\mu\| + c_{19}\|\mu\|^2, \tag{23}$$

де c_{17}, c_{18} і c_{19} — деякі сталі.

Скориставшись теоремою 1 і диференційовністю вектор-функції Φ за змінними v, одержимо оцінку

$$\sum_{p\neq 0} \left\| \int_0^\tau \Phi_p(\tau, x, x_\lambda) e^{i(p,v)} d\tau \right\| \leq c_{20}\varepsilon^{\alpha}. \tag{24}$$

Нехай $c_{15} = 2a_4(c_{20} + 2a_1 c_1 nL)$, $\|\mu\| \leq c_{15}\varepsilon^{\alpha_1}$ і

$$\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}_2 = \min\left(\bar{\varepsilon}_1, \left(\frac{c_{15}}{6a_4 c_{17}}\right)^{1/\alpha_0}, \left(\frac{\rho}{2c_{15}c_{16}}\right)^{1/\alpha_1}, (6a_4 c_{18})^{-1/\alpha_1}, (6a_4 c_{19})^{-1/\alpha_1} \right).$$

Тоді із (22) на підставі (23), (24) маємо

$$\| M_1(\mu, \varepsilon)\| \leq c_{15}\varepsilon^{\alpha_1}.$$

Таким чином,

$$M_1 : S_1 \to S_1 = \left\{ \mu : \|\mu\| \leq c_{15}\varepsilon^{\alpha - \chi_1}, \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}_2] \right\}.$$

Згідно з теоремою Брауера [18] існує хоча б одна нерухома точка $\mu \in S_1$ відображення M_1. Отже, крайова задача (16), (17) має розв'язок і з нерівності (21) випливає оцінка

$$\| x(\tau, \bar{y} + \mu, \psi, \varepsilon) - \bar{x}(\tau, \bar{y})\| \leq c_1\varepsilon^{\alpha_0} + c_{15}c_{16}\varepsilon^{\alpha_1} \leq$$

$$\leq (c_1\varepsilon^{\chi_1} + c_{15}c_{16})\varepsilon^{\alpha_1} \leq c_{14}\varepsilon^{\alpha_1}, \qquad c_{14} = c_1 + c_{15}c_{16}.$$

Якщо $\varepsilon < \bar{\varepsilon} = \min\left(\bar{\varepsilon}_2, \left(\frac{\rho}{c_{14}}\right)^{1/\alpha_1} \right)$, то оцінка (20) справджується для всіх $\tau \in$ $\in [0, L]$.

Теорему доведено.

Для системи (16) розглянемо ще такі багатоточкові умови:

$$x|_{\tau=0} = y, \qquad \sum_{\nu=0}^{N} (B_\nu(x, \varepsilon)\varphi)|_{\tau=\tau_\nu} = f(x|_{\tau=\tau_0}, \ldots, x|_{\tau=\tau_N}, \varepsilon), \tag{25}$$

де B_ν — квадратні матриці порядку m, $f(z_0, z_1, \ldots, z_N, \varepsilon)$ — m-вимірна вектор-функція.

Теорема 4. *Нехай*:

1) *для будь-якого* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *вектор-функції* ω, A *і* Y *задовольняють умову* 1^0;

2) *матричні функції* $B_\nu(x, \varepsilon)$ *визначені в* $D \times (0, \varepsilon_0]$ *і задовольняють умову Гельдера по* x *рівномірно щодо* ε *із показником* q_1 *і коефіцієнтом* γ_1;

3) *існує розв'язок усередненої крайової задачі,* $\bar{x}(\tau, y, \varepsilon) \in D_\rho$ *для* $(\tau, \varepsilon) \in \in [0, L] \times (0, \varepsilon_0]$ *і виконується умова* 3^0 *теореми* 3;

4) $\det Q_2(\varepsilon) := \det \sum_{\nu=0}^{N} B_\nu(\bar{x}(\tau_\nu, y, \varepsilon), \varepsilon) \neq 0, \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0],$

$$\left\| Q_2^{-1}(\varepsilon) \right\| \le a_4 \varepsilon^{-\chi_2}, \qquad \chi_2 < \alpha_0 q_1;$$

5) *функція* $f(z_0, z_1, \ldots, z_N, \varepsilon)$ *визначена і неперервна по* z_ν *в* $D^{N+1} \times \times (0, \varepsilon_0]$.

Тоді для будь-якого $\varepsilon \in (0, \bar{\bar{\varepsilon}}_0]$ *існує розв'язок задачі* (16), (25) *і для повільних змінних виконується оцінка* (3).

Доведення. Із умов 1 і 2 за теоремою 2 випливає існування умови 1^0, умови 3^0 і 3 гарантують існування розв'язку системи (16) при $\tau \in [0, L]$ з початковими умовами $y \in D_1 \subset D$ і $\varphi \in R^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$. Для знаходження ψ із умов (25) одержуємо

$$\psi = Q_2^{-1}(\varepsilon) \Bigg[f(x|_{\tau=\tau_0}, \ldots, x|_{\tau=\tau_N}, \varepsilon) + \sum_{\nu=0}^{N} \left(B_\nu(\bar{x}|_{\tau=\tau_\nu}, \varepsilon) - B_\nu(x|_{\tau=\tau_N}, \varepsilon) \right)\psi - \sum_{\nu=0}^{N} \int_0^{\tau_\nu} \left(\frac{\omega(\tau, x, x_\sigma)}{\varepsilon} + Y(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta, \varepsilon) \right) \Bigg] d\tau := M_2(\psi, \varepsilon).$$

Нехай

$$\varepsilon \le \bar{\bar{\varepsilon}}_0 = \min\left(\varepsilon^*, \left(\frac{\rho}{2c_1} \right)^{1/\alpha_0}, (2c_{21})^{1/(\chi_2 - \alpha_0 q_1)} \right), \qquad c_{21} = a_4 \gamma_2 c_1^{\alpha_0 q_1}.$$

На підставі умов 2, 4 і 5 теореми 4 та теореми 3 знаходимо таку оцінку:

$$\| M_2(\psi, \varepsilon) \| \le c_{21} \varepsilon^{\alpha_0 q_1 - \chi_2} \| \psi \| + a_4 \varepsilon^{-\chi_2} \left\| f(x|_{\tau=\tau_0}, \ldots, x|_{\tau=\tau_N}, \varepsilon) \right\| + a_1(1 + \varepsilon^{-1}) \left(\sum_{\nu=0}^{N} \tau_\nu \left\| B_\nu(x|_{\tau=\tau_\nu}, \varepsilon) \right\| \right).$$

Із оцінки (3), неперервності функції f і вибору $\bar{\bar{\varepsilon}}_2$ випливає існування функції $d(\varepsilon)$ такої, що

$$\| M_2(\psi, \varepsilon) \| \le \frac{\| \psi \|}{2} + d(\varepsilon), \qquad \varepsilon \in (0, \bar{\bar{\varepsilon}}_0].$$

Нехай $\| \psi \| \le 2d(\varepsilon)$, тоді

$$\| M_2(\psi, \varepsilon) \| \le 2d(\varepsilon), \qquad \varepsilon \in (0, \bar{\bar{\varepsilon}}_0]. \tag{26}$$

Із неперервності $M_2(\psi, \varepsilon)$ по ψ для кожного $\varepsilon \in (0, \bar{\bar{\varepsilon}}_0]$ і нерівності (26) випливає існування розв'язку ψ, а отже, й розв'язку задачі (16), (25).

Теорему доведено.

1. *Гребеников Е. А., Митропольский Ю. А., Рябов Ю. А.* Введение в резонансную аналитическую динамику. – М.: Янус-К, 1999. – 320 с.
2. *Хапаев М. М.* Усреднение в теории устойчивости. – М.: Наука, 1986. – 192 с.

3. *Самойленко А. М., Петришин Р. І.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. – Київ: Наук. думка, 2004. – 474 с.
4. *Самойленко А. М.* К вопросу обоснования метода усреднения для многочастотных колебательных систем // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 2. – С. 267 – 278.
5. *Арнольд В. И.* Условия применимости и оценка погрешности метода усреднения для систем, которые в процессе эволюции проходят через резонансы // Докл. АН СССР. – 1965. – **161**, № 1. – С. 9 – 12.
6. *Нейштадт А. И.* Об усреднении в многочастотных системах // Там же. – 1976. – **226**, № 6. – С. 1295 – 1298.
7. *Петришин П. І.* Дослідження розв'язків багаточастотних систем за допомогою методу усереднення // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1993. – **2**. – С. 189 – 202.
8. *Бигун Я. И., Самойленко А. М.* Обоснование принципа усреднения для многочастотных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения. – 1999. – **35**, № 1. – С. 8 – 14.
9. *Бігун Я. Й.* Дослідження багаточастотних коливних систем із запізненням // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. пр. Математика. – Чернівці: Рута, 2002. – Вип. 150. – С. 15 – 20.
10. *Бігун Я. Й.* Метод усереднення в багаточастотній системі з необмеженим запізненням // Конструктивні методи дослідження диференціальних рівнянь. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1993. – С. 4 – 15.
11. *Бігун Я. Й.* Обгрунтування методу усереднення для нелінійних резонансних систем із запізненням // Нелінійні коливання. – 1999. – **2**, № 2. – С. 162 – 169.
12. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1969. – 244 с.
13. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 280 с.
14. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 320 с.
15. *Петришин П. І., Петришин Я. Р.* Усереднення крайових задач для систем диференціальних рівнянь з повільними та швидкими змінними // Нелінійні коливання. – 1998. – № 1. – С. 51 – 65.
16. *Бігун Я. Й.* Усереднення коливних систем із запізненням та інтегральними крайовими умовами // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 2. – С. 257 – 263.
17. *Бігун Я. Й.* Усереднення в багаточастотних системах із лінійно перетвореним аргументом та інтегральними крайовими умовами // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. пр. Математика. – Чернівці: Рута, 2005. – Вип. 269. – С. 5 – 10.
18. *Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О.* Диференціальні рівняння. – Київ: Либідь, 2003. – 600 с.

Одержано 05.04.2006