УДК 519.41/47

Н. С. Черников (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ЦОКОЛЬНЫХ И ПОЛУПРОСТЫХ ГРУППАХ*

We prove a theorem that gives a large set of new counterexamples to the known R. Baer (1949) and S. N. Chernikov (1959) problems related to socle groups. All these counterexamples are semisimple groups. We also establish many new properties of locally ascendant semisimple subgroups. In particular, by using these properties, we prove that all almost locally soluble M'-groups are Chernikov groups.

Доведено теорему, яка дає великий масив нових контрприкладів до відомих проблем Р. Бера (1949 р.) та С. М. Чернікова (1959 р.), що пов'язані із цокольними групами. Всі контрприклади є напівпростими групами. Встановлено також багато нових властивостей локально субінваріантних напівпростих підгруп. На підставі цих властивостей, зокрема, доведено, що всі майже локально розв'язні M'-групи є черніковськими.

Напомним, что цоколь $\mathrm{Soc}(G)$ группы G — произведение всех ее минимальных нормальных делителей и $\mathrm{Soc}(G)=1$, если у нее их нет (Р. Ремак). Пусть $\mathrm{Soc}_0(G)=1$ и для порядковых чисел $\alpha>0$ индуктивно: если α предельное, то $\mathrm{Soc}_\alpha(G)=\bigcup_{\beta<\alpha}\mathrm{Soc}_\beta(G)$; если $\alpha=\beta+1$, то $\mathrm{Soc}_\alpha(G)/\mathrm{Soc}_\beta(G)=\mathrm{Soc}(G/\mathrm{Soc}_\beta(G))$.

Определение 1 (С. Н. Черников [1], § 5). *Группа G называется цокольной, если для некоторого порядкового γ $G=\mathrm{Soc}_\gamma(G)$.*

Понятно, что класс цокольных групп содержит все конечные группы и все периодические абелевы группы. Легко видеть, что произвольная группа G с условием минимальности для нормальных делителей является цокольной, причем для произвольного $\alpha<\gamma$ $\mathrm{Soc}_{\alpha+1}(G)/\mathrm{Soc}_\alpha(G)$ — прямое произведение конечного числа минимальных нормальных делителей фактор-группы $G/\mathrm{Soc}_\alpha(G)$.

В 1949 г. Р. Бэр поставил следующий вопрос.

Вопрос 1 (Р. Бэр [2]). Верно ли, что цокольная группа G удовлетворяет условию минимальности для нормальных делителей, если для произвольного $\alpha<\gamma$ $\mathrm{Soc}_{\alpha+1}(G)/\mathrm{Soc}_\alpha(G)$ обладает отмеченным свойством?

Приведем следующие определения, связанные с цокольными группами и вопросом 1.

Определение 2 (С. Н. Черников [1], § 5). *Группа, все фактор-группы которой по отличным от нее конечным нормальным делителям имеют конечные отличные от единицы цоколи, называется цокольно конечной.*

Под инвариантными и нормальными рядами и системами группы мы понимаем то же, что в [3] или [4]. Напомним, что гиперконечная группа — это группа, которая имеет возрастающий инвариантный ряд с конечными факторами. В силу следствия 2 (см. ниже) гиперконечные группы входят в класс цокольных групп. Очевидно, гиперконечной является произвольная периодическая гиперцентральная (или, что то же, периодическая ZA-) группа. Легко видеть также, что локально нормальные группы гиперконечны.

Определение 3 (С. Н. Черников [1], § 5). *Гиперконечная цокольно конечная группа называется M'-группой.*

Определение 4 (С. Н. Черников [1], § 5). *Группа G называется M''-группой, если она либо равна единице, либо имеет возрастающий инвариантный ряд*

$$N_0=1\subset N_1\subset\ldots\subset N_\alpha\subset\ldots\subset N_\gamma=G$$

* Настоящая работа, в основном, была написана во время визита автора в Университет Манитобы (г. Виннипег, Канада) в ноябре – декабре 2001 г. Автор признателен профессорам Кангe и Нараину Гуптам за организацию визита, постоянное внимание, полезные советы и обсуждение.

такой, что для каждого $\alpha < \gamma$ $N_{\alpha+1}/N_\alpha$ *разложима в прямое произведение конечных простых групп и не содержится в бо́льшей нормальной подгруппе группы* G/N_α, *имеющей такое разложение, и при каждом конечном* α *подгруппа* N_α *конечна.*

В связи с определением 4 напомним, что группа, разложимая в прямое произведение простых подгрупп, и единичная группа называются вполне приводимыми.

Нетрудно убедиться в том, что цокольно конечной является каждая группа, имеющая верхний центральный ряд, все факторы которого с натуральными номерами удовлетворяют условию минимальности. Группа такого рода названа в [1] (§ 5) M_1-группой. Нетрудно убедиться также в том, что цокольно конечна каждая группа G, имеющая возрастающий инвариантный ряд, каждый фактор которого является максимальным абелевым нормальным делителем соответствующей фактор-группы группы G, причем факторы с натуральными номерами удовлетворяют условию минимальности для подгрупп. Группа G такого рода названа в [1] (§ 5) M_2-группой. M_1- и M_2-группам посвящены работы ученика С. Н. Черникова Х. Х. Мухаммеджана [5, 6]. В работе [6] установлено, что каждая периодическая M_1- и произвольная M_2-группы являются черниковскими. Далее, С. Н. Черников [1] (см. теорему 5.1) установил, что класс всех периодических M_1-групп является пересечением класса M'-групп с классом всех локально нильпотентных групп и класс всех M_2-групп — пересечением класса M''-групп с классом всех локально разрешимых групп. Из теоремы 5.1 и отмеченных результатов [6] непосредственно вытекает, что локально нильпотентные M'-группы и локально разрешимые M''-группы являются черниковскими ([1], следствия 5.1 и 5.2). В связи с последними результатами С. Н. Черников поставил два следующих вопроса.

Вопрос 2 (С. Н. Черников [1], вопрос 5.2). Является ли черниковской (или, что то же, экстремальной) произвольная M'-группа?

Вопрос 3 (С. Н. Черников [1], вопрос 5.3). Является ли черниковской (или, что то же, экстремальной) произвольная M''-группа?

Отрицательные решения вопросов 1 – 3 дал Н. С. Черников [7], построив соответствующий контрпример к ним. Отметим, однако, что если каждая отличная от единицы фактор-группа некоторой группы G имеет отличный от единицы конечный цоколь, то G — черниковская (С. Н. Черников [1], теорема 5.2).

Следуя [8], дадим два определения.

Определение 5. *Произвольную группу, совпадающую со своим коммутантом и имеющую (неабелеву) простую фактор-группу по центру, будем называть квазипростой.*

Определение 6. *Произвольную группу будем называть полупростой, если она является произведением некоторых своих поэлементно перестановочных квазипростых подгрупп или равна единице.*

Квазипростые и полупростые группы играют чрезвычайно важную роль в теории конечных простых групп (см. [8]). Значительна их роль и в настоящей работе, относящейся к абстрактной теории бесконечных групп.

Основными результатами настоящей работы являются теоремы 1 – 3. Их доказательствам предпосланы предложения, ряд из которых представляет самостоятельный интерес.

Теорема 1 дает массив новых групп-контрпримеров к вопросам 1 – 3. Все они — полупростые цокольные группы.

Напомним, что подгруппа H группы G субинвариантна в G, если она является членом некоторого возрастающего нормального ряда группы G [3], и локально субинвариантна в G, если G имеет локальную систему содержащих H подгрупп, в каждой из которых H субинвариантна (Б. И. Плоткин, см., например, [9]). Согласно теореме 2 в произвольной группе все ее локально субинвариантные полупростые подгруппы порождают полупростую подгруппу.

Теорема 3 настоящей работы, в частности, существенно обобщает отмеченный выше результат С. Н. Черникова [1] о локально нильпотентных M'-группах.

Обозначения, принятые в настоящей работе, в основном стандартны или совпадают с обозначениями в [10]. Если G — группа, то ниже записи $H \operatorname{sn} G$, $H \operatorname{asc} G$, $H \operatorname{lasc} G$ означают, что H — ее соответственно субнормальная, субинвариантная, локально субинвариантная подгруппа. $\operatorname{Soc}(G)$ и $\operatorname{Soc}_\alpha(G)$ см. выше. Далее, $L(G)$ — произведение всех нормальных полупростых подгрупп группы G, G' — коммутант группы G. Условимся считать, что для пустого множества X элементов группы G $\langle X \rangle = 1$ и для пустого семейства $\{ H_\lambda \mid \lambda \in \Lambda = \varnothing \}$ подгрупп группы G $\prod_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda = 1$. Для непустого семейства $\{ X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$ групп через $\mathbf{Dr}_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ обозначаем их внешнее прямое произведение. Иными словами, $\mathbf{Dr}_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ — множество всех функций $f \colon \Lambda \to \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, удовлетворяющих условиям:

$$1)\ f(\lambda) \in G_\lambda,\ \lambda \in \Lambda;\ 2)\ \left| \{ \lambda \in \Lambda \mid f(\lambda) \neq 1 \} \right| < \infty;$$

с умножением, заданным по правилу $(fg)(\lambda) = f(\lambda) g(\lambda)$ (см. [11]). Через ω обозначаем первое бесконечное порядковое число.

Теорема 1. *Пусть A — бесконечная абелева черниковская группа; A_i, $i \in \mathbb{N}$, — ее конечные подгруппы такие, что $A = \prod_{i \in \mathbb{N}} A_i$ и для каждого $i \in \mathbb{N}$ множество $\{ j \in \mathbb{N} \mid A_j = A_i \}$ конечно; D_i, $i \in \mathbb{N}$, — квазипростые группы с $Z(D_i) \cong A_i$. Тогда существует группа $G = G'$ такая, что*:

1. *Для некоторого гомоморфизма χ группы $\mathbf{Dr}_{i \in \mathbb{N}} D_i$ с $\operatorname{Ker} \chi \subseteq Z\left(\mathbf{Dr}_{i \in \mathbb{N}} D_i \right)$ $G \cong \left(\mathbf{Dr}_{i \in \mathbb{N}} D_i \right)^\chi$.*

2. $Z(G) = A$.

3. *Существуют $G_i \lhd G$, $i \in \mathbb{N}$, такие, что $G = \prod_{i \in \mathbb{N}} G_i$, $G_i \cong D_i$, $G_i \cap A = A_i = Z(G_i)$, $i \in \mathbb{N}$, и для любых $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$ $[G_i, G_j] = 1$.*

4. *Для группы G справедливы все утверждения предложения* 2 (*см. ниже*).

Замечания. **1.** Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ найдется квазипростая группа G с циклическим центром порядка n. Действительно, пусть F — произвольное поле, мультипликативная группа которого содержит элемент порядка n, и $n \mid m \in \mathbb{N}$. Тогда $Z(\mathbf{SL}_m(F))$ — конечный циклический, и $n \,\big|\, |Z(\mathbf{SL}_m(F))|$. Пусть $K \leq Z(\mathbf{SL}_m(F))$ и $|Z(\mathbf{SL}_m(F)) : K| = n$. В таком случае, очевидно, $G = \mathbf{SL}_m(F)/K$ — требуемая группа. В частности, $G = \mathbf{SL}_n(F)$ — квазипростая группа с циклическим центром порядка n.

2. Для произвольной конечной абелевой группы A существуют квазипростые квазиконечные группы G с $Z(G) \cong A$ и бесконечной неабелевой простой фактор-группой G/A, все собственные подгруппы которой циклические (А. Ю. Ольшанский [12]).

Теорема 2. *Пусть G — группа. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1. *Подгруппа $L(G)$ полупростая.*

2. *Если* $G_\lambda \trianglelefteq L(G)$, $\lambda \in \Lambda$, $L(G) = \prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ *и все* G_λ *квазипростые, то для любых* $\lambda, \alpha \in \Lambda$, $\alpha \neq \lambda$ $[G_\lambda, G_\alpha] = 1$, *и для произвольной полупростой подгруппы* H lasc G (*в частности,* H asc G, H sn G) *при некотором* $\Delta \subseteq \Lambda$ $H = \prod_{\lambda \in \Delta} G_\lambda$.

Из утверждения 2 теоремы 2 легко вытекает следующее предложение.

Следствие 1. *При условиях теоремы 2 выполняются соотношения*

$$H \trianglelefteq L(G) \quad \text{и} \quad H \operatorname{sn} G;$$

$$L(G) = H \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \Delta} G_\lambda \quad \text{и} \quad H \cap \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \Delta} G_\lambda \subseteq Z(L(G));$$

$$L(G)/Z(L(G)) = \underset{\lambda \in \Lambda}{\times} (G_\lambda Z(L(G))/Z(L(G))).$$

Теорема 3. *Для* M'*-группы* G *следующие утверждения равносильны*:

а) G *— черниковская*;

б) G *почти локально разрешима*;

в) *подгруппа* $L(G)$ *почти локально разрешима*;

г) *подгруппа* $L(G)$ *конечна*;

д) *центр подгруппы* $L(G)$ *конечен.*

В частности, произвольная локально разрешимая M'*-группа является черниковской.*

Из теоремы 3 непосредственно вытекает следующее предложение.

Следствие 2 (С. Н. Черников [1], § 5). *Каждая локально нильпотентная* M'*-группа экстремальна.*

(Ранее черниковские группы, следуя С. Н. Черникову, называли экстремальными.)

Лемма 1. *Пусть* G *— квазипростая группа,* φ *— ее гомоморфизм,* N sn G. *Тогда*:

1. *Если* $G^\varphi \neq 1$, *то* G^φ *квазипростая.*

2. *Если* $N \neq G$, *то* $N \subseteq Z(G)$.

3. $Z(G^\varphi) = Z(G)^\varphi$.

4. *Для произвольной нормальной системы* $\mathcal{M}$ *группы* G *с субнормальными в* G *членами* $Z(G) \supseteq H = \bigcup_{M \in \mathcal{M}, M \neq G} M$ *и* G/H *— квазипростой фактор* $\mathcal{M}$.

5. G *не является ни локально разрешимой, ни* RI*-группой.*

Доказательство. 1. Утверждение 1 очевидно.

2. Пусть $K = \langle N^G \rangle$. Тогда $K \neq G$. Если $K \nsubseteq Z(G)$, то, очевидно, $G = KZ(G)$ и, значит, $G = G' \subseteq K$. Противоречие.

3. Очевидно, $Z(G)^\varphi \subseteq Z(G^\varphi)$. Пусть R — полный прообраз $Z(G^\varphi)$ в G. Тогда $R \trianglelefteq G$ и, значит, в силу утверждения 2 $R \subseteq Z(G)$. Поэтому $Z(G^\varphi) = R^\varphi \subseteq Z(G)^\varphi$.

4. Утверждение 4 — непосредственное следствие утверждения 2.

5. В силу локальной теоремы Мальцева локально разрешимая группа является RI-группой. Пусть G — RI-группа, $\mathcal{M}$ — ее инвариантная система с абелевыми факторами и H — из утверждения 4. Тогда в силу этого утверждения $H \subseteq Z(G)$. Очевидно, G/H абелева. Следовательно, $G/Z(G)$ абелева. Противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть G — группа, $H \lhd G$ и $K \operatorname{sn} G$, $H \nsubseteq K$ и H квазипростая. Тогда* $[H, K] = 1$.

Доказательство. Пусть $K_0 = K \subset K_1 \subset \ldots \subset K_n = G$ и $K_i \lhd K_{i+1}$, $i = 0, \ldots$ $\ldots, n-1$. Тогда для некоторого $m \in \mathbb{N}^+$, $m \leq n-1$ $H \nsubseteq K_m$ и $H \subseteq K_{m+1}$. Ввиду утверждения 2 леммы 1 $H \cap K_m \subseteq Z(H)$. Поэтому, очевидно, H стабилизирует ряд $1 \subseteq H \cap K_m \trianglelefteq K_m$. Следовательно, ввиду теоремы Калужнина (см., например, [11]) $H / C_H(K_m)$ абелева и, значит, $C_H(K_m) \supseteq H' = H$, т. е. $1 =$ $= [H, K_m] \supseteq [H, K]$.

Лемма 3. *Если группа G полупростая, то* $G' = G$.

Доказательство. Действительно, при $G = 1$ $G = G'$, а при $G \neq 1$ для некоторых квазипростых $G_\lambda \trianglelefteq G$, $\lambda \in \Lambda$, $G = \prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$. Поэтому $G' \supseteq \prod_{\lambda \in \Lambda} G'_\lambda =$ $= \prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda = G$.

Лемма 4. *Пусть G — полупростая группа и $|G : Z(G)| < \infty$. Тогда G конечна.*

Доказательство. Действительно, ввиду леммы 3 $G = G'$ и в силу теоремы Шура (см., например, [13], теорема 4.12) G' конечна.

Предложение 1. *Пусть группа G является произведением своих нормальных квазипростых подгрупп G_λ, $\lambda \in \Lambda$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *При* $\alpha \in \Lambda$, $\alpha \neq \lambda$ $[G_\lambda, G_\alpha] = 1$.
2. $Z(G) = \prod_{\lambda \in \Lambda} Z(G_\lambda)$.
3. *Для произвольного гомоморфизма φ группы G* $Z(G^\varphi) = Z(G)^\varphi$.
4. *Если $Z(G)$ черниковский (соответственно, конечен), то для любого гомоморфизма φ группы G $Z(G^\varphi)$ черниковский (соответственно, конечен).*
5. *Произвольный минимальный нормальный делитель M группы G либо совпадает с одной из подгрупп G_λ, либо содержится в $Z(G)$. В частности, M является простой группой.*
6. *Для некоторого $\Delta \subseteq \Lambda$* $\operatorname{Soc}(G) = \left(\times_{\lambda \in \Delta} G_\lambda\right) \times \operatorname{Soc}(Z(G))$. *В частности, $\operatorname{Soc}(G)$ вполне приводим.*
7. *Если подгруппа $N \operatorname{sn} G$ локально разрешима или, более широко, является RI-группой, то она принадлежит к $Z(G)$.*
8. *Все вполне приводимые подгруппы $N \operatorname{sn} G$ лежат в* $\operatorname{Soc}(G)$.

Доказательство. 1, 2. Утверждение 1 справедливо ввиду леммы 2. Следовательно, $[Z(G_\lambda), G_\alpha] = 1$, $\alpha \in \Lambda$. Поэтому $[Z(G_\lambda), G] = \left[Z(G_\lambda), \prod_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha\right] =$ $= 1$, $\lambda \in \Lambda$ и, значит, $\prod_{\lambda \in \Lambda} Z(G_\lambda) \subseteq Z(G)$.

Пусть $g \in Z(G)$. Если для некоторого $\alpha \in \Lambda$ $g \in G_\alpha$, то $g \in Z(G_\alpha)$. Пусть $g \notin G_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$. Тогда для некоторых $\lambda_i \in \Lambda$, $i = 1, 2, \ldots, n$, таких, что $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $j \neq i$, и $g_i \in G_{\lambda_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $g = g_1 g_2 \ldots g_n$. Вследствие утверждения 1 $\left[g, G_{\lambda_i}\right] = \left[g_i, G_{\lambda_i}\right]$. Поэтому $g_i \in Z(G_{\lambda_i})$, а значит, $g_i \in Z(G)$, $i = 1$,

$2, \ldots, n$, и $g \in \prod_{\lambda\in\Lambda} Z(G_\lambda)$. Таким образом, $Z(G) \subseteq \prod_{\lambda\in\Lambda} Z(G_\lambda)$.

3. Действительно, $G_\lambda^\varphi \trianglelefteq G^\varphi$ и $G^\varphi = \prod_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda^\varphi$. Ввиду утверждения 1 леммы 1 при произвольном $\lambda \in \Lambda$ либо подгруппа G_λ^φ квазипростая, либо $G_\lambda^\varphi = 1$. В силу утверждения 3 леммы 1 $Z(G_\lambda^\varphi) = Z(G_\lambda)^\varphi$. Поэтому ввиду утверждения 2 настоящего предложения имеем

$$Z(G^\varphi) = \prod_{\lambda\in\Lambda} Z\left(G_\lambda^\varphi\right) = \prod_{\lambda\in\Lambda} Z(G_\lambda)^\varphi = \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} Z(G_\lambda)\right)^\varphi = Z(G)^\varphi.$$

4. Поскольку гомоморфный образ черниковской группы черниковский, то утверждение 4 справедливо вследствие утверждения 3.

5. Очевидно, если $M \subseteq Z(G)$, то $|M| \in \mathbb{P}$. Пусть $M \nsubseteq Z(G)$. Тогда для некоторого $\alpha \in \Lambda$ $[M, G_\alpha] \neq 1$ и, значит, согласно лемме 2 $G_\alpha \subseteq M$. Поэтому с учетом минимальности M $G_\alpha = M$ и $Z(G_\alpha) = 1$. Следовательно, M — (неабелева) простая подгруппа.

6. Утверждение 6 — несложное следствие утверждения 5.

7. Действительно, вследствие утверждения 5 леммы 1 $G_\lambda \nsubseteq N$, $\lambda \in \Lambda$. Поэтому ввиду леммы 2 $[G_\lambda, N] = 1$, $\lambda \in \Lambda$, и, значит, $N \subseteq Z(G)$.

8. Пусть T — произвольный простой прямой множитель подгруппы N. Тогда $T \operatorname{sn} G$. Если $G_\lambda \nsubseteq T$, $\lambda \in \Lambda$, то в силу леммы 2 $T \subseteq Z(G)$. Поэтому $T \subseteq \operatorname{Soc}(G)$. Если для некоторого $\alpha \in \Lambda$ $G_\alpha \subseteq T$, то, очевидно, $G_\alpha = T \trianglelefteq G$ и, значит, $T \subseteq \operatorname{Soc}(G)$.

Предложение доказано.

Предложение 2. *Пусть бесконечная группа G с черниковским центром является произведением нормальных квазипростых подгрупп G_i, $i \in \mathbb{N}$, таких, что $|Z(G_i)| < \infty$, $i \in \mathbb{N}$, и для любого $n \in \mathbb{N}$ почти при всех $i \in \mathbb{N}$ $|Z(G_i)| > n$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Произвольная подгруппа G_i при подходящем $k = k(i) \in \mathbb{N}$ содержится в $\operatorname{Soc}_k(G)$.*

2. $G = \operatorname{Soc}_\omega(G)$.

3. *При любом $k \in \mathbb{N}^+$ произвольный минимальный нормальный делитель M фактор-группы $G/\operatorname{Soc}_k(G)$ либо совпадает с одной из подгрупп $G_i \operatorname{Soc}_k(G)/\operatorname{Soc}_k(G)$, либо имеет простой порядок и содержится в $Z(G/\operatorname{Soc}_k(G))$. В частности, M — простая группа.*

4. *$Z(G)$ бесконечен и $|Z(G) \cap \operatorname{Soc}_k G| < \infty$, $k \in \mathbb{N}$.*

5. *При любом $k \in \mathbb{N}^+$ множество всех минимальных нормальных делителей группы $G/\operatorname{Soc}_k(G)$ конечно и $\operatorname{Soc}_{k+1}(G)/\operatorname{Soc}_k(G)$ является прямым произведением конечного числа ее (простых) минимальных нормальных делителей.*

6. *При любом $k \in \mathbb{N}^+$ подгруппа $\operatorname{Soc}_{k+1}(G)/\operatorname{Soc}_k(G)$ вполне приводима и содержит все субнормальные вполне приводимые подгруппы группы $G/\operatorname{Soc}_k(G)$.*

7. *При любом $k \in \mathbb{N}^+$ $G/\operatorname{Soc}_k(G)$ не удовлетворяет условию минималь-*

ности для нормальных делителей и $\mathrm{Soc}_k(G)$ удовлетворяет условию минимальности для субнормальных подгрупп.

8. *Если все подгруппы G_i конечны, то $|\mathrm{Soc}_k(G)| < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, и G — периодическая нечерниковская M'-, M''- и FC-группа.*

Доказательство. 1. Поскольку $|Z(G_i)| < \infty$ и ввиду утверждения 2 предложения 1 $Z(G_i) \subseteq Z(G)$, то, очевидно, для некоторого $m \in \mathbb{N}^+$ $Z(G_i) = \mathrm{Soc}_m(Z(G_i)) \subseteq \mathrm{Soc}_m(G)$. Вследствие утверждения 1 леммы 1 либо подгруппа $G_i \mathrm{Soc}_m(G)/\mathrm{Soc}_m(G)$ простая, либо $G_i \mathrm{Soc}_m(G)/\mathrm{Soc}_m(G) = 1$. Поэтому

$$G_i \mathrm{Soc}_m(G)/\mathrm{Soc}_m(G) \subseteq \mathrm{Soc}(G/\mathrm{Soc}_m(G)) = \mathrm{Soc}_{m+1}(G)/\mathrm{Soc}_m(G)$$

и, значит, $G_i \subseteq \mathrm{Soc}_{m+1}(G)$.

2. Ввиду утверждения 1 настоящего предложения

$$G_i \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{Soc}_k(G) = \mathrm{Soc}_\omega(G), \quad i \in \mathbb{N},$$

и, значит,

$$G = \prod_{i \in \mathbb{N}} G_i = \mathrm{Soc}_\omega(G).$$

3–5. Пусть φ — гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Soc}_k(G)$, $k \in \mathbb{N}^+$. Тогда $G^\varphi = \prod_{i \in \mathbb{N}} G_i^\varphi$ и при каждом i $G_i^\varphi \trianglelefteq G^\varphi$ и G_i^φ квазипростая либо $G_i^\varphi = 1$. Поэтому утверждение 3 настоящего предложения справедливо в силу утверждения 5 предложения 1.

Поскольку $Z(G_i) \subseteq Z(G)$, $i \in \mathbb{N}$, и числа $|Z(G_i)|$, $i \in \mathbb{N}$, не ограничены в совокупности, то $Z(G)$ бесконечен.

Пусть $|Z(G) \cap \mathrm{Soc}_k(G)| < \infty$. Тогда почти для всех $i \in \mathbb{N}$ $Z(G_i) \nsubseteq Z(G) \cap \mathrm{Soc}_k(G)$. Поскольку $Z(G_i) \subseteq Z(G)$, то почти для всех $i \in \mathbb{N}$ $Z(G_i) \nsubseteq \mathrm{Soc}_k(G)$. Поэтому почти для каждого $i \in \mathbb{N}$ G_i^φ непростая. Далее, ввиду утверждения 4 предложения 1 $Z(G^\varphi)$ черниковская. Поэтому множество всех подгрупп простых порядков группы $Z(G^\varphi)$ конечно. Тогда вследствие утверждения 3 настоящего предложения все минимальные нормальные делители группы G^φ простые и их множество конечно. Следовательно, $\mathrm{Soc}(G^\varphi)$ — прямое произведение конечного числа нормальных простых подгрупп группы G^φ. Поэтому, очевидно, $|Z(G)^\varphi \cap \mathrm{Soc}(G^\varphi)| < \infty$. Значит, $|Z(G) \cap \mathrm{Soc}_{k+1}(G)| < \infty$.

6. Утверждение 6 справедливо в силу утверждения 5 настоящего предложения и утверждения 8 предложения 1.

7. Вследствие утверждения 5, очевидно, $\mathrm{Soc}_k(G)$ имеет конечный нормальный ряд с простыми факторами. Произвольная группа, которая имеет такой ряд, как известно, удовлетворяет условию минимальности для субнормальных подгрупп.

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}^+$. Пусть $\Delta = \{ i \in \mathbb{N} \mid G_i \nsubseteq \mathrm{Soc}_k(G)\}$. Очевидно, $|\mathbb{N} \setminus \Delta| < \infty$. Понятно, что для каждого $i \in \Delta$ $G_i \mathrm{Soc}_k(G) Z(G)/\mathrm{Soc}_k(G) Z(G)$ — нормальная простая подгруппа группы $G/\mathrm{Soc}_k(G)Z(G)$. Следовательно,

$$G/\mathrm{Soc}_k(G)Z(G) = \underset{i\in\Delta}{\times}(G_i\,\mathrm{Soc}_k(G)Z(G)/\mathrm{Soc}_k(G)Z(G)).$$

Тогда с учетом бесконечности множества Δ $G/\mathrm{Soc}_k(G)Z(G)$ не удовлетворяет условию минимальности для нормальных делителей. Вместе с тем, очевидно, ему не удовлетворяет и фактор-группа $G/\mathrm{Soc}_k(G)$.

8. Пусть все G_i конечны; N — произвольная конечная подгруппа группы G, φ — гомоморфизм G на G/N. Тогда $G_i^{\varphi} \trianglelefteq G^{\varphi}$, $i\in\mathbb{N}$, $G^{\varphi} = \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} G_i^{\varphi}$. Для произвольного $i\in\mathbb{N}$ G_i^{φ} квазипростая либо $G_i^{\varphi}=1$, и $\left|Z(G_i^{\varphi})\right| < \infty$. В силу утверждения 4 предложения 1 $Z(G^{\varphi})$ — черниковский. Очевидно, для любого $n\in\mathbb{N}$ почти при всех $i\in\mathbb{N}$ $\left|Z(G_i^{\varphi})\right| > n$. Поэтому вследствие утверждений 3 и 5 настоящего предложения $1<|\mathrm{Soc}_k(G^{\varphi})|<\infty$. Далее, в силу утверждения 2 $G=\mathrm{Soc}_{\omega}(G)$, и ввиду утверждений 3 и 5 каждый член возрастающего инвариантного ряда

$$1\subset \mathrm{Soc}(G)\subset \mathrm{Soc}_2(G)\subset\ldots\subset \mathrm{Soc}_{\omega}(G) = G$$

группы G конечен. Вследствие утверждения 6 при произвольном $k\in\mathbb{N}^{+}$ $\mathrm{Soc}_{k+1}(G)/\mathrm{Soc}_k(G)$ — максимальная среди нормальных подгрупп группы $G/\mathrm{Soc}_k(G)$, разложимых в прямое произведение конечных простых подгрупп. Таким образом, G является периодической FC-группой, M'- и M''-группой. Поскольку $G/Z(G) = \underset{i\in\mathbb{N}}{\times}(G_iZ(G)/Z(G))$ и $G_iZ(G)/Z(G)\neq 1$, $i\in\mathbb{N}$, то $G/Z(G)$ — нечерниковская.

Предложение доказано.

***Доказательство теоремы* 1.** Пусть $D_0 = A$, φ_i — изоморфизм A_i на $Z(D_i)$, $i\in\mathbb{N}$; для произвольных $i\in\mathbb{N}$ и $a\in A_i$ $f_{ia}\in \underset{i\in\mathbb{N}^{+}}{\mathbf{Dr}}\, D_i$, где $f_{ia}(0)=a^{-1}$, $f_{ia}(i) = a^{\varphi_i}$ и при $j\neq 0, i$ $f_{ia}(j)=1$; $D_k^{*}=\{f\in \underset{i\in\mathbb{N}^{+}}{\mathbf{Dr}}\, D_i \mid f(i)=1 \text{ при } i\neq k\}$, $k\in\mathbb{N}^{+}$; $L = \langle f_{ia}\mid i=1,2,\ldots;\, a\in A_i\rangle$ и $R=\{f\in \underset{i\in\mathbb{N}^{+}}{\mathbf{Dr}}\, D_i \mid f(0)=1\}$. Выберем при любом $k\in\mathbb{N}^{+}$ произвольный элемент $g\in L\cap D_k^{*}$. Поскольку $f_{ia}f_{ib}=f_{iab}$, $f_{ia}^{-1}=f_{ia^{-1}}$ и при любом j $|f_{ia}, f_{jb}|=1$, то, очевидно, для некоторых попарно различных $i_1, i_2, \ldots, i_n\in\mathbb{N}$ и для некоторых элементов $f_{i_l a_l}$, $l=1,2,\ldots,n$, $g = f_{i_1a_1}f_{i_2a_2}\ldots f_{i_na_n}$. Поскольку для любых i_l и $i_r\neq i_l$ $f_{i_ra_r}(i_l)=1$, то $g(i_l) = f_{i_la_l}(i_l)$. Поэтому если $i_l\neq k$, то $f_{i_la_l}(i_l)=1$, а значит, $a_l=1$, и вместе с тем $f_{i_la_l}=1$. Следовательно, если при каждом $l=1,2,\ldots,n$ $i_l\neq k$, то $g=1$. Пусть для некоторого l $i_l=k$. Тогда $k\in\mathbb{N}$ и $g=f_{i_la_l}$. Поэтому $g(0)=1=f_{i_la_l}(0)$. Следовательно, $a_l=1$, в силу чего $f_{i_la_l}=1$. Таким образом, $g=1$. Имеем $L\cap D_k^{*}=1$, $k\in\mathbb{N}^{+}$.

Положим $G_i = D_i^{*}L/L$, $i\in\mathbb{N}$. Пусть ψ — естественный гомоморфизм фактор-группы $D_0^{*}L/L$ на A. Заменив в фактор-группе $\underset{i\in\mathbb{N}^{+}}{\mathbf{Dr}}\, D_i/L$ каждый $g\in D_0^{*}L/L$ на g^{ψ}, очевидно, получим группу G, для которой справедливы утверждения 1 и 3 настоящей теоремы. Утверждение 2 настоящей теоремы также справедливо для группы G, поскольку вследствие утверждения 2 предложения 1 имеем

$$Z(G) = \prod_{i \in \mathbb{N}} Z(G_i) = \prod_{i \in \mathbb{N}} A_i = A.$$

Утверждение 4 настоящей теоремы выполняется ввиду предложения 2.

Теорема 1 доказана.

Предложение 3. *Пусть G — группа, G_λ, $\lambda \in \Lambda$ — ее квазипростые подгруппы и $G_\alpha \trianglelefteq H = \langle G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \rangle$, $\alpha \in \Lambda$; $H, K \trianglelefteq G$ и $G_\lambda \not\subseteq K$, $\lambda \in \Lambda$. Тогда $[H, K] = 1$.*

Доказательство. Очевидно, $[G_\lambda, H \cap K] \subseteq G_\lambda \cap (H \cap K)$. В силу утверждения 2 леммы 1 $G_\lambda \cap (H \cap K) \subseteq Z(G_\lambda)$. Следовательно, G_λ стабилизирует ряд $1 \subseteq G_\lambda \cap (H \cap K) \trianglelefteq H \cap K$ и, значит, ввиду теоремы Калужнина $C_G(H \cap K) \supseteq G'_\lambda = G_\lambda$. Поэтому $C_G(H \cap K) \supseteq \langle G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \rangle = H$, т. е. $H \cap K \subseteq$ $\subseteq Z(H)$. В таком случае H стабилизирует ряд $1 \subseteq H \cap K \trianglelefteq K$. Поэтому снова ввиду теоремы Калужнина $C_G(K) \supseteq H'$. Но $H' = H$ (см. лемму 3). Таким образом, $C_G(K) \supseteq H$, т. е. $[H, K] = 1$.

Предложение 4. *Пусть H и $K \neq H$ — локально субинвариантные квазипростые подгруппы группы G. Тогда $[H, K] = 1$, и если H и K не сопряжены в G, то $\left[\left\langle H^g \mid g \in G \right\rangle, \left\langle K^g \mid g \in G \right\rangle\right] = 1$.*

Доказательство. Второе утверждение настоящего предложения — почти автоматическое следствие первого.

Покажем, что $[H, K] = 1$. Пусть это не так.

Предположим сначала, что для некоторого $g \in G$ $K = H^g$. Очевидно, $H \operatorname{asc} \langle H, g \rangle$. Пусть L — наименьший член возрастающего нормального ряда, соединяющего H с $\langle H, g \rangle$, который содержит элементы a такие, что $H \neq H^a$ и $[H, H^a] \neq 1$. Зафиксируем некоторый элемент a. Очевидно, a не принадлежит ни одному, отличному от L, члену отмеченного ряда. Следовательно, теоретико-множественное объединение M всех таких членов не совпадает с L. Поэтому M предшествует L в ряде и, значит, $M \lhd L$. В силу минимальности L для произвольного $x \in M$ либо $H = H^x$, либо $[H, H^x] = 1$.

Пусть для некоторого $x \in M$ $H^a \neq H^{ax}$ и $[H^a, H^{ax}] \neq 1$. Тогда $H \neq H^{axa^{-1}}$ и $[H, H^{axa^{-1}}] \neq 1$. Следовательно, $axa^{-1} \notin M$. Поскольку $M \lhd L$, то $x \notin M$. Противоречие.

Пусть $R = \langle H^x \mid x \in M \rangle$ и $T = \langle H^{ax} \mid x \in M \rangle$. Тогда $R, T \trianglelefteq M$, и для любого $x \in M$ $H^x \trianglelefteq T$ и $H^{ax} \trianglelefteq R$. Поскольку $[H, H^a] \neq 1$, то $[R, T] \neq 1$. Следовательно, в силу предложения 3 для некоторых $y, z \in M$ $H^y \subseteq T$ и $H^{az} \subseteq R$. Поэтому $H \subseteq T$ и $H^a \subseteq R$, а значит, $R \subseteq T$ и $T \subseteq R$, т. е. $R = T$.

Пусть для любого $x \in M$ $H \neq H^{ax}$. Поскольку H и H^{ax} — нормальные квазипростые подгруппы группы R, то ввиду леммы 2 для любого $x \in M$ $[H, H^{ax}] = 1$. Поэтому

$$1 = [H, \langle H^{ax} \mid x \in M \rangle] = [H, R]$$

и, значит, $H \subseteq Z(R)$. Противоречие.

Таким образом, для некоторого $x \in M$ $H = H^{ax}$. Тогда $H^a \neq H^{ax}$ и, значит,

$$1 = [H^a, H^{ax}] = [H^a, H].$$

Противоречие.

Итак, при произвольном $g \in G$ $K \neq H^g$.

Пусть $U = \langle H^x \mid x \in G \rangle$ и $V = \langle K^x \mid x \in G \rangle$. Вследствие доказанного при произвольном $x \in G$ $H^x \trianglelefteq U$ и $K^x \trianglelefteq V$. Поскольку $[H, K] \neq 1$, то ввиду предложения 3 для некоторых $y, z \in G$ $H^y \subseteq V$ и $K^z \subseteq U$. Поэтому $U = V$. Следовательно, $H, K \trianglelefteq U$, и, значит, в силу леммы 2 $H = K$. Противоречие.

Предложение доказано.

Предложение 5. *Пусть L — неабелева простая подгруппа группы G и L lasc G, $\{ L_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$ — множество всех сопряженных с L в G подгрупп. Тогда $\langle L^G \rangle = \underset{\lambda \in \Lambda}{\times} L_\lambda$, $\langle L^G \rangle$ — минимальный нормальный делитель группы G и если G гиперконечна, то $\langle L^G \rangle$ конечна.*

Доказательство. В силу предложения 4 $[L_\lambda, L_\alpha] = 1$, если $\alpha \neq \lambda$. Поэтому $L_\lambda \trianglelefteq \langle L^G \rangle$, $\lambda \in \Lambda$. Поскольку L_λ — неабелева, то $L_\lambda \nsubseteq Z(\langle L_\alpha \mid \alpha \neq \lambda \rangle)$. Следовательно, $L_\lambda \nsubseteq \langle L_\alpha \mid \alpha \neq \lambda \rangle$. Поэтому с учетом простоты L_λ $L_\lambda \cap \langle L_\alpha \mid \alpha \neq \lambda \rangle = 1$. Следовательно, в силу произвольности λ $\langle L^G \rangle = \underset{\lambda \in \Lambda}{\times} L_\lambda$. Тогда, очевидно, $Z(\langle L^G \rangle) = 1$.

Пусть $N \trianglelefteq G$ и $1 \neq N \subseteq \langle L^G \rangle$. Поскольку $N \nsubseteq Z(\langle L^G \rangle)$, то для некоторого $\nu \in \Lambda$ $[N, L_\nu] \neq 1$ и, значит, $L_\nu \subseteq N$. Но тогда $L_\lambda \subseteq N$, $\lambda \in \Lambda$, т. е. $\langle L^G \rangle = N$. Следовательно, $\langle L^G \rangle$ — минимальный нормальный делитель G.

Если G гиперконечна, то найдется такая конечная N, что $1 \neq N \subseteq \subseteq \langle L^G \rangle$, и, значит, $\langle L^G \rangle$ конечна.

Из предложения 5 легко вытекает следующее предложение.

Следствие 3. *Пусть группа G содержит неабелевы простые локально субинвариантные подгруппы, R — подгруппа, порожденная всеми такими подгруппами, и $\{ H_\beta \mid \beta \in \Delta \}$ — множество всех нормальных замыканий в G таких подгрупп. Тогда*

$$R = \underset{\beta \in \Delta}{\times} H_\beta \subseteq \mathrm{Soc}(G) \neq 1.$$

Доказательство теоремы 2. 1. Пусть G имеет локально субинвариантные квазипростые подгруппы и R порождается всеми такими подгруппами. Тогда ввиду предложения 4 R полупростая, а потому, очевидно, $R = L(G)$.

2. Пусть K — произвольная локально субинвариантная квазипростая подгруппа группы G. Тогда $K \nsubseteq Z(L(G))$. Поэтому при некотором $\alpha \in \Lambda$ $[G_\alpha, K] \neq \neq 1$. В силу предложения 4 $G_\alpha = K$. Отсюда, очевидно, следует справедливость последнего заключения утверждения 2 настоящей теоремы. В силу леммы 2 $[G_\lambda, G_\alpha] = 1$, $\alpha \neq \lambda$. Теорема 2 доказана.

Лемма 5. *Пусть G — такая группа, что $G/Z(G)$ простая. Тогда G' — квазипростая группа.*

Доказательство. Поскольку, очевидно, $(G/Z(G))'' = G/Z(G)$, то $G = = G''Z(G)$. Следовательно, $G' \subseteq G''$ и, значит, $G' = G''$. Понятно, что $Z(G') =$

$= G' \cap Z(G)$. Поэтому $G/Z(G) = G'Z(G)/Z(G) \cong G'/Z(G')$ и, значит, $G'/Z(G')$ — (неабелева) простая.

Лемма 6. *Пусть* $G = \times_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ *и* G_λ — *неабелевы простые,* $N \trianglelefteq G$ *и* $\Delta = \{\lambda \in \Lambda \mid G_\lambda \subseteq N\}$, $L = \times_{\lambda \in \Delta} G_\lambda$ *и* $K = \times_{\lambda \in \Lambda \setminus \Delta} G_\lambda$. *Тогда* $N = L$, $G = N \times K$ *и* $Z(N) = 1$.

Доказательство. Поскольку $G = L \times K$, то в силу леммы С. Н. Черникова $N = L(K \cap N)$. Очевидно, $(K \cap N) \cap G_\lambda = 1$, $\lambda \in \Lambda \setminus \Delta$, а значит, $[K \cap N, G_\lambda] = 1$, $\lambda \in \Lambda \setminus \Delta$, в силу чего $[K \cap N, K] = 1$ и $K \cap N \subseteq Z(K) = 1$. Таким образом, $N = L$.

Предложение 6. *Пусть группа* G *имеет возрастающий инвариантный ряд* $\mathcal{N}$ *с абелевыми и с вполне приводимыми факторами, каждый член которого допустим относительно некоторой группы* F *ее операторов;* N — *максимальная среди нормальных нильпотентных ступени* ≤ 2 *подгрупп группы* G, *допустимых относительно* F. *Тогда* $C_G(L(G)N) = Z(L(G)N)$, *и в случае, когда все факторы* $\mathcal{N}$ *абелевы,* $L(G) = 1$ *и* $C_G(N) = Z(N)$.

Доказательство. Очевидно, $\mathcal{N}$ входит в некоторый возрастающий инвариантный ряд $\mathcal{M}$ допустимых относительно F подгрупп группы G с абелевыми факторами и с вполне приводимыми факторами без центра. Можно считать, что $\mathcal{N} = \mathcal{M}$. Далее, поскольку в силу утверждения 5 леммы 1 квазипростые группы не гиперабелевы, то в отмеченном случае $L(G) = 1$.

Пусть настоящее предложение неверно; H — наименьший среди всех $X \in \mathcal{N}$, для которых $X \cap C_G(L(G)N) \nsubseteq L(G)N$, K — предшествующий H член $\mathcal{N}$, $A = H \cap C_G(L(G)N)$ и $B = K \cap C_G(L(G)N)$. Тогда $A, B \trianglelefteq G$ и A, B допустимы относительно F; $B \subseteq Z(A)$ и A/B изоморфна нормальной подгруппе группы H/K. В частности, с учетом леммы 6 A/B либо абелева, либо вполне приводима с $Z(A/B) = 1$.

Пусть A/B абелева. Тогда A — нильпотентная ступени ≤ 2. Поскольку $[N, A] = 1$, то NA — нильпотентная ступени ≤ 2. Очевидно, $NA \trianglelefteq G$ и NA допустима относительно F. Поэтому в силу максимальности N $NA = N$, т. е. $A \subseteq N$. Противоречие.

Пусть A/B — вполне приводимая с $Z(A/B) = 1$; $D/B \trianglelefteq A/B$ и D/B — простая неабелева. Тогда $D \nsubseteq L(G)N$ и в силу леммы 5 D' квазипрост. Так как, очевидно, $D' \operatorname{sn} G$, то ввиду теоремы 2 $D' \subseteq L(G)$. Тогда $D = D'B \subseteq L(G)N$. Противоречие.

Предложение доказано.

Предложение 7. *Пусть при условии предложения* 6 G *периодическая и* $L(G)N$ *черниковская. Тогда* G — *черниковская.*

Доказательство. Поскольку фактор-группа $G/C_G(L(G)N)$ изоморфно вкладывается в $\operatorname{Aut}(L(G)N)$, то с учетом предложения 6 $G/L(G)N$ изоморфна фактор-группе периодической группы автоморфизмов черниковской группы $L(G)N$. Поэтому ввиду [14] (см. также [15, 16]) $G/L(G)N$ — черниковская. Тогда, поскольку класс черниковских групп замкнут относительно взятия расширений (С. Н. Черников, см., например, [4], следствие 1.3), G — черниковская.

Предложение 8. *Пусть группа* G *имеет возрастающий инвариантный ряд* $\mathcal{N}$ *с конечными факторами и членами, допустимыми относительно неко-*

торой группы F операторов группы G; N — такая же, как в предложении 6. Тогда $C_G(L(G)N) = Z(L(G)N)$, и в случае, когда $L(G)N$ — черниковская, G — черниковская.

Доказательство. Поскольку произвольная конечная группа имеет конечный инвариантный ряд характеристических подгрупп с вполне приводимыми факторами, то $\mathcal{N}$ может быть уплотнен до возрастающего инвариантного ряда группы G с вполне приводимыми факторами и допустимыми относительно F членами. С учетом этого настоящее предложение справедливо в силу предложений 6 и 7.

Лемма 7. *Пусть G — группа и N — ее произвольный конечный нормальный делитель. Тогда:*

1. *При некотором $k \in \mathbb{N}$ $N \subseteq \mathrm{Soc}_k(G)$.*

2. *Если G цокольно конечна (соответственно, является M'-группой), то и G/N цокольно конечна (соответственно, является M'-группой).*

3. (С. Н. Черников [1], § 5). *Если G бесконечна, то она цокольно конечна в том и только в том случае, когда $|\mathrm{Soc}_i(G)| < |\mathrm{Soc}_{i+1}(G)| < \infty$, $i \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. 1. Действительно, если $N = 1$, то $N = \mathrm{Soc}_0(G)$, а если $N \neq 1$, то N содержит некоторый минимальный нормальный делитель M группы G. Тогда $|N\,\mathrm{Soc}(G)/\mathrm{Soc}(G)| < |N|$, а значит, согласно индуктивному предположению при некотором $l \in \mathbb{N}$ $N\,\mathrm{Soc}(G)/\mathrm{Soc}(G) \subseteq \mathrm{Soc}_l(G/\mathrm{Soc}(G))$. Поэтому $N \subseteq \mathrm{Soc}_{l+1}(G)$.

2. Доказательство утверждения 2 очевидно.

3. *Необходимость* очевидна. *Достаточность.* Понятно, что $1 < |\mathrm{Soc}(G)| < \infty$. Пусть $N \neq 1$. Тогда при некотором $l \in \mathbb{N}$ $\mathrm{Soc}_{l-1}(G) \subset N$ и $\mathrm{Soc}_l(G) \not\subset N$. Если $N = \mathrm{Soc}_l(G)$, то

$$\mathrm{Soc}(G/N) = \mathrm{Soc}_{l+1}(G)/\mathrm{Soc}_l(G) \neq 1 \quad \text{и} \quad |\mathrm{Soc}(G/N)| \leq |\mathrm{Soc}_{l+1}(G)| < \infty.$$

Пусть $N \neq \mathrm{Soc}_l(G)$. Тогда $G/\mathrm{Soc}_{l-1}(G)$ имеет некоторый минимальный нормальный делитель $M/\mathrm{Soc}_{l-1}(G) \nsubseteq N/\mathrm{Soc}_{l-1}(G)$ группы $G/\mathrm{Soc}_{l-1}(G)$. Понятно, что MN/N — минимальный нормальный делитель группы G/N. Таким образом, $\mathrm{Soc}(G/N) \neq 1$. Пусть $C/N = \mathrm{Soc}(G/N)$ бесконечен. В силу утверждения 1 при некотором $k \in \mathbb{N}$ $N \subseteq \mathrm{Soc}_k(G)$. Поскольку $|\mathrm{Soc}_k(G)| < \infty$ и, очевидно,

$$C\,\mathrm{Soc}_k(G)/\mathrm{Soc}_k(G) \subseteq \mathrm{Soc}_{k+1}(G)/\mathrm{Soc}_k(G),$$

то $\mathrm{Soc}_{k+1}(G)/\mathrm{Soc}_k(G)$ бесконечен. Противоречие. Лемма доказана.

Предложение 9. *Пусть G — такая группа, что при каждом $i \in \mathbb{N}^+$ $\mathrm{Soc}_i(G) \neq \mathrm{Soc}_{i+1}(G)$ и $\mathrm{Soc}_{i+1}(G)/\mathrm{Soc}_i(G)$ — прямое произведение конечного числа минимальных нормальных делителей группы $G/\mathrm{Soc}_i(G)$; $M \trianglelefteq G$ и $M \nsubseteq \mathrm{Soc}_i(G)$, $i = 1, 2, \ldots$. Тогда $M \cap \mathrm{Soc}_\omega(G)$ содержит подгруппу $N \trianglelefteq G$ такую, что $N \cap \mathrm{Soc}_i(G) \neq N \cap \mathrm{Soc}_{i+1}(G)$, $i = 1, 2, \ldots$, и произвольная истинная подгруппа $K \lhd G$ группы N содержится в одной из подгрупп $\mathrm{Soc}_i(G)$, $i \in \mathbb{N}$. В случае, когда все $\mathrm{Soc}_i(G)$, $i \in \mathbb{N}$, конечны, произвольная истинная подгруппа $K \lhd G$ группы N конечна.*

Доказательство. Пусть $M_0 = M \cap \mathrm{Soc}_\omega(G)$ и для некоторого $k \in \mathbb{N}^+$ уже определены нормальные в G подгруппы M_j, $j = 0, \ldots, k$, такие, что $M_l \supseteq M_j$ при $l \geq j$ и $M_j \not\subseteq \mathrm{Soc}_i(G)$, $i = 1, 2, \ldots$. Среди всех подгрупп $X \trianglelefteq G$, $X \subseteq M_k$, для которых

$$X \not\subseteq \mathrm{Soc}_i(G),\ i = 1, 2, \ldots, \quad \text{и} \quad X \cap \mathrm{Soc}_k(G) = M_k \cap \mathrm{Soc}_k(G),$$

выберем X^* с минимальным числом множителей у разложения группы $X^* \mathrm{Soc}_k(G) / \mathrm{Soc}_k(G) \cap \mathrm{Soc}_{k+1}(G) / \mathrm{Soc}_k(G)$ в прямое произведение минимальных нормальных делителей фактор-группы $G / \mathrm{Soc}_k(G)$. Пусть $M_{k+1} = X^*$ и $N = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} M_k$. Очевидно,

$$N \mathrm{Soc}_k(G) / \mathrm{Soc}_k(G) \cap \mathrm{Soc}_{k+1}(G) / \mathrm{Soc}_k(G) =$$
$$= M_{k+1} \mathrm{Soc}_k(G) / \mathrm{Soc}_k(G) \cap \mathrm{Soc}_{k+1}(G) / \mathrm{Soc}_k(G), \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Предположим, что существует подгруппа $L \triangleleft G$ такая, что $N \supset L \not\subseteq \mathrm{Soc}_i(G)$, $i = 1, 2, \ldots$. Пусть m — наименьшее среди всех $i \in \mathbb{N}^+$, для которых $N \cap \mathrm{Soc}_{i+1}(G) \neq L \cap \mathrm{Soc}_{i+1}(G)$. Поскольку $N \cap \mathrm{Soc}_m(G) = L \cap \mathrm{Soc}_m(G)$, то

$$N \mathrm{Soc}_m(G) / \mathrm{Soc}_m(G) \cap \mathrm{Soc}_{m+1}(G) / \mathrm{Soc}_m(G) \neq$$
$$\neq L \mathrm{Soc}_m(G) / \mathrm{Soc}_m(G) \cap \mathrm{Soc}_{m+1}(G) / \mathrm{Soc}_m(G).$$

Но тогда в разложении подгруппы $L \mathrm{Soc}_m(G) / \mathrm{Soc}_m(G) \cap \mathrm{Soc}_{m+1}(G) / \mathrm{Soc}_m(G)$ в прямое произведение минимальных нормальных делителей группы $G / \mathrm{Soc}_m(G)$ число прямых множителей строго меньше того же числа для подгруппы $M_{m+1} \mathrm{Soc}_m(G) / \mathrm{Soc}_m(G) \cap \mathrm{Soc}_{m+1}(G) / \mathrm{Soc}_m(G)$. Противоречие. Предложение доказано.

Предложение 10. *Локально разрешимый радикал R M'-группы G — черниковский.*

Доказательство. Пусть N — максимальная среди нормальных нильпотентных ступени ≤ 2 подгрупп группы G; A, $B/Z(N)$ и C/B' — подгруппы, порожденные всеми элементами несоставных порядков соответственно из подгрупп $Z(N)$, $N/Z(N)$ и B/B'. Если A бесконечна, то, поскольку $|\mathrm{Soc}_i(G)| < \infty$, $i \in \mathbb{N}$, имеем $A \not\subseteq \mathrm{Soc}_i(G)$, $i \in \mathbb{N}^+$. Поэтому вследствие предложения 9 подгруппа A содержит некоторую бесконечную нормальную в G подгруппу D, все нормальные в G истинные подгруппы которой конечны. Поскольку G гиперконечна и D вполне приводима, то в силу следствия 2 [7] D содержит истинную нормальную в G бесконечную подгруппу. Противоречие. Итак, $|A| < \infty$.

Покажем, что $B' \subseteq A$. Можно считать, что $B/Z(N) \neq 1$. Пусть $gZ(N)$, $hZ(N) \in N/Z(N)$ и элемент $gZ(N)$ имеет простой порядок p. Тогда $[g, h] \in Z(N)$ и, значит, $[g, h]^p = [g^p, h] = 1$. Следовательно, $[g, h] \in A$. Поэтому ввиду произвольности элемента $gZ(N)$ $B' \subseteq A$.

Поскольку $|B'| \leq |A| < \infty$, то в силу утверждения 2 леммы 7 G/B' — M'-группа. Учитывая это и заменяя в проведенных выше рассуждениях G на G/B' и A на C/B', убеждаемся в том, что $|C/B'| < \infty$. Тогда ввиду леммы

1.10 [4] B/B' и вместе с тем $B/Z(N)$ удовлетворяют условию минимальности для подгрупп. Поэтому вследствие леммы 1.3 [4] $|B:Z(N)| < \infty$. Так как $|A|$, $|B/Z(N)| < \infty$, то вследствие лемм 1.10, 1.3 [4] $Z(N)$ и $N/Z(N)$ — черниковские. Поэтому ввиду следствия 1.3 [4] N — черниковская.

Поскольку подгруппа R локально разрешима и имеет возрастающий инвариантный ряд с конечными факторами и нормальными в G членами, то, понятно, что она имеет такой ряд с абелевыми факторами. Так как R гиперабелева, то вследствие утверждения 5 леммы 1 $L(R) = 1$. Пусть в предложении 8 G и F — соответственно R и G из настоящего предложения. Поскольку подгруппа N $(= NL(R))$ черниковская, то ввиду предложения 8 R — черниковская.

Предложение доказано.

Предложение 11. *Для полупростой группы G следующие условия равносильны:*

а) *G конечна;*

б) *G почти локально разрешима;*

в) *G является почти RI-группой;*

г) *G содержит подгруппу N конечного индекса, имеющую нормальную систему с абелевыми факторами и нормальными в G членами.*

Доказательство. Понятно, что а) $\to$ б) $\to$ в) $\to$ г). Пусть $G \neq 1$ и выполняется условие г). В силу теоремы Пуанкаре $\left| G : \bigcap_{g\in G} N^g \right| < \infty$. Пусть $M = \bigcap_{g\in G} N^g$ и Q — произвольная квазипростая нормальная подгруппа группы G. В силу утверждения 4 леммы 1 Q не имеет таких, как у N, систем. Поэтому $Q \not\subseteq M$ и, значит, ввиду леммы 2 $[Q, M] = 1$. Следовательно, с учетом полупростоты G $M \subseteq Z(G)$ и, значит, $|G : Z(G)| < \infty$. Поэтому в силу леммы 4 G конечна.

Предложение 12. *Пусть G — M'-группа, H — ее вполне приводимая подгруппа с $Z(H) = 1$, причем $H \operatorname{lasc} G$. Тогда H конечна.*

Доказательство. Пусть $H \neq 1$ и L — множитель разложения H в прямое произведение простых подгрупп. Тогда H неабелева и $H \operatorname{lasc} G$. Поэтому в силу предложения 5 $\langle L^G \rangle$ — минимальный нормальный делитель группы G. Следовательно, $L \subseteq \operatorname{Soc}(G)$ и ввиду произвольности L $H \subseteq \operatorname{Soc}(G)$. Поскольку $\operatorname{Soc}(G) < \infty$, то $|H| < \infty$.

Доказательство теоремы 3. Очевидно, а) $\to$ б) $\to$ в) $\to$ г) $\to$ д). Пусть справедливо утверждение д). Тогда ввиду утверждения 1 леммы 7 при некотором $k \in \mathbb{N}^+$ $Z(L(G)) \subseteq \operatorname{Soc}_k(G)$. Вследствие утверждений 2 и 3 леммы 7 $|\operatorname{Soc}_k(G)| < \infty$ и $G/\operatorname{Soc}_k(G)$ — M'-группа. В силу утверждения 1 теоремы 2 $L(G)$ полупростая. Тогда, очевидно, $L(G)\operatorname{Soc}_k(G)/\operatorname{Soc}_k(G)$ — полупростая группа с единичным центром. Вместе с этим она вполне приводимая или единичная. Следовательно, ввиду предложения 12 $L(G)\operatorname{Soc}_k(G)/\operatorname{Soc}_k(G)$ конечна. Поэтому справедливо утверждение г). Пусть R — локально разрешимый радикал группы G. В силу предложения 10 подгруппа $RL(G)$ — черниковская. Следовательно, ввиду предложения 8 справедливо утверждение а). Теорема доказана.

1. *Черников С. Н.* Условия конечности в общей теории групп // Успехи мат. наук. – 1959. – **14**, № 5. – С. 45–96.

2. *Baer R.* Groups with descending chain condition for normal subgroups // Duke J. Math. – 1949. – **16**, № 1. – P. 1–22.
3. *Курош А. Г.* Теория групп. – 3-е изд. доп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
4. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп (серия „Современная алгебра"). – М.: Наука, 1980. – 384 с.
5. *Мухаммеджан Х. Х.* О группах с возрастающим центральным рядом // Мат. сб. – 1951. – **28**, № 1. – С. 185–196.
6. *Мухаммеджан Х. Х.* О группах, обладающих возрастающим центральным рядом // Там же. – 1956. – **39**, № 2. – С. 201–218.
7. *Черников Н. С.* О цокольных и цокольно конечных группах // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 7-8. – С. 1066–1069.
8. *Горенстейн Д.* Конечные простые группы. Введение в их классификацию. – М.: Мир, 1985. – 352 с.
9. *Плоткин Б. И.* Группы автоморфизмов алгебраических систем. – М.: Наука, 1966. – 604 с.
10. *Черников Н. С.* Факторизация периодических локально разрешимых групп локально нильпотентными и нильпотентными подгруппами // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 12. – С. 1097–1117.
11. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. – М.: Наука, 1972. – 240 с.
12. *Ольшанский А. Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группах (серия „Современная алгебра", вып. 16). – М.: Наука, 1989. – 448 с.
13. *Robinson D. J. S.* Finiteness conditions and generalized soluble groups. – Berlin etc.: Springer, 1972. – Pt 1. – 210 p.
14. *Baer R.* Finite extensions of abelian groups with minimum condition // Trans. Amer. Math. Soc. – 1955. – **79**, № 2. – P. 521–540.
15. *Половицкий Я. Д.* Слойно экстремальные группы // Докл. АН СССР. – 1960. – **134**, № 3. – С. 533–535.
16. *Черников С. Н.* О периодических группах автоморфизмов экстремальных групп // Мат. заметки. – 1968. – **4**, № 1. – С. 91–96.

Получено 04.03.2002