УДК 517.982.26

Н. В. Зорий (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

РАВНОВЕСНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ С ВНЕШНИМИ ПОЛЯМИ

We investigate the Gauss variational problem over certain rather general classes of Radon measures on a locally compact space $\mathbf{X}$. We describe potentials of minimizing measures, establish their characteristic properties, and prove the continuity of extremals. We formulate extremal problems dual to the initial one. The results obtained · new even in the case of classical kernels in an Euclidean space $\mathbb{R}^n$.

Досліджується варіаційна задача Гаусса над досить загальними класами мір Радона у локально компактному просторі $\mathbf{X}$. Отримано опис потенціалів мінімізуючих мір, виділено їх характеристичні властивості, доведено неперервність екстремалей. Знайдено постановки екстремальних задач, дуальних до початкової. Отримані результати є новими навіть у випадку класичних ядер та евклідового простору $\mathbb{R}^n$.

Введение. В настоящей работе продолжается исследование вариационной задачи Гаусса в локально компактном (отделимом) пространстве $\mathbf{X}$ [1, 2] (см. также [3, 4] и библиографию в [3]). Используемые при этом понятия и результаты из теории мер и интегрирования содержатся в [5, 6] (см. также краткие обзоры в [7, 8]).

Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathbf{X})$ — линейное пространство всех вещественнозначных мер Радона ν на $\mathbf{X}$, снабженное топологией *широкой* сходимости [5]; в дальнейшем вещественнозначную меру Радона будем называть просто *мерой.*

Ядро κ на $\mathbf{X}$ определяется как полунепрерывная снизу функция $\kappa: \mathbf{X}\times\mathbf{X} \to (-\infty, \infty]$. Следуя [7], предполагаем, что либо пространство $\mathbf{X}$ компактно, либо ядро κ неотрицательно.

Энергия и *потенциал* меры ν относительно ядра κ определяются соответственно равенствами (см. [7])

$$\kappa(\nu, \nu) := \int \kappa(x, y)\, d(\nu\otimes\nu)(x, y)$$

и

$$\kappa(x, \nu) := \int \kappa(x, y)\, d\nu(y), \qquad x \in \mathbf{X}$$

(конечно, если соответствующий интеграл определен как конечное число или $\pm\infty$). Обозначим через $\mathcal{E} = \mathcal{E}_\kappa(\mathbf{X})$ множество всех мер ν с $-\infty < \kappa(\nu, \nu) < \infty$.

Пусть f — вещественнозначная функция с областью определения в $\mathbf{X}$. Для каждого $\nu \in \mathcal{E}$ обозначим

$$\mathcal{F}_f(\nu) := \kappa(\nu, \nu) - 2\int f\, d\nu, \tag{1}$$

если только $\int f\, d\nu$ определен. Задача минимизации функционала $\mathcal{F}_f(\nu)$, где ν пробегает заданное подмножество из $\mathcal{E}$, называется (*вариационной*) *задачей Гаусса* [1, 3].

В настоящей работе задача Гаусса рассматривается над весьма общими (вообще говоря, некомпактными) классами знакопеременных мер в $\mathbf{X}$. Внимание акцентируется на исследовании свойств экстремалей (в частности, на доказательстве их устойчивости при изменении начальных условий) и нахождении вариационных задач, дуальных к исходной.

1. Предварительные результаты. Пусть для заданного множества $Q \subset \mathbf{X}$ $\mathfrak{M}^+(Q)$ обозначает класс всех неотрицательных мер, сосредоточенных на Q. Обозначим $\mathcal{E}^+(Q) := \mathcal{E} \cap \mathfrak{M}^+(Q)$.

Следуя [6] (п. 4.7.3), множество в $\mathbf{X}$ будем называть ν-σ-*конечным* (где $\nu \in \mathfrak{M}$ — заданная мера), если оно содержится в счетном объединении ν-интегрируемых множеств.

Для корректной постановки задачи в необходимой общности нам понадобятся следующие элементарные утверждения, относящиеся к теории мер и интегрирования. В каждом из них $\xi \in \mathfrak{M}^+(Q)$ — заданная мера, Q — ξ-σ-конечное множество, $\upsilon : \mathbf{X} \to [-\infty, \infty]$ — ξ-измеримая функция.

Лемма 1. *Дополнительно к указанным выше условиям предположим, что* $\int \upsilon d\xi$ *определен. Тогда*

$$\int \upsilon d\xi = \lim_{K \uparrow Q} \int \upsilon d\xi_K,$$

где ξ_K *обозначает сужение* ξ *на* K, *а* K *пробегает упорядоченное по включению семейство всех компактных подмножеств из* Q.

Доказательство. Из условия $\xi \in \mathfrak{M}^+(Q)$ и ξ-σ-конечности Q находим, что множество $\mathbf{X} \setminus Q$ ξ-пренебрежимо. Поэтому, не ограничивая общности, можно полагать $\upsilon \equiv 0$ на $\mathbf{X} \setminus Q$. Кроме того, вследствие ξ-пренебрежимости множества $\mathbf{X} \setminus Q$ семейство всех компактных подмножеств из Q ξ-плотно в $\mathbf{X}$ (см. [5], гл. V, § 1, п. 2). Применяя к функциям $\max\{\upsilon, 0\}$ и $\max\{-\upsilon, 0\}$ предложения 1 и 3 из [5] (гл. V, § 2, п. 1), относящиеся к концепции существенного верхнего интеграла, получаем лемму 1.

Применяя лемму 1 к $\upsilon = \varphi_E$, где φ_E — характеристическая функция произвольного ξ-измеримого множества $E \subset \mathbf{X}$, получаем следующее утверждение.

***Следствие* 1.** *В указанных условиях понятия ξ-пренебрежимости и локальной ξ-пренебрежимости эквивалентны.*

Говорят, что некоторое утверждение $R(x)$, содержащее переменную точку $x \in \mathbf{X}$, справедливо *приблизительно всюду* (пр. вс.) в Q, если множество всех тех $x \in Q$, для которых $R(x)$ ложно, имеет нулевую внутреннюю емкость (см., например, [7]).

Лемма 2. *Если дополнительно к указанным выше условиям выполняется* $\xi \in \mathcal{E}^+(Q)$ *и* $\upsilon \ge q$ *пр. вс. в* Q, *где* $q \in [-\infty, \infty]$, *то* $\upsilon \ge q$ *ξ-почти всюду.*

Доказательство. Действительно, ввиду следствия 1 достаточно доказать локальную ξ-пренебрежимость множества всех $x \in Q$ с $\upsilon(x) < q$. А это очевидно в силу леммы 2.3.1 из [7].

Следующее утверждение является непосредственным следствием леммы 2 и того факта, что функция, равная ξ-почти всюду ξ-измеримой функции, ξ-измерима.

***Следствие* 2.** *Пусть дополнительно к указанным выше условиям* $\xi \in \mathcal{E}^+(Q)$, *а* υ' — *функция, определенная и равная* υ *пр. вс. в* Q. *Тогда*

$$\int \upsilon' d\xi = \int \upsilon d\xi. \tag{2}$$

Равенство (2) понимается, очевидно, в смысле, что если определена одна из его частей, то определена и другая и они равны между собой.

2. Постановка задачи. Зафиксировав $m, p \in \mathbb{N}$ такие, что $m \le p$, обозначим

$$I := \{1, \ldots, p\}, \qquad I^+ := \{1, \ldots, m\}, \qquad I^- := I \setminus I^+,$$

$$\alpha_i := \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i \in I^+; \\ -1, & \text{если} \quad i \in I^-. \end{cases}$$

Пусть $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ — упорядоченная совокупность непустых множеств $A_i \subset \mathbf{X}$, $i \in I$, удовлетворяющих условию

$$\overline{A_i} \cap \overline{A_j} = \varnothing \quad \forall\, i \in I^+, \quad j \in I^-.$$

Обозначим через $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ подмножество из $\mathfrak{M}(\mathbf{X})$, состоящее из всех *линейных комбинаций* вида $\mu = \sum_{i \in I} \alpha_i \mu^i$, где $\mu^i \in \mathfrak{M}^+(A_i)$ для всех $i \in I$. Два элемента из $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$,

$$\mu_1 = \sum_{i \in I} \alpha_i \mu_1^i \quad \text{и} \quad \mu_2 = \sum_{i \in I} \alpha_i \mu_2^i,$$

будем считать *тождественными* $(\mu_1 \equiv \mu_2)$ в том и только в том случае, когда

$$\mu_1^i = \mu_2^i \quad \forall\, i \in I.$$

Очевидно, что при так определенном отношении тождества в $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ следующее соответствие взаимно однозначно:

$$\mathfrak{M}(\mathcal{A}) \ni \mu \;\mapsto\; (\mu^i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathfrak{M}^+(A_i).$$

Замечание 1. Отношение тождества в $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$, вообще говоря, сильнее, чем отношение равенства мер, унаследованное из $\mathfrak{M}(\mathbf{X})$. (Для обозначения последнего сохраним символ $=$.) Эти два бинарных отношения в $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ эквивалентны в том и только в том случае, когда множества A_i, $i \in I$, попарно не пересекаются.

Зафиксировав $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$, обозначим

$$A := \bigcup_{i \in I} A_i, \quad A^+ := \bigcup_{i \in I^+} A_i, \quad A^- := \bigcup_{i \in I^-} A_i.$$

Пусть функция g задана, положительна и непрерывна, по крайней мере, всюду на $\overline{A}$. В настоящей работе предполагаем, что выполняется один из следующих случаев:

Случай I. Множество A содержится в счетном объединении компактов.

Случай II. $g_{\min} := \inf_{x \in A} g(x) > 0$.

Пусть, далее, функция f определена, по крайней мере, пр. вс. в $\overline{A}$ и ν-измерима для всех $\nu \in \mathfrak{M}^+(\overline{A})$. Зафиксировав вектор $a = (a_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^p$ с $a_i > 0$ для всех $i \in I$, для данных $\mathcal{A}$, κ, g и f определим следующие классы мер:

$$\mathcal{E}(\mathcal{A}, a, g) := \left\{ \mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \colon \mu \in \mathcal{E}, \quad \int g\, d\mu^i = a_i \quad \forall\, i \in I \right\},$$

$$\mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a, g) := \left\{ \mu \in \mathcal{E}(\mathcal{A}, a, g) \colon \int f\, d\mu \;\; \text{определен и} \;\; \neq -\infty \right\}.$$

Обозначим

$$\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g) := \inf_{\mu \in \mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a, g)} \mathcal{F}_f(\mu),$$

где $\mathcal{F}_f(\mu)$ определяется соотношением (1). (Как обычно, инфимум над пустым множеством полагаем равным $+\infty$.)

Эти определения корректны в силу следствия 2 и следующей леммы.

Лемма 3. *Множества* A_i, $i \in I$, μ^i-*σ-конечны для каждого* $\mu \in \mathcal{E}(\mathcal{A}, a, g)$.

Доказательство. Действительно, в случае I это утверждение очевидно, а в случае II — вытекает из следующих неравенств:

$$\mu^i(\mathbf{X}) \le a_i g_{\min}^{-1} < \infty \quad \forall \mu \in \mathcal{E}(\mathcal{A}, a, g), \quad i \in I. \tag{3}$$

При условии $-\infty < \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g) < \infty$ имеет смысл вариационная задача Гаусса о *существовании и единственности минимизирующей меры* λ,

$$\lambda \in \mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a, g), \qquad \mathcal{F}_f(\lambda) = \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g),$$

и исследовании свойств экстремалей.

Наряду со своей очевидной электростатической интерпретацией рассматриваемая задача имеет многочисленные приложения к ряду задач теории потенциала и теории аппроксимации (см., например, [3] и приведенную там библиографию).

В случае, когда множества A_i, $i \in I$, компактны, а ядро κ непрерывно на $A^+ \times A^-$, сформулированная задача исследована в [1]. Имея целью в этой и последующих работах исследовать вариационную задачу Гаусса без указанных ограничений, всюду далее будем считать ядро κ *положительно определенным*. Это, напомним, означает, что κ симметрично (т.е. $\kappa(x, y) = \kappa(y, x)$ для всех x, y) и энергия $\kappa(\nu, \nu)$, $\nu \in \mathfrak{M}(\mathbf{X})$, неотрицательна, если только определена. Тогда множество $\mathcal{E}$ образует предгильбертово пространство со скалярным произведением

$$\kappa(\nu_1, \nu_2) := \int \kappa(x, y) d(\nu_1 \otimes \nu_2)(x, y)$$

и полунормой $\|\nu\| := \sqrt{\kappa(\nu, \nu)}$ (см., например, [7]).

В настоящей работе даны описания потенциалов минимизирующих мер λ в случае их существования (теоремы 1 и 2), выделены их характеристические свойства (предложение 1), найдены постановки экстремальных задач, дуальных к исходной (теорема 5), при достаточно общих предположениях доказана устойчивость экстремалей относительно изменения начальных условий (теоремы 3 и 4). Упомянутые результаты новы даже в случае классических ядер и евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

Полученные здесь результаты и примененные методы обобщают и развивают результаты и методы из [8 – 10], соответствующие случаю $g \equiv 1$, $f \equiv 0$.

3. Элементарные свойства экстремалей. На множестве $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(m, p)$ всех $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ естественно ввести отношение частичного упорядочения $\prec$, где, по определению, $\mathcal{A}' \prec \mathcal{A}$, если $A_i' \subset A_i$ для всех $i \in I$. (Здесь $\mathcal{A}' = (A_i')_{i \in I}$.)

Очевидно, $\mathcal{E}_f(\mathcal{A}', a, g) \subset \mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a, g)$, и поэтому

$$\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g) \le \mathcal{F}_f(\mathcal{A}', a, g) \qquad \forall \mathcal{A}' \prec \mathcal{A}. \tag{4}$$

Зафиксировав $\mathcal{A}$, обозначим через $\{\mathcal{K}\} = \{\mathcal{K}\}_{\mathcal{A}}$ множество всех $\mathcal{K} = (K_i)_{i \in I} \in \mathfrak{A}$ таких, что $\mathcal{K} \prec \mathcal{A}$ и K_i, $i \in I$, компактны.

Лемма 4. *Если* $\mathcal{K} \uparrow \mathcal{A}$, $\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}_{\mathcal{A}}$, *то*

$$\mathcal{F}_f(\mathcal{K}, a, g) \downarrow \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g).$$

Доказательство. Вследствие (4) для доказательства леммы достаточно показать выполнение неравенства

$$\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g) \ge \lim_{\mathcal{K} \uparrow \mathcal{A}} \mathcal{F}_f(\mathcal{K}, a, g). \tag{5}$$

Очевидно, можно предположить, что $\mathcal{F}_f(\mathcal{A},a,g)<\infty$. Зафиксируем $\mu\in\in\mathcal{E}_f(\mathcal{A},a,g)$ и обозначим

$$\tilde{\mu}^i_{\mathcal{K}}:=\frac{a_i}{\int g\,d\mu^i_{K_i}}\mu^i_{K_i},\quad \mathcal{K}\in\{\mathcal{K}\},\quad i\in I.$$

Применяя лемму 1 к функциям g, f, κ и мерам μ^i, $\mu^i\otimes\mu^j$, $i,j\in I$ (это правомерно в силу леммы 3), последовательно находим

$$\sum_{i\in I}\alpha_i\tilde{\mu}^i_{\mathcal{K}}\in\mathcal{E}_f(\mathcal{K},a,g),$$

где $\mathcal{K}\in\{\mathcal{K}\}$ — достаточно большое, и

$$\mathcal{F}_f(\mu)=\sum_{i,j\in I}\alpha_i\alpha_j\kappa(\mu^i,\mu^j)-2\sum_{i\in I}\alpha_i\int f\,d\mu^i=$$

$$=\lim_{\mathcal{K}\uparrow\mathcal{A}}\left\{\sum_{i,j\in I}\alpha_i\alpha_j\kappa(\tilde{\mu}^i_{\mathcal{K}},\tilde{\mu}^j_{\mathcal{K}})-2\sum_{i\in I}\alpha_i\int f\,d\tilde{\mu}^i_{\mathcal{K}}\right\}\geq\lim_{\mathcal{K}\uparrow\mathcal{A}}\mathcal{F}_f(\mathcal{K},a,g).$$

Отсюда вследствие произвольности $\mu\in\mathcal{E}_f(\mathcal{A},a,g)$ получаем (5). Лемма 4 доказана.

***Замечание* 2.** Из леммы 4 вытекает, что экстремальная характеристика $\mathcal{F}_f(\mathcal{A},a,g)$ не изменится, если в ее определении ограничиться рассмотрением мер $\mu\in\mathcal{E}_f(\mathcal{A},a,g)$ таких, что носители $S(\mu^i)$, $i\in I$, компактны и $S(\mu^i)\subset\subset A_i$.

Пусть $C(\cdot)$ обозначает внутреннюю емкость множества относительно ядра κ [7].

Лемма 5. *Следующие утверждения равносильны*:

i) $\mathcal{F}_f(\mathcal{A},a,g)<\infty$;

ii) $\mathcal{F}_f(\mathcal{K},a,g)<\infty$ *для некоторого* $\mathcal{K}\in\{\mathcal{K}\}_{\mathcal{A}}$;

iii) $\mathcal{E}_f(\mathcal{A},a,g)\neq\varnothing$;

iv) $\prod_{i\in I}C(\{x\in A_i:\alpha_i f(x)>-\infty\})>0$.

Доказательство. Предположив выполненным утверждение iv), докажем существование меры $\mu\in\mathcal{E}_f(\mathcal{A},a,g)$.

Для каждого $i\in I$ множество $E_i:=\{x\in A_i:\alpha_i f(x)>-\infty\}$ представимо в виде

$$E_i=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_i^n,$$

где $E_i^n:=\{x\in A_i:\alpha_i f(x)>-n\}$. Поскольку E_i^n, $n\in\mathbb{N}$, ν-измеримы для всех $\nu\in\mathfrak{M}^+(E_i)$ и не убывают, вследствие леммы 2.3.3 из [7] имеем

$$C(E_i)=\lim_{n\to\infty}C(E_i^n).$$

Следовательно, для любого достаточно большого номера n_0 можно выбрать компактное множество $K_i\subset E_i^{n_0}$ с $C(K_i)>0$, а поэтому и меру $\omega_i\in\mathcal{E}^+(K_i)$ с $\omega_i(\mathbf{X})\neq 0$. Обозначим

$$\mu^i:=\frac{a_i\omega_i}{\int g\,d\omega_i},\quad i\in I.$$

Замечая, что вследствие непрерывности и положительности g, а также компактности K_i выполняется $0 < \int g\, d\omega_i < \infty$, из принятых определений и линейности $\mathcal{E}$ находим

$$\mu := \sum_{i \in I} \alpha_i \mu^i \in \mathcal{E}(\mathcal{A}, a, g).$$

Учитывая неравенства

$$\int \alpha_i f\, d\mu^i \geq -n_0 \mu^i(\mathbf{X}) > -\infty, \quad i \in I,$$

видим, что $\mu \in \mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a, g)$. Это доказывает импликацию iv) $\Rightarrow$ iii).

Чтобы доказать обратную импликацию, зафиксируем $\mu_0 \in \mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a, g)$ и предположим, рассуждая от противного, что для некоторого $j \in I$ выполняется

$$\alpha_j f(x) = -\infty \quad \text{пр. вс. в} \quad A_j.$$

Применяя лемму 2 (это правомерно в силу леммы 3), отсюда находим $\alpha_j f = -\infty$ μ_0^j-почти всюду. А так как, очевидно, $\mu_0^j \neq 0$, то, следовательно, $\alpha_j \int f\, d\mu_0^j = -\infty$, что противоречит определению класса $\mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a, g)$.

Поскольку эквивалентность утверждений i) и iii) очевидна в силу принятых определений, а i) и ii) — в силу леммы 4, лемма 5 доказана.

Всюду далее будем предполагать, что $-\infty < \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g) < \infty$. Тогда выполняется каждое из утверждений леммы 5 и, дополнительно, $\int f\, d\mu \neq \infty$ для всех $\mu \in \mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a, g)$ [1]. А так как этот интеграл не равен $-\infty$ в силу определения класса $\mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a, g)$, имеем

$$-\infty < \int f\, d\mu^i < \infty \quad \forall \mu \in \mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a, g), \quad i \in I. \tag{6}$$

Обозначим через $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathcal{A}, a, g, f)$ класс (возможно, пустой) всех минимизирующих мер λ. Справедливы следующие утверждения единственности.

Лемма 6. *Если λ и $\hat{\lambda}$ принадлежат $\mathcal{W}(\mathcal{A}, a, g, f)$, то справедливы соотношения*

$$\left\|\lambda - \hat{\lambda}\right\| = 0, \tag{7}$$

$$\int f\, d\lambda = \int f\, d\hat{\lambda}, \tag{8}$$

$$\kappa(x, \lambda) = \kappa(x, \hat{\lambda}) \quad \textit{пр. вс. в} \quad \mathbf{X}. \tag{9}$$

Доказательство. Замечая, что класс $\mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a, g)$ выпуклый, имеем

$$4\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g) \leq 4\mathcal{F}_f\left(\frac{\lambda + \hat{\lambda}}{2}\right) = \left\|\lambda + \hat{\lambda}\right\|^2 - 4\int f\, d(\lambda + \hat{\lambda}).$$

Поэтому, применяя тождество параллелограмма в $\mathcal{E}$, находим

$$0 \leq \left\|\lambda - \hat{\lambda}\right\|^2 \leq -4\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g) + 2\mathcal{F}_f(\lambda) + 2\mathcal{F}_f(\hat{\lambda}).$$

Отсюда в силу минимальности мер λ и $\hat{\lambda}$ получаем (7) и, следовательно, равенство $\|\lambda\| = \|\hat{\lambda}\|$. Вычитая его из равенства $\mathcal{F}_f(\lambda) = \mathcal{F}_f(\hat{\lambda})$, находим (8). Наконец, соотношение (9) вытекает из (7) вследствие леммы 3.2.1 из [7]. Лемма 6 доказана.

---

[1] Отсюда необходимо следует, что $\alpha_i f(x) < \infty$ пр. вс. в A_i, $i \in I$.

Ядро κ называется *строго положительно определенным*, если оно положительно определено и, дополнительно, утверждения $\kappa(\nu,\nu)=0$ и $\nu=0$ эквивалентны [4, 7].

***Следствие* 3.** *Если ядро κ строго положительно определено и λ, $\hat{\lambda}$ — минимизирующие меры, то $\lambda=\hat{\lambda}$.*

Отметим, что в условиях следствия 3, вообще говоря, $\lambda \not\equiv \hat{\lambda}$.

4. Потенциалы минимизирующих мер. В данном пункте, а также в пунктах 5 и 7 будем предполагать, что $\int f\,d\nu$ определен для всех $\nu\in\mathcal{E}^+(A)$. В настоящем пункте также предполагаем, что задача Гаусса разрешима. Описание потенциалов $\kappa(x,\lambda)$ минимизирующих мер $\lambda\in\mathcal{W}(\mathcal{A},a,g,f)$ дается теоремами 1 и 2.

Для $\mu\in\mathfrak{M}(\mathcal{A})\bigcap\mathcal{E}$ обозначим

$$\Psi^i(x,\mu) \;:=\; \Psi^i_{f,g}(x,\mu) \;:=\; \alpha_i\left[a_i\frac{\kappa(x,\mu)-f(x)}{g(x)}-\int f\,d\mu^i\right],\quad i\in I,\quad x\in\mathbf{X}, \tag{10}$$

если, конечно, выражение справа определено. А поскольку потенциалы мер с конечной энергией определены и конечны пр. вс. в $\mathbf{X}$ (см. [7]), вследствие (6) функции $\Psi^i_{f,g}(x,\mu)$, $\mu\in\mathcal{E}_f(\mathcal{A},a,g)$, $i\in I$, определены пр. вс. в $\overline{A}$.

Теорема 1. *Для каждого фиксированного $\lambda\in\mathcal{W}(\mathcal{A},a,g,f)$ существует и единствен набор (конечных) чисел $\eta_i=\eta_i(\lambda)$, $i\in I$, удовлетворяющих соотношениям*

$$\Psi^i_{f,g}(x,\lambda)\;\ge\;\eta_i \quad \textit{пр. вс. в}\quad A_i,\ i\in I, \tag{11}$$

$$\sum_{i\in I}\eta_i \;=\; \mathcal{F}_f(\mathcal{A},a,g). \tag{12}$$

При этом дополнительно выполняется

$$\Psi^i_{f,g}(x,\lambda)\;=\;\eta_i \quad \lambda^i\textit{-почти всюду в}\quad \mathbf{X},\ i\in I. \tag{13}$$

Числа $\eta_i=\eta_i(\lambda)$, $i\in I$, допускают представление

$$\eta_i(\lambda)\;=\;\alpha_i\left[\kappa(\lambda,\lambda^i)-2\int f\,d\lambda^i\right],\qquad i\in I. \tag{14}$$

Если $\hat{\lambda}\in\mathcal{W}(\mathcal{A},a,g,f)$ — еще одна минимизирующая мера, то $\eta_i(\lambda)$ и $\eta_i(\hat{\lambda})$, $i\in I$, связаны между собой равенствами

$$\eta_i(\lambda)+\alpha_i\int f\,d\lambda^i \;=\; \eta_i(\hat{\lambda})+\alpha_i\int f\,d\hat{\lambda}^i,\qquad i\in I. \tag{15}$$

***Замечание* 3.** Утверждение о единственности чисел $\eta_i=\eta_i(\lambda)$, $i\in I$, останется в силе, если в его формулировке соотношения (11) и (12) заменить на (12) и (13). Более того, при этом знак $=$ в (12) и (13) можно заменить на $\ge$ (аналогично[2], на $\le$).

Теорема 1 допускает следующее уточнение.

Теорема 2. *Пусть ядро κ непрерывно на $\overline{A^+}\times\overline{A^-}$ и удовлетворяет условию*

$$\sup_{x\in K,\,y\in A^-}\kappa(x,y)<\infty\quad \forall\,K\subset A^+, \tag{16}$$

[2] В этом случае утверждение можно даже усилить (см. п. 5, предложение 1).

где K компактно, а также условию, полученному из (16) взаимной заменой индексов + и −. Пусть выполняется случай II и для каждого $i \in I$ функция $\alpha_i f$ полунепрерывна сверху на $\overline{A_i}$. Тогда функции $\Psi^i_{f,g}(x, \lambda)$, $\lambda \in \mathcal{W}(\mathcal{A}, a, g, f)$, $i \in I$, определены всюду в $\overline{A}$ и удовлетворяют утверждениям теоремы 1, а также соотношениям

$$\Psi^i_{f,g}(x, \lambda) = \eta_i \quad \text{пр. вс. в} \quad S(\lambda^i) \cap A_i, \ i \in I, \tag{17}$$

$$\Psi^i_{f,g}(x, \lambda) \le \eta_i \quad \forall x \in S(\lambda^i), \quad i \in I, \tag{18}$$

где $\eta_i = \eta_i(\lambda)$, $i \in I$, — числа, определенные равенствами (14).

***Доказательство теоремы* 1.** Зафиксируем $\lambda \in \mathcal{W}$, $i \in I$ и обозначим

$$\lambda_* := \sum_{j \ne i} \alpha_j \lambda^j, \tag{19}$$

$$f_*(x) := \alpha_i [f(x) - \kappa(x, \lambda_*)]. \tag{20}$$

Легко убедиться, что для каждого $\mu \in \mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a, g)$ такого, что $\mu - \alpha_i \mu^i = \lambda_*$ (в частности, для λ), имеет место тождество

$$\mathcal{F}_f(\mu) = \mathcal{F}_f(\lambda_*) + \mathcal{F}_{f_*}(\mu^i).$$

А так как $\mathcal{F}_f(\mu) \ge \mathcal{F}_f(\lambda)$, то, следовательно,

$$\mathcal{F}_{f_*}(\mu^i) \ge \mathcal{F}_{f_*}(\lambda^i),$$

и поэтому λ^i является решением вариационной задачи о минимизации функционала $\mathcal{F}_{f_*}$ в классе всех $\nu \in \mathfrak{M}^+(A_i)$ с $\int g \, d\nu = a_i$. На основании теоремы 2.1 из [1] отсюда получаем

$$\kappa(x, \lambda^i) - f_*(x) \ge c_i g(x) \quad \text{пр. вс. в} \quad A_i, \tag{21}$$

где c_i — решение уравнения

$$a_i c_i = \int \left[\kappa(x, \lambda^i) - f_*(x)\right] d\lambda^i(x). \tag{22}$$

Подставляя (19) и (20) в (21) и (22), в результате несложных преобразований убеждаемся в справедливости соотношений (11) с η_i, удовлетворяющими (14). Заметим, что вследствие (6) и (14) числа η_i, $i \in I$, необходимо конечны. Суммируя равенства (14) по $i \in I$, находим (12).

В силу леммы 3 множество A_i λ^i-σ-конечно. Применяя лемму 2, видим, что неравенство в (11) выполняется λ^i-почти всюду. Умножая его на (положительную) функцию g, а затем интегрируя относительно λ^i, вследствие соотношений $\int g \, d\lambda^i = a_i$, $i \in I$, приходим к неравенству

$$\alpha_i \int [\kappa(x, \lambda) - 2 f(x)] \, d\lambda^i(x) \ge \eta_i. \tag{23}$$

Но согласно (14) неравенство (23) должно быть равенством. А это, как следует из только что проведенных рассуждений, возможно только в случае (13).

Докажем утверждение о единственности чисел $\eta_i(\lambda)$, $i \in I$. Пусть соотношения (11) и (12) справедливы для некоторых η'_i, $i \in I$, вместо η_i, $i \in I$. Интегрируя умноженное на g неравенство (11) с η_i' вместо η_i относительно λ^i, получаем соотношение (23) с η_i' вместо η_i. Подставляя в левую часть полученного соотношения равенство (14), находим

$$\eta_i \geq \eta_i' \quad \forall i \in I. \tag{24}$$

Но в силу тождества (12), примененного последовательно к η_i, $i \in I$, и η_i', $i \in \in I$, имеем

$$\sum_{i \in I} \eta_i = \sum_{i \in I} \eta_i',$$

а это возможно только в случае, когда неравенства в (24) превращаются в равенства.

Наконец, если $\hat{\lambda}$ — еще одна мера из $\mathcal{W}(\mathcal{A}, a, g, f)$, то вследствие (9) и (10) имеем

$$\Psi^i(x, \lambda) + \alpha_i \int f\, d\lambda^i = \Psi^i(x, \hat{\lambda}) + \alpha_i \int f\, d\hat{\lambda}^i \quad \text{пр. вс. в} \quad A_i, \quad i \in I.$$

Поэтому, применяя соотношение (11) к $\hat{\lambda}$, находим

$$\Psi^i(x, \lambda) \geq \eta_i^* \quad \text{пр. вс. в} \quad A_i, \quad i \in I, \tag{25}$$

где

$$\eta_i^* := \eta_i(\hat{\lambda}) + \alpha_i \int f\, d\hat{\lambda}^i - \alpha_i \int f\, d\lambda^i. \tag{26}$$

Суммируя (26) по $i \in I$, в силу (8) и равенства (12), записанного для $\eta_i(\hat{\lambda})$, получаем

$$\sum_{i \in I} \eta_i^* = \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g).$$

Применяя утверждение о единственности чисел $\eta_i(\lambda)$, $i \in I$, из последнего равенства и соотношений (25) находим $\eta_i^* = \eta_i(\lambda)$, $i \in I$, откуда вследствие (26) вытекает (15).

Теорема 1 доказана.

***Доказательство теоремы* 2.** Докажем теорему для $i \in I^+$ (для $i \in I^-$ доказательство аналогично).

Покажем, что в условиях теоремы функция $\Psi^i(x, \mu)$, где $\mu \in \mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a, g)$, полунепрерывна снизу на $\overline{A_i}$. Вследствие полунепрерывности снизу на $\mathbf{X}$ потенциалов положительных мер [7] и соотношения (6) для этого достаточно доказать полунепрерывность снизу на $\overline{A_i}$ функции $-\kappa(x, \mu^-)$.

Зафиксируем точку $x_0 \in \overline{A_i}$ и ее компактную окрестность $W_{x_0} \subset \overline{A_i}$. Рассмотрим функцию $\kappa^*(x, y)$ на $W_{x_0} \times \overline{A^-}$, определенную выражением

$$\kappa^*(x, y) := -\kappa(x, y) + \sup_{\zeta \in W_{x_0},\, \eta \in A^-} \kappa(\zeta, \eta). \tag{27}$$

В силу непрерывности κ на $\overline{A^+} \times \overline{A^-}$ и условия (16) функция $\kappa^*(x, y)$, $(x, y) \in \in W_{x_0} \times \overline{A^-}$, неотрицательна и непрерывна. Поэтому функция

$$\kappa^*(x, \mu^-) = \int \kappa^*(x, y)\, d\mu^-(y), \quad x \in W_{x_0},$$

полунепрерывна снизу как потенциал положительной меры μ^- относительно ядра κ^*.

С другой стороны, согласно (3) в принятых условиях мера μ^- ограничена. Поэтому, интегрируя тождество (27) относительно μ^- и учитывая при этом условие (16), находим, что $\kappa^*(x,\mu^-)$, $x \in W_{x_0}$, с точностью до конечной аддитивной постоянной совпадает с сужением $-\kappa(x,\mu^-)$ на W_{x_0}. Ввиду доказанного выше отсюда следует полунепрерывность снизу на $\overline{A_i}$ функции $-\kappa(x,\mu^-)$, а поэтому и функции $\Psi^i(x,\mu)$.

Зафиксируем $\lambda \in \mathcal{W}(\mathcal{A},a,g,f)$, $x^0 \in S(\lambda^i)$ и рассмотрим направленное по отношению обратного включения множество $\mathcal{B}(x^0)$ всех открытых окрестностей точки x^0 в $\overline{A_i}$. Для каждого $U \in \mathcal{B}(x^0)$ выполняется $\lambda^i(U) > 0$, поэтому в силу (13) найдется точка $x_U \in U$ со свойством

$$\Psi^i(x_U,\lambda) = \eta_i.$$

А так как направленность $(x_U)_{U\in\mathcal{B}(x^0)}$ сходится к x^0, отсюда вследствие полунепрерывности снизу на $\overline{A_i}$ функции $\Psi^i(x,\lambda)$ находим $\Psi^i(x^0,\lambda) \le \eta_i$. Это доказывает (18).

Комбинируя (18) с (11), получаем (17). Теорема 2 доказана.

5. Характеристические свойства потенциалов минимизирующих мер. Установленные теоремами 1 и 2 свойства потенциалов минимизирующих мер являются их характеристическими свойствами в смысле следующего утверждения.

Предложение 1. *Пусть* $\mu \in \mathcal{E}_f(\mathcal{A},a,g)$. *Следующие утверждения равносильны*:

i) μ — *минимизирующая мера в задаче Гаусса*;

ii) $\mathcal{F}_f(\nu) - \mathcal{F}_f(\mu) \ge \|\nu-\mu\|^2$ *для всех* $\nu \in \mathcal{E}_f(\mathcal{A},a,g)$;

iii) $\Psi^i_{f,g}(x,\mu) \ge \alpha_i\left[\kappa(\mu,\mu^i) - 2\int f\,d\mu^i\right]$ *пр. вс. в* A_i, $i \in I$;

iv) *существуют (конечные) числа* b_i, $i \in I$, *такие, что*

$$\Psi^i_{f,g}(x,\mu) \ge b_i \quad \text{пр. вс. в } A_i, \quad i \in I, \tag{28}$$

$$\sum_{i\in I} b_i \ge \mathcal{F}_f(\mu); \tag{29}$$

v) *существуют (конечные) числа* c_i, $i \in I$, *такие, что*

$$\Psi^i_{f,g}(x,\mu) \le c_i \quad \mu^i\text{-почти всюду в } \mathbf{X}, \quad i \in I, \tag{30}$$

$$\sum_{i\in I} c_i \le \mathcal{F}_f(\mathcal{A},a,g). \tag{31}$$

Доказательство. Импликации i) $\Rightarrow$ iii) и i) $\Rightarrow$ v) верны вследствие теоремы 1; импликации ii) $\Rightarrow$ i) и iii) $\Rightarrow$ iv) очевидны (см. (6)).

Докажем импликацию iv) $\Rightarrow$ ii). Зафиксируем $\nu \in \mathcal{E}_f(\mathcal{A},a,g)$; тогда в силу лемм 2 и 3 неравенство в (28) справедливо ν^i-почти всюду. Умножим его на g, а затем проинтегрируем относительно ν^i и просуммируем полученные неравенства по всем $i \in I$, учитывая при этом (29). В результате получим

$$-\|\mu\|^2 + \kappa(\mu,\nu) - \int f\,d\nu + \int f\,d\mu \ge 0,$$

что, как легко видеть, эквивалентно искомому неравенству $\mathcal{F}_f(\nu) - \mathcal{F}_f(\mu) \ge$ $\ge \|\nu-\mu\|^2$.

Чтобы завершить доказательство предложения, достаточно доказать импликацию v) ⇒ i). Аналогично предыдущему, из (30) и (31) последовательно находим

$$\alpha_i\left[\kappa(\mu,\mu^i) - 2\int f\, d\mu^i\right] \le c_i \quad \forall\, i \in I,$$

$$\mathcal{F}_f(\mu) \le \sum_{i\in I} c_i \le \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g),$$

откуда в силу условия $\mu \in \mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a, g)$ следует утверждение i). Предложение 1 доказано.

6. О непрерывности экстремалей. Пусть $\mathcal{A} = (A_i)_{i\in I}$ фиксировано, а функции g и f заданы в $\mathbf{X}$ (или в достаточно большой окрестности множества $\overline{A}$). Как и ранее, g предполагаем положительной и непрерывной, а f — заданной приблизительно всюду и универсально измеримой.

Цель настоящего пункта состоит в нахождении условий, обеспечивающих непрерывность справа характеристики $\mathcal{F}_f(\cdot, a, g)$, где $\mathcal{F}_f(\cdot, a, g)$ рассматривается как функция на множестве $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(m, p)$, снабженном структурой частичного упорядочения. Трудности, возникающие при исследовании свойств непрерывности в некомпактном случае, преодолеваются путем эффективного использования в предгильбертовом пространстве $\mathcal{E}$ обеих топологий — широкой и *сильной* (т. е. задаваемой полунормой $\|\cdot\|$). Чтобы эти топологии были надлежащим образом согласованы, ядро κ предполагаем удовлетворяющим следующему свойству [3]:

(CW) *Каждая сильно ограниченная и широко сходящаяся направленность в* $\mathcal{E}^+(\mathbf{X})$ $\mathcal{E}$*-слабо сходится к своему широкому пределу.*

Напомним (см. [4, 7]), что $\mathcal{E}$*-слабая* топология в $\mathcal{E}$ задается системой полунорм

$$\nu \mapsto |\kappa(\nu, \omega)|, \quad \omega \in \mathcal{E}.$$

Наряду с широкой сходимостью для мер из класса $\mathfrak{M}(\mathcal{B})$ (где $\mathcal{B} \in \mathfrak{A}$ фиксировано) удобно использовать понятие $\mathcal{B}$-широкой сходимости, введенное в [9]. А именно, направленность $(\mu_s)_{s\in S} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{B})$ называется сходящейся к $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{B})$ $\mathcal{B}$*-широко*, если

$$\mu_s^i \to \mu^i \quad \text{широко для всех} \quad i \in I.$$

Очевидно, что из $\mathcal{B}$-широкой сходимости вытекает широкая сходимость к тому же пределу; обратное, вообще говоря, не верно (см. [9], пп. 6.2).

Будем писать $\mathcal{A}_s \downarrow \mathcal{A}$, где s пробегает направленное множество индексов S, если $\mathcal{A}_s = (A_i^s)_{i\in I} \in \mathfrak{A}$, направленность $(\mathcal{A}_s)_{s\in S}$ убывает и

$$\bigcap_{s\in S} A_i^s = A_i \quad \forall\, i \in I.$$

Пусть $\mathcal{A}_s \downarrow \mathcal{A}$, $s \in S$. Переходя при необходимости к поднаправленности, будем считать, что $(\mathcal{A}_s)_{s\in S}$ содержит максимальный элемент $\mathcal{A}_{s_0}$. Обозначим $\mathcal{A}^0 := \mathcal{A}_{s_0}$, где $\mathcal{A}^0 = (A_i^0)_{i\in I}$. В указанных условиях и обозначениях справедливо следующее утверждение.

---

[3] Впервые свойство (CW) было определено в [7]. Эффективность постулирования этого свойства при исследовании вариационных задач на классах знакопеременных мер была выявлена в [8 – 10].

Теорема 3. *Пусть все* A_i^s, $i \in I$, $s \in S$, *замкнуты, а каждое множество* A_i^0, $i \in I$, *либо имеет конечную внутреннюю емкость, либо компактно*[4]. *Предположим, что ядро* κ *удовлетворяет свойству* (CW) *и следующему условию:*

$$\sup_{(x,y)\in A_i^0\times A_j^0} \kappa(x,y) < \infty \quad \forall\, i \in I^+,\ j \in I^-. \tag{32}$$

Пусть для каждого $i \in I$ *выполняется условие*

$$\inf_{x\in A_i^0} g(x) > 0 \tag{33}$$

и либо g *ограничена сверху на* A_i^0, *либо существуют* $r = r_i \in (1,\infty)$ *и* $\zeta = \zeta_i \in \mathcal{E}$ *такие, что*

$$g^r(x) \le \kappa(x,\zeta) \quad \text{пр. вс. в } A_i^0. \tag{34}$$

Предположим также, что либо $f = \kappa(\cdot,\chi)$, *где* $\chi \in \mathcal{E}$, *либо каждая функция* $\alpha_i f\,\big|_{A_i^0}$, $i \in I$, *неположительна (или имеет компактный носитель) и полунепрерывна сверху. Тогда справедливо равенство*

$$\lim_{s\in S} \mathcal{F}_f(\mathcal{A}_s, a, g) = \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g). \tag{35}$$

Кроме того, для любых мер $\lambda_s \in \mathcal{W}(\mathcal{A}_s, a, g, f)$, $s \in S$, *и каждой* $\mathcal{A}^0$*-широкой предельной точки* $\tilde{\lambda}$ *направленности* $(\lambda_s)_{s\in S}$ *выполняются соотношения*

$$\tilde{\lambda} \in \mathcal{W}(\mathcal{A}, a, g, f), \tag{36}$$

$$\lambda_s \to \tilde{\lambda} \quad \text{сильно}. \tag{37}$$

***Замечание* 4.** В условиях теоремы 3 меры $\lambda_s \in \mathcal{W}(\mathcal{A}_s, a, g, f)$, $s \in S$, существуют в силу теоремы 1 из [2]. Отметим также, что вследствие леммы 6 и соотношений (36) и (37) выполняется $\lambda_s \to \lambda$ сильно для всех $\lambda \in \mathcal{W}(\mathcal{A}, a, g, f)$.

Следуя [6] (п. 0.2.17), множество $Q \subset \mathbf{X}$ будем называть *σ-компактным*, если оно представимо в виде счетного объединения компактных подмножеств из $\mathbf{X}$. Напомним, что топологическое пространство называется *нормальным*, если два любых непересекающихся замкнутых множества имеют непересекающиеся окрестности (см. [6], п. 0.2.8).

Элемент $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{A}) \in \mathfrak{A}$ будем называть *окрестностью* $\mathcal{A}$ в $\mathfrak{A}$, если D_i, $i \in I$, — окрестности множеств A_i в $\mathbf{X}$. Здесь $\mathcal{D} = (D_i)_{i\in I}$.

Теорема 4. *Предположим, что пространство* $\mathbf{X}$ *нормально, а* κ *удовлетворяет свойству* (CW). *Пусть каждое множество* A_i, $i \in I$, *либо замкнуто,* σ*-компактно и имеет конечную внутреннюю емкость, либо компактно. Предположим, что существует окрестность* $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, *для которой сужения* κ, g *и* f *на* D_i, $i \in I$, *удовлетворяют всем условиям теоремы 3 с* D_i *вместо* A_i^0. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется окрестность* $\tilde{\mathcal{D}}(\mathcal{A})$, $\tilde{\mathcal{D}}(\mathcal{A}) \prec \mathcal{D}(\mathcal{A})$, *такая, что для каждого* $\mathcal{B} \in \mathfrak{A}$, $\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \tilde{\mathcal{D}}(\mathcal{A})$, *выполняется*

$$\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g) - \mathcal{F}_f(\mathcal{B}, a, g) < \varepsilon.$$

Доказательства теорем 3 и 4 приведены ниже (см. соответственно пп. 8 и 9).

[4] Внутренняя емкость компактного множества, вообще говоря, может быть равной $+\infty$. Она необходимо конечна при дополнительном условии строгой положительной определенности ядра.

***Замечание* 5.** В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, свойству (CW) удовлетворяют (см. [7]) ядро Ньютона $|x-y|^{2-n}$ и, более общо, ядра Рисса $|x-y|^{\beta-n}$, $0<\beta<n$, и Грина g_G (здесь $G \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, а g_G — его обобщенная функция Грина). Очевидно, что для этих ядер условие (32) в теореме 3 (и, соответственно, в теореме 4) можно заменить условием

$$\operatorname{dist}(A_i^0, A_j^0) > 0 \quad \forall\, i \in I^+, \quad j \in I^-.$$

7. Дуальные экстремальные задачи. В этом пункте найдены постановки экстремальных задач, дуальных к задаче Гаусса. Задачу Гаусса здесь предполагаем разрешимой.

Обозначим через $\Gamma_f(\mathcal{A}, a, g)$ класс всех $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{E}$ таких, что $\int f\, d\mu$ определен и конечен и существуют (конечные) числа $b_i = b_i(\mu)$, $i \in I$, удовлетворяющие условиям

$$\Psi^i_{f,g}(x,\mu) \geq b_i \quad \text{пр. вс. в } A_i, \quad i \in I, \tag{38}$$

$$\sum_{i \in I} b_i = \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g). \tag{39}$$

Здесь $\Psi^i_{f,g}(x,\mu) = \Psi^i(x,\mu)$, $i \in I$, — функции, определенные соотношением (10).

Как вытекает из теоремы 1, справедливо включение

$$\mathcal{W}(\mathcal{A}, a, g, f) \subset \Gamma_f(\mathcal{A}, a, g) \tag{40}$$

и, следовательно, в принятых условиях класс $\Gamma_f(\mathcal{A}, a, g)$ не пуст. Вариационную задачу о минимизации в классе $\Gamma_f(\mathcal{A}, a, g)$ функционала $\mathcal{F}_f(\mu)$ назовем *задачей* I. Обозначим

$$\inf_{\mu \in \Gamma_f(\mathcal{A},a,g)} \mathcal{F}_f(\mu) =: \mathcal{G}_f(\mathcal{A}, a, g).$$

В случае, когда выполняются условия теоремы 2, определим *задачу* II о минимизации в классе $\mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a, g)$ функционала $I_{f,g}(\mu)$, где обозначено

$$I_{f,g}(\mu) := \sum_{i \in I} \sup_{x \in S(\mu^i)} \Psi^i_{f,g}(x,\mu).$$

Отметим, что в принятых условиях функции $\Psi^i_{f,g}(x,\mu)$, $\mu \in \mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a, g)$, $i \in I$, определены всюду в $\overline{A}$ (см. доказательство теоремы 2), и поэтому задача II сформулирована корректно. Обозначим

$$\inf_{\mu \in \mathcal{E}_f(\mathcal{A},a,g)} I_{f,g}(\mu) =: I_f(\mathcal{A}, a, g).$$

Задача Гаусса и задачи I и II попарно дуальны в смысле следующего утверждения.

Теорема 5. 1. *Справедливо тождество*

$$\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g) = \mathcal{G}_f(\mathcal{A}, a, g), \tag{41}$$

причем каждое решение задачи Гаусса является решением задачи I. *Обратно, каждое решение задачи* I *из класса* $\mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a, g)$ *является решением задачи Гаусса.*

2. *Пусть выполняются условия теоремы* 2. *Тогда справедливо тождество*

$$\Gamma_f(\mathcal{A}, a, g) = I_f(\mathcal{A}, a, g), \tag{42}$$

а классы решений задачи Гаусса и задачи II *совпадают.*

Доказательство. 1. Зафиксировав $\mu \in \Gamma_f(\mathcal{A}, a, g)$ и $\lambda \in \mathcal{W}(\mathcal{A}, a, g, f)$, докажем неравенство

$$\mathcal{F}_f(\lambda) \le \mathcal{F}_f(\mu). \tag{43}$$

Интегрируя умноженное на g неравенство (38) относительно λ^i, а затем суммируя полученные соотношения по всем $i \in I$, в силу (39) находим

$$\kappa(\mu, \lambda) - \int f\, d\lambda - \int f\, d\mu \ge \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g).$$

Подставляя в правую часть этого неравенства тождество $\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g) = \|\lambda\|^2 - 2\int f\, d\lambda$, с помощью элементарных преобразований получаем соотношение

$$\mathcal{F}_f(\mu) \ge \mathcal{F}_f(\lambda) + \|\mu - \lambda\|^2,$$

а поэтому и (43).

Учитывая (40), из (43) в силу произвольности $\mu \in \Gamma_f(\mathcal{A}, a, g)$ находим, что каждая минимизирующая в задаче Гаусса мера λ является решением задачи I. Отсюда очевидно следуют как тождество (41), так и заключительная часть утверждения 1 теоремы 5.

2. Пусть выполняются условия теоремы 2. Обозначим

$$\tilde{\Psi}^i(\mu) := \sup_{x \in S(\mu^i)} \Psi^i(x, \mu), \quad \mu \in \mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a, g); \quad i \in I.$$

Интегрируя умноженное на g неравенство $\Psi^i(x, \mu) \le \tilde{\Psi}^i(\mu)$ $\forall\, x \in S(\mu^i)$ относительно μ^i, находим

$$\alpha_i\left[\kappa(\mu, \mu^i) - 2\int f\, d\mu^i\right] \le \tilde{\Psi}^i(\mu), \quad i \in I, \tag{44}$$

откуда в результате суммирования по $i \in I$ получаем

$$\mathcal{F}_f(\mu) \le I_{f,g}(\mu) \quad \forall\, \mu \in \mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a, g). \tag{45}$$

Пусть $\lambda \in \mathcal{W}(\mathcal{A}, a, g, f)$. Тогда для каждого $i \in I$ мера λ^i ненулевая и имеет конечную энергию, а множество $\mathbf{X} \setminus A_i$ λ^i-пренебрежимо (см. п. 1). Поэтому имеем

$$C\left(S(\lambda^i) \cap A_i\right) > 0.$$

На основании этого неравенства и соотношений (14, (17), (18) находим

$$\tilde{\Psi}^i(\lambda) = \alpha_i\left[\kappa(\lambda, \lambda^i) - 2\int f\, d\lambda^i\right] \quad \forall\, i \in I.$$

Следовательно, при $\mu = \lambda$ неравенства (44), а поэтому и (45), превращаются в равенства. Учитывая принятые определения, отсюда вследствие соотношения (45) получаем тождество (42) и утверждение, что λ необходимо является решением задачи II.

Обратно, пусть μ_* — решение задачи II. Тогда $\mu_* \in \mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a, g)$ и согласно (42)

$$\sum_{i \in I} \tilde{\Psi}^i(\mu_*) = I_{f,g}(\mu_*) = \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g).$$

Отсюда следует, что мера μ_* и числа $c_i := \tilde{\Psi}^i(\mu_*)$, $i \in I$, удовлетворяют характеристическому свойству v) из предложения 1, а поэтому согласно его заключению μ_* необходимо является решением задачи Гаусса.

Теорема 5 доказана.

8. Доказательство теоремы 3. Пусть выполняются условия теоремы 3. Тогда вследствие (4) существует $\lim_{s\in S}\mathcal{F}_f(\mathcal{A}_s,a,g)$, причем

$$\lim_{s\in S}\mathcal{F}_f(\mathcal{A}_s,a,g)\ \le\ \mathcal{F}_f(\mathcal{A},a,g). \tag{46}$$

Доказательство обратного неравенства требует достаточно тонкого анализа, использующего подходы и методы, разработанные в [8 – 10].

Применяя лемму 9.7 из [9], из условия (32) и свойства (CW) находим, что унаследованные сильная и широкая топологии на $\mathfrak{M}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A}^0):=\mathfrak{M}(\mathcal{A}^0)\cap\mathcal{E}$ удовлетворяют следующему свойству $\mathcal{A}^0$-*согласованности* (см. [9], определение 9.3):

$(\mathcal{A}^0C)$ *Каждая сильная направленность Коши* $(\mu_s)_{s\in S}\subset\mathfrak{M}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A}^0)$ *с* $\sup_{s\in S}|\mu_s|(\mathbf{X})<\infty$ *сильно сходится к каждой своей широкой предельной точке.*

В силу теоремы 1 из [2] из принятых условий и свойства $(\mathcal{A}^0C)$ вытекает существование минимизирующих мер $\lambda_s\in\mathcal{W}(\mathcal{A}_s,a,g,f)$, $s\in S$. Учитывая соотношения

$$a_i\ =\ \int g\,d\lambda_s^i\ \ge\ \lambda_s^i(\mathbf{X})\inf_{x\in A_i^0}g(x)\qquad\forall\,s\in S,\quad i\in I,$$

вследствие (33) имеем

$$\sup_{s\in S}\lambda_s^i(\mathbf{X})\ <\ \infty. \tag{47}$$

Заметим, что направленность $(\lambda_s)_{s\in S}$ сильно фундаментальна. Действительно, в силу убывания классов $\mathcal{E}_f(\mathcal{A}_s,a,g)$, $s\in S$, и их выпуклости справедливо включение

$$\frac{\lambda_s+\lambda_d}{2}\in\ \mathcal{E}_f(\mathcal{A}_s,a,g)\qquad\forall\,d\in S,\quad d\ge s.$$

Поэтому по аналогии с тем, как это делалось при доказательстве леммы 6, находим

$$0\ \le\ \|\lambda_s-\lambda_d\|^2\ \le\ -2\mathcal{F}_f(\mathcal{A}_s,a,g)+2\mathcal{F}_f(\mathcal{A}_d,a,g),$$

откуда ввиду существования предела $\lim_{s\in S}\mathcal{F}_f(\mathcal{A}_s,a,g)$ вытекает требуемое.

Следовательно, переходя при необходимости к поднаправленности[5], $(\lambda_s)_{s\in S}$ можно считать сильно ограниченной. Отсюда и из соотношений (32) и (47) находим

$$\sup_{s\in S}\|\lambda_s^i\|^2\ <\ \infty\quad\forall\,i\in I. \tag{48}$$

Поскольку широко ограниченное множество мер относительно компактно в широкой топологии (см. [5], гл. III, § 2, п. 7), вследствие (47) для каждого $i\in I$ существует широкая предельная точка (пусть $\tilde{\lambda}^i$) направленности $(\lambda_s^i)_{s\in S}$. Тогда, очевидно, мера

$$\tilde{\lambda}\ :=\ \sum_{i\in I}\alpha_i\tilde{\lambda}^i$$

является $\mathcal{A}^0$-широкой предельной точкой направленности $(\lambda_s)_{s\in S}$. Применяя

[5] Используя сильную фундаментальность $(\lambda_s)_{s\in S}$, легко проверить, что переход к ее поднаправленностям не уменьшает общность доказательства.

к $(\lambda_s)_{s\in S}$ свойство $(\mathcal{A}^0 C)$, что правомерно в силу ее сильной фундаментальности и соотношения (47), получаем утверждение (37).

Переходя при необходимости к поднаправленностям, будем считать, что

$$\lambda_s^i \to \tilde{\lambda}^i \quad \text{широко}, \quad i \in I. \tag{49}$$

Поэтому для любой полунепрерывной снизу функции $\psi \ge 0$ на A^0 имеем (см. [7])

$$\int \psi\, d\tilde{\lambda}^i \le \liminf_{s\in S} \int \psi\, d\lambda_s^i \quad \forall\, i \in I, \tag{50}$$

причем условие неотрицательности ψ можно опустить, если ее носитель компактен.

Учитывая (47) и (48), из (50) при $\psi = \varphi_{A_i^0}$, $i \in I$, $\psi = \kappa$ и $\psi = g$ соответственно находим, что меры $\tilde{\lambda}^i$, $i \in I$, ограничены, их энергии $\|\tilde{\lambda}^i\|^2$ конечны и

$$\int g\, d\tilde{\lambda}^i \le a_i, \quad i \in I. \tag{51}$$

Выполняется неравенство

$$\mathcal{F}_f(\tilde{\lambda}) \le \lim_{s\in S} \mathcal{F}_f(\lambda_s). \tag{52}$$

Действительно, согласно (37) $\lambda_s \to \tilde{\lambda}$ сильно, а поэтому и $\mathcal{E}$-слабо. Отсюда непосредственно вытекает (52) при условии $f = \kappa(\cdot, \chi)$, $\chi \in \mathcal{E}$. Если это условие не выполняется, то в принятых предположениях каждая из функций $-\alpha_i f\,|_{A_i^0}$, $i \in I$, неотрицательна (или имеет компактный носитель) и полунепрерывна снизу. Применяя к ней (50), а затем суммируя по $i \in I$ и учитывая (37), снова имеем (52).

Докажем включение

$$\tilde{\lambda} \in \mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a, g). \tag{53}$$

Вследствие (49) и упорядоченности и замкнутости множеств A_i^s, $s \in S$, мера $\tilde{\lambda}^i$, $i \in I$, сосредоточена на A_i^s для всех $s \in S$ и поэтому — на A_i. Следовательно, $\tilde{\lambda} \in \mathfrak{M}_g(\mathcal{A})$ и доказательство соотношения (53) сводится к доказательству равенств

$$\int g\, d\tilde{\lambda}^i = a_i, \quad i \in I. \tag{54}$$

Зафиксируем $i \in I$. Если A_i^0 компактно, то (54) непосредственно вытекает из (49) в силу непрерывности g и соотношений $\int g\, d\lambda_s^i = a_i$, $s \in S$ (ср. с леммой 1.3 из [8]). Поэтому пусть A_i^0 не компактно. Тогда согласно принятым предположениям выполняется

$$C(A_i^0) < \infty. \tag{55}$$

Для каждого $E \subset A_i^0$ обозначим через θ_E *внутреннее емкостное распределение*, ассоциированное с E (см. [7]); в соответствии с [7, 9] его существование следует из (55) и $\mathcal{A}^0$-согласованности ядра. Согласно определению θ_E, выполняется $\theta_E \in \mathcal{E}^+(E)$ и

$$\theta_E(\mathbf{X}) = \|\theta_E\|^2 = C(E), \tag{56}$$

$$\kappa(x, \theta_E) \ge 1 \quad \text{пр. вс. в} \quad E. \tag{57}$$

Всюду далее будем предполагать, что для некоторых $r \in (1, \infty)$ и $\zeta \in \mathscr{E}$ выполняется (34). Это не приводит к потери общности доказательства, поскольку в обратном случае, согласно принятым предположениям, существует $c < \infty$ такое, что $g(x) \leq c$ на A_i^0. Комбинируя это соотношение с (57) при $E = A_i^0$, снова приходим к (34), где $r \in (1, \infty)$ — любое, а ζ определяется равенством $\zeta = c^r \theta_{A_i^0}$.

Обозначим через $\{K\}$ возрастающее (относительно отношения включения) семейство всех компактных подмножеств K из A_i^0. Поскольку мера $\tilde{\lambda}^i$ ограничена, вследствие леммы 1 имеем

$$\int g\, d\tilde{\lambda}^i = \lim_{K \in \{K\}} \int g\, \varphi_K\, d\tilde{\lambda}^i.$$

С другой стороны, применяя (50) к $\psi = -g\,\varphi_K$, получаем

$$\int g\,\varphi_K\, d\tilde{\lambda}^i \geq \limsup_{s \in S} \int g\,\varphi_K\, d\lambda_s^i \qquad \forall\, K \in \{K\}.$$

Комбинируя эти два соотношения с (51), находим

$$a_i \geq \int g\, d\tilde{\lambda}^i \geq \limsup_{(s,K) \in S \times \{K\}} \int g\,\varphi_K\, d\lambda_s^i = a_i - \liminf_{(s,K) \in S \times \{K\}} \int g\,\varphi_{A_i^0 \setminus K}\, d\lambda_s^i.$$

Следовательно, для доказательства (54) достаточно убедиться в справедливости равенства

$$\liminf_{(s,K) \in S \times \{K\}} \int g\,\varphi_{A_i^0 \setminus K}\, d\lambda_s^i = 0. \tag{58}$$

Рассмотрим внутреннее емкостное распределение, ассоциированное с $A_i^0 \setminus K$, где $K \in \{K\}$. Из результатов работы [7] выводим неравенство

$$\left\| \theta_{A_i^0 \setminus K} - \theta_{A_i^0 \setminus K'} \right\|^2 \leq \left\| \theta_{A_i^0 \setminus K} \right\|^2 - \left\| \theta_{A_i^0 \setminus K'} \right\|^2 \quad \forall\, K \subset K',$$

а из соотношений (55) и (56) — утверждение, что направленность $\left\| \theta_{A_i^0 \setminus K} \right\|$, $K \in \{K\}$, ограничена и не возрастает, а поэтому фундаментальна в $\mathbb{R}$. Отсюда вытекает, что $(\theta_{A_i^0 \setminus K})_{K \in \{K\}}$ сильно фундаментальна в $\mathscr{E}$. А поскольку, очевидно, $(\theta_{A_i^0 \setminus K})_{K \in \{K\}}$ сходится к нулю широко, то в силу $\mathcal{A}^0$-согласованности ядра — и сильно. Следовательно, имеем

$$\lim_{K \in \{K\}} \left\| \theta_{A_i^0 \setminus K} \right\| = 0. \tag{59}$$

Обозначим $q := r(r-1)^{-1}$, где $r \in (1, \infty)$ — число, фигурирующее в условии (34). Комбинируя (34) с (57), видим, что неравенство

$$g(x)\,\varphi_{A_i^0 \setminus K}(x) \leq \kappa(x, \zeta)^{1/r}\, \kappa(x, \theta_{A_i^0 \setminus K})^{1/q}$$

выполняется пр. вс. в A_i^0 и, следовательно (см. леммы 2 и 3), λ_s^i-почти всюду. Интегрируя его относительно λ_s^i, а затем применяя к выражению в правой части неравенство Гельдера и, последовательно, неравенство Коши – Буняковского, получаем

$$\int g\,\varphi_{A_i^0 \setminus K}\, d\lambda_s^i \leq \left[\int \kappa(x, \zeta)\, d\lambda_s^i(x) \right]^{1/r} \left[\int \kappa(x, \theta_{A_i^0 \setminus K})\, d\lambda_s^i(x) \right]^{1/q} \leq$$

$$\leq \|\zeta\|^{1/r} \left\| \theta_{A_i^0 \setminus K} \right\|^{1/q} \left\| \lambda_s^i \right\|.$$

Переходя здесь к пределу по $(s, K) \in S \times \{K\}$ и используя при этом соотношения (48) и (59), находим (58), следовательно, (54), а поэтому и (53).

Последовательно применяя (53), (52) и (46), получаем цепочку неравенств

$$\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g) \leq \mathcal{F}_f(\tilde{\lambda}) \leq \lim_{s \in S} \mathcal{F}_f(\lambda_s) = \lim_{s \in S} \mathcal{F}_f(\mathcal{A}_s, a, g) \leq \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g), \quad (60)$$

из которой вытекает (35). Кроме того, из (53) и (60) находим (36).

Теорема 3 доказана.

9. Доказательство теоремы 4. Пусть $i \in I$ — произвольное фиксированное. Если множество A_i компактно, то через $\mathfrak{U}_i$ обозначим совокупность всех его *компактных* окрестностей U_i таких, что $U_i \subset D_i$. Существование U_i с указанными свойствами следует из того известного факта, что компактные окрестности каждой точки из локально компактного (отделимого) пространства образуют базу ее окрестностей. Используя нормальность пространства $\mathbf{X}$, легко видеть, что справедливо тождество

$$\bigcap_{U_i \in \mathfrak{U}_i} U_i = A_i. \quad (61)$$

Пусть теперь A_i некомпактно. Тогда согласно условиям теоремы множество A_i σ-компактно и имеет конечную внутреннюю емкость. А так как каждое σ-компактное множество измеримо по емкости (см. лемму 4.1.2 из [7]), то, следовательно, существует открытое множество G_i со свойствами $A_i \subset G_i$ и $C(G_i) < \infty$. Без ограничения общности можно, очевидно, считать, что $G_i \subset D_i$. Поскольку множества A_i и $\mathbf{X} \setminus G_i$ замкнуты и не пересекаются, то вследствие нормальности пространства $\mathbf{X}$ найдется *замкнутая* окрестность U_i множества A_i такая, что $U_i \subset G_i$. Обозначим через $\mathfrak{U}_i$ совокупность всех окрестностей U_i с указанными свойствами. Аналогично предыдущему, в этих условиях и обозначениях снова имеет место тождество (61).

Рассмотрим множество всех $\mathcal{U} := (U_i)_{i \in I} \in \mathfrak{A}$ таких, что $U_i \in \mathfrak{U}_i$, $i \in I$. Оно, очевидно, направлено по убыванию и удовлетворяет всем условиям теоремы 3 с $\mathcal{U}$ вместо $\mathcal{A}_s$. Применяя теорему 3, получаем теорему 4.

1. *Ohtsuka M.* On potentials in locally compact spaces // J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-1. – 1961. – **25**, № 2. – P. 135–352.
2. *Zorii N.* On equilibrium problems for potentials with external fields. – Kyiv, 2002. – 31 p. – (Preprint / Nat. Acad. Sci. Ukraine. Inst. Math.; 2002.07).
3. *Saff E. B., Totik V.* Logarithmic potentials with external fields. – Berlin: Springer, 1997. – 505 p.
4. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. – М.: Наука, 1966. – 515 с.
5. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. – М.: Наука, 1967. – 396 с.
6. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. – М.: Мир, 1969. – 1071 с.
7. *Fuglede B.* On the theory of potentials in locally compact spaces // Acta Math. – 1960. – **103**, № 3–4. – P. 139–215.
8. *Зорий Н. В.* Экстремальные задачи теории емкостей конденсаторов в локально компактных пространствах. I // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 2. – С. 168–189.
9. *Зорий Н. В.* Экстремальные задачи теории емкостей конденсаторов в локально компактных пространствах. II // Там же. – № 4. – С. 466–488.
10. *Зорий Н. В.* Экстремальные задачи теории емкостей конденсаторов в локально компактных пространствах. III // Там же. – № 6. – С. 758–782.

Получено 23.10.2002