УДК 512.542

Х. А. Аль-Шаро (Иордания),
Л. А. Шеметков (Гомел. ун-т, Беларусь)

О ПОДГРУППАХ ПРОСТОГО ПОРЯДКА В КОНЕЧНОЙ ГРУППЕ*

We study finite groups with a condition of generalized normality for subgroups of prime orders.

Вивчаються скінченні групи з умовою узагальненої нормальності для підгруп простих порядків.

1. Введение. С. Н. Черников внес выдающийся вклад в изучение групп с ограничениями для подгрупп и, в частности, в исследование групп с различными условиями нормальности для подгрупп. К этому направлению исследований относится и настоящая работа.

Будем рассматривать только конечные группы. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая S-замкнутая насыщенная формация и G — группа, у которой все подгруппы простых порядков содержатся в $\mathfrak{F}$-гиперцентре $Z_{\mathfrak{F}}(G)$. В работе [1] изучалось строение группы G при условии, что она разрешима. В работе [2] группа G не предполагалась разрешимой, но дополнительное условие накладывалось на формацию $\mathfrak{F}$. Цель настоящей статьи состоит в нахождении общих свойств группы G, из которых результаты работ [1, 2] вытекают как частные случаи. При этом мы ослабляем и ограничение, накладываемое на $\mathfrak{F}$: вместо условия насыщенности мы используем более слабое условие π-насыщенности.

Используемые обозначения стандартны [3, 4]. Через π обозначается некоторое фиксированное непустое множество простых чисел; π' — множество всех простых чисел, не входящих в π; $\pi(G)$ — множество всех простых делителей порядка группы G; $\pi(\mathfrak{X}) = \bigcup_{G\in\mathfrak{X}} \pi(G)$; $\mathcal{K}(G)$ — множество всех простых групп, изоморфных композиционным факторам группы G. Если H/K — нормальная секция группы G, то $c_G(H/K)$ — подгруппа, порожденная всеми такими нормальными подгруппами N группы G, что $N \supseteq K$ и $\mathcal{K}(N/K)\cap\mathcal{K}(H/K)=\varnothing$. Группу, порядок которой делится на числа из π, называем, следуя С. А. Чунихину, πd-группой.

2. $\mathfrak{F}$-гиперцентр. Напомним определение π-насыщенной формации. Формация $\mathfrak{F}$ называется π-насыщенной, если из условия $G/O_\pi(\Phi(G))\in\mathfrak{F}$ всегда следует $G\in\mathfrak{F}$. Понятно, что это определение можно сформулировать иначе: формация $\mathfrak{F}$ является π-насыщенной тогда и только тогда, когда из $G/N\in\mathfrak{F}$, где N — некоторая нормальная π-подгруппа из G, содержащаяся в $\Phi(G)$, следует $G\in\mathfrak{F}$. Нам понадобится тот факт (см. [5]), что каждая непустая π-насыщенная формация может быть охарактеризована как класс групп с обобщенными центральными рядами. Функция $f:\pi\bigcup\{\pi'\}\to\{\text{формации}\}$ называется π-локальным спутником. Нормальная секция (в частности, главный фактор) $H/K\neq 1$ группы G называется f-центральной в G, если выполняется одно из следующих условий: 1) H/K — π'-группа и $G/c_G(H/K)\in f(\pi')$; 2) H/K — πd-группа и $G/C_G(H/K)\in f(p)$ для любого $p\in\pi\cap\pi(H/K)$. В [5] показано, что класс $\mathfrak{F}$ всех групп, у которых все главные факторы f-центральны, является непустой формацией; функция f называется π-локальным спутником этой формации $\mathfrak{F}$. Запись $\mathfrak{F}=LF_\pi(f)$ означает, что $\mathfrak{F}$ — формация с π-локальным спутником f; спутник f называется внутрен-

* Выполнена при финансовой поддержке Белорусской межвузовской программы фундаментальных исследований (проект ГБЦМ 01.31).

ним, если все его значения лежат в $LF_\pi(f)$. В [6] показано, что каждая непустая π-насыщенная формация имеет наибольший внутренний π-локальный спутник; такой спутник называется каноническим и обозначается большой латинской буквой. Таким образом, запись $\mathfrak{F} = LF_\pi(F)$ означает, что F — канонический π-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$.

Сформулируем три леммы о свойствах π-насыщенных формаций; их подробные доказательства приведены в работах [5, 6].

Лемма 1. *Если $\mathfrak{F}$ — непустая π-насыщенная формация, то $\mathfrak{N}_{\pi'}\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, и если $\mathfrak{F} = LF_\pi(F)$ и $\mathfrak{N}_{\pi'}\mathfrak{F} = LF(H)$, то $F(p) = H(p)$ для любого $p \in \pi$.*

Доказательство леммы 1 нетрудно вывести из теоремы 1 работы [6]. Известно, что если насыщенная формация $LF(F)$ S-замкнута, то $F(p)$ S-замкнута для любого простого числа p (см. [3, с. 365], предложение 3.16). Отсюда с учетом леммы 1 получаем следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть формация $\mathfrak{F} = LF_\pi(F)$ является S-замкнутой. Тогда $F(p)$ S-замкнута для любого $p \in \pi$.*

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{F} = LF_\pi(f) = LF_\pi(F)$. Тогда $\mathfrak{F}$ имеет внутренний π-локальный спутник f_1, причем $f_1(\pi') = f(\pi') \cap \mathfrak{F}$, $F(\pi') = \mathfrak{F}$, а для любого $p \in \pi$ имеет место $f_1(p) = f(p) \cap \mathfrak{F}$, $F(p) = \mathfrak{N}_p f_1(p)$.*

Определение 1. *Пусть $\mathfrak{F} = LF_\pi(f) = LF_\pi(F)$. Нормальная подгруппа K группы G называется: 1) f-гиперцентральной, если все G-главные факторы подгруппы K f-центральны в G; 2) $\mathfrak{F}$-гиперцентральной, если K F-гиперцентральна. F-центральные главные факторы будем называть также $\mathfrak{F}$-центральными. Главный фактор, не являющийся $\mathfrak{F}$-центральным, называется $\mathfrak{F}$-эксцентральным.*

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{F} = LF_\pi(f)$, A и B — f-гиперцентральные нормальные подгруппы группы G. Тогда AB также является f-гиперцентральной в G.*

Доказательство. По условию все G-главные факторы подгруппы B f-центральны в G. Поэтому нам достаточно показать, что все G-главные факторы между AB и B являются f-центральными. Пусть $AB \supseteq H \supset K \supseteq B$, где H/K — главный фактор группы G. Ввиду тождества Дедекинда $K = K_1 B$, $H = H_1 B$, где $K_1 = A \cap K$, $H_1 = A \cap H$. Очевидно, $K_1 \cap B = H_1 \cap B = A \cap B$. Рассмотрим функцию $t: aB \to a(A \cap B)$, где $a \in A$. Функция t является G-изоморфным отображением группы AB/B на группу $A/A \cap B$. Очевидно, $(H/B)^t = H_1/A \cap B$, $(K/B)^t = K_1/A \cap B$. Поскольку t — G-изоморфизм, то $H_1/A \cap B/K_1/A \cap B$ является G-главным фактором группы $A/A \cap B$, а значит, H_1/K_1 и H/K — G-изоморфные главные факторы. Понятно, что если H/K — πd-группа, то оба фактора H_1/K_1 и H/K f-центральны. Пусть H/K — π'-группа и $C = c_G(H_1/K_1)$. Так как H_1/K_1 по условию f-централен, то $G/C \in f(\pi')$. А поскольку $C \supseteq K_1$, то $CB \supseteq K_1 B = K$. Кроме того,

$$CB/K = CB/K_1B \simeq C/C \cap K_1B = C/K_1(C \cap B).$$

Поэтому из $\mathcal{K}(C/K_1) \cap \mathcal{K}(H_1/K_1) = \varnothing$ вытекает $\mathcal{K}(CB/K) \cap \mathcal{K}(H/K) = \varnothing$, а из $G/C \in f(\pi')$ получаем $G/CB \in f(\pi')$. Таким образом, фактор H/K f-централен в G, что и требовалось доказать.

Лемма 4 позволяет ввести следующее определение.

Определение 2. *Пусть* $\widehat{\mathfrak{F}} = LF_\pi(F)$. *Подгруппа, порожденная всеми* $\widehat{\mathfrak{F}}$-*гиперцентральными нормальными подгруппами группы* G, *называется* $\widehat{\mathfrak{F}}$-*гиперцентром и обозначается через* $Z_{\widehat{\mathfrak{F}}}(G)$.

Ввиду леммы 4 все G-главные факторы $\widehat{\mathfrak{F}}$-гиперцентра группы G являются $\widehat{\mathfrak{F}}$-центральными в G.

Лемма 5. *Пусть* $\widehat{\mathfrak{F}} = LF_\pi(f)$, *где спутник* f *внутренний, и* R — *такая нормальная подгруппа группы* G, *что* $G/R \in \widehat{\mathfrak{F}}$. *Если* R *f-гиперцентральна в* G, *то* $G \in \widehat{\mathfrak{F}}$.

Доказательство. Пусть L — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в R. Очевидно, R/L f-гиперцентральна в G/L. По индукции $G/L \in \widehat{\mathfrak{F}}$. Если L — π'-группа, то $G/C \in f(\pi') \subseteq \widehat{\mathfrak{F}}$, где $C = c_G(L)$. Поскольку $K(C) \cap K(L) = \varnothing$, то $C \cap L = 1$, и получаем $G \in \widehat{\mathfrak{F}}$.

Таким образом, нам достаточно рассмотреть случай, когда $L = R$ является πd-группой и единственной минимальной нормальной подгруппой. Значит, R — p-группа для некоторого $p \in \pi$. Поскольку $\widehat{\mathfrak{F}}$ π-насыщена, то полагаем $\Phi(G) = 1$. По теореме П. Шмида (см. теорему 7.11 из [4]) $C_G(R)$ содержится в R. Таким образом, $G \in \mathfrak{N}_p f(p)$. Согласно лемме 3 $G \in \widehat{\mathfrak{F}}$.

Лемма 6. *Пусть формация* $\widehat{\mathfrak{F}} = LF_\pi(F)$ *является* S-*замкнутой,* H — *подгруппа группы* G. *Если* K — $\widehat{\mathfrak{F}}$-*гиперцентральная нормальная подгруппа группы* G, *то любой* H-*главный* πd-*фактор группы* $K \cap H$ $\widehat{\mathfrak{F}}$-*централен в* H.

Доказательство. Пусть $K = Z_0 \supset \ldots \supset Z_n = 1$ — G-главный ряд группы K, $H_i = Z_i \cap H$. Пусть $H_{i-1} \supseteq L \supset M \supseteq H_i$, где L/M — главный фактор группы H. Ввиду изоморфизма $H_{i-1}Z_i/Z_i \simeq H_{i-1}/H_i$ имеем $\pi(Z_{i-1}/Z_i) \supseteq \supseteq \pi(H_{i-1}/H_i) \supseteq \pi(L/M)$. Пусть $\omega = \pi(L/M) \cap \pi$. Предположим, что $\omega \neq 0$. По условию $G/C_G(Z_{i-1}/Z_i) \in F(p)$ для любого $p \in \omega$, причем по лемме 2 формация $F(p)$ S-замкнута. Поэтому $HC_G(Z_{i-1}/Z_i)/C_G(Z_{i-1}/Z_i)$ принадлежит $F(p)$ для $p \in \omega$. Но тогда $H/H \cap C_G(Z_{i-1}/Z_i)$ принадлежит $F(p)$ для $p \in \omega$. Поскольку группы $H_{i-1}Z_i/Z_i$ и H_{i-1}/H_i являются H-изоморфными, то $H \cap C_G(Z_{i-1}/Z_i)$ входит в централизатор фактора H_{i-1}/H_i, а значит, и в централизатор фактора L/M. Таким образом, фактор L/M $\widehat{\mathfrak{F}}$-централен в H.

3. Минимальные не $\widehat{\mathfrak{F}}$-группы. Группа G называется минимальной не $\widehat{\mathfrak{F}}$-группой, если она не входит в $\widehat{\mathfrak{F}}$, но любая ее собственная подгруппа входит в $\widehat{\mathfrak{F}}$. Обозначим через $\mathcal{M}(\widehat{\mathfrak{F}})$ совокупность всех минимальных не $\widehat{\mathfrak{F}}$-групп.

Следующий результат М. В. Селькина интересен тем, что никаких условий на формацию $\widehat{\mathfrak{F}}$ не накладывается. Напомним, что максимальная подгруппа M называется $\widehat{\mathfrak{F}}$-абнормальной в G, если $MG^{\widehat{\mathfrak{F}}} = G$.

Лемма 7 ([7], см. также[4], лемма 8.5). *Пусть* $\widehat{\mathfrak{F}}$ — *непустая формация,* G — *такая группа, что* $G^{\widehat{\mathfrak{F}}} \not\subseteq \Phi(G)$, *и любая* $\widehat{\mathfrak{F}}$-*абнормальная максимальная подгруппа из* G *принадлежит* $\widehat{\mathfrak{F}}$. *Если* $G^{\widehat{\mathfrak{F}}}/K$ — *главный фактор группы* G, *то* $K = G^{\widehat{\mathfrak{F}}} \cap \Phi(G)$ *и* $\pi\left(G^{\widehat{\mathfrak{F}}}\right) = \pi\left(G^{\widehat{\mathfrak{F}}}/G^{\widehat{\mathfrak{F}}} \cap \Phi(G)\right)$. *В частности, если* $G^{\widehat{\mathfrak{F}}}$ *разрешим, то он является* p-*группой для некоторого простого* p.

Лемма 8. *Пусть* $\widehat{\mathfrak{F}} = LF_\pi(f)$ *и* G — *минимальная не* $\widehat{\mathfrak{F}}$-*группа,* $\widehat{\mathfrak{F}}$-*корадикал* $G^{\widehat{\mathfrak{F}}}$ *которой является разрешимой* π-*группой. Тогда* $G^{\widehat{\mathfrak{F}}}$ *является* p-*группой для некоторого простого* $p \in \pi$ *и выполняются следующие условия:*

1) $G^{\widehat{\mathfrak{F}}}/\Phi\left(G^{\widehat{\mathfrak{F}}}\right)$ — $\widehat{\mathfrak{F}}$-*эксцентральный главный фактор группы* G;

2) $\Phi(G^{\mathfrak{F}}) = G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G) \subseteq Z(G^{\mathfrak{F}}) \cap Z_{\mathfrak{F}}(G)$;

3) *если группа* $G^{\mathfrak{F}}$ *абелева, то она характеристически проста*;

4) *если* $G^{\mathfrak{F}}$ *неабелева, то ее центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают и имеют экспоненту* p;

5) *если* $p > 2$, *то* $G^{\mathfrak{F}}$ *имеет экспоненту* p;

6) *если* $p = 2$, *то экспонента* $G^{\mathfrak{F}}$ *не превышает* 4.

Доказательство. То, что $G^{\mathfrak{F}}$ является p-группой, есть следствие леммы 7. Согласно лемме 1 формация $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_{\pi'}\mathfrak{F}$ является насыщенной. Поскольку $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $G^{\mathfrak{H}} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$, а так как $G/G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{N}_{\pi'}\mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{H}} = (G/G^{\mathfrak{H}})^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_{\pi'}$. Отсюда вытекает $G^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{H}}$. Таким образом, $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$, и можно применить лемму 1 и теорему 24.2 из [4] или теорему VII.6.18 из [3].

Лемма 9. *Пусть* $\mathfrak{F} = LF_{\pi}(F)$ *и* G — *такая минимальная не* $\mathfrak{F}$*-группа, что* $G^{\mathfrak{F}}$ *является неабелевой* 2*-группой и* $2 \in \pi$. *Тогда* $G^{\mathfrak{F}}$ *имеет секцию, изоморфную группе кватернионов порядка* 8.

Доказательство. Предположим, что $G^{\mathfrak{F}}$ свободна от кватернионов (т. е. не имеет секций, изоморфных группе кватернионов порядка 8). Тогда, согласно [8] (см. также [9]), $G^{\mathfrak{F}}$ имеет характеристическую подгруппу K индекса 2. Поскольку $2 \in \pi$, то фактор $G^{\mathfrak{F}}/K$ $\mathfrak{F}$-централен в G, что противоречит лемме 8.

4. О *c*-нормальных подгруппах. В работе [2] было использовано следующее определение. Подгруппа H группы G называется c-нормальной, если в G существует такая нормальная подгруппа K, что $G = HK$ и $H \cap K$ содержится в H_G (через H_G обозначается наибольшая нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в H).

Лемма 10. *Подгруппа* H c*-нормальна в* G *тогда и только тогда, когда* H/H_G *имеет нормальное дополнение в* G/H_G.

Доказательство. Пусть H c-нормальна в G, т. е. $G = HK$, $K \trianglelefteq G$, $H \cap K \subseteq H_G$. Пусть $K_1 = KH_G$. Тогда $G = HK_1$ и $K_1 \cap H = KH_G \cap H = H_G(K \cap H) = H_G$. Значит, K_1/H_G — нормальное дополнение к H/H_G. Обратное утверждение очевидно.

Лемма 11. *Пусть* $\mathfrak{F} = LF_{\pi}(f)$ *и* G — *минимальная не* $\mathfrak{F}$*-группа, причем* $G^{\mathfrak{F}}$ *является* p*-группой для некоторого* $p \in \pi$. *Если* p*-подгруппа* A *из* $G^{\mathfrak{F}}$ c*-нормальна в* G, *то* A *нормальна в* G.

Доказательство. Пусть подгруппа $A \neq 1$ из $G^{\mathfrak{F}}$ является c-нормальной, но не нормальной в G. Тогда $G = AK$, $K \trianglelefteq G$, $K \cap A = A_G \neq A$. Таким образом, G/K — неединичная p-подгруппа, входящая в $\mathfrak{F}$. Значит, $G^{\mathfrak{F}} \subseteq K$ и $A \not\subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Противоречие.

5. Основные результаты. В 1929 г. С. А. Чунихин [10] предложил следующий общий метод исследования. Если нужно доказать вхождение группы G в класс $\mathfrak{F}$, то необходимо рассмотреть ситуацию, когда G не входит в $\mathfrak{F}$ и, следовательно, имеет подгруппу H, являющуюся минимальной не $\mathfrak{F}$-группой. Если при этом удается обнаружить противоречие между свойствами исследуемой группы и строением H, то требуемое предложение таким образом доказывается. Мы используем указанный прием для нахождения условия принадлежности группы насыщенной или π-насыщенной формации.

Определение 3. *Элемент* $x \neq 1$ *группы* G *назовем* $Z_{\mathfrak{F},G}$*-элементом, ес-*

ли выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

1) $K \neq xK \in Z_{\mathfrak{F}}(G/K)$ *для некоторой нормальной подгруппы* K *из* G;

2) *группа* G *имеет такой* $\mathfrak{F}$*-центральный главный фактор* L/K, *что* $x \in L$ *и* $x \notin K$.

Единичный элемент также будем считать $Z_{\mathfrak{F},G}$*-элементом.*

Понятно, что если элемент $x \neq 1$ содержится в $Z_{\mathfrak{F}}(G)$, то он является $Z_{\mathfrak{F},G}$-элементом. Обратное утверждение неверно. Действительно, в сплетении G простой неабелевой группы с группой $P = \langle x \rangle$ простого порядка p элемент x является $Z_{\mathfrak{N},G}$-элементом, но не содержится гиперцентре.

Определение 4. *π-Локальный спутник* f *π-насыщенной формации* $\mathfrak{F}$ *назовем полувнутренним, если для любого* $a \in \pi \cup \{\pi'\}$ *либо* $f(a) \subseteq \mathfrak{F}$, *либо* $f(a)$ *совпадает с классом* $\mathfrak{E}$ *всех групп.*

Нетрудно заметить, что непустая S-замкнутая π-насыщенная формация имеет полувнутренний π-локальный спутник, все значения которого S-замкнуты.

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{F} = LF_{\pi}(f)$ — *S-замкнутая формация, спутник* f *полувнутренний,* N — *такая нормальная π-подгруппа группы* G, *что* $G/N \in \mathfrak{F}$, *но* $G \notin \mathfrak{F}$. *Обозначим через* ω *множество всех тех простых чисел* p *из* $\pi(N)$, *для которых* $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. *Предположим, что каждый ω-элемент простого порядка из* N *является* $Z_{\mathfrak{F},G}$*-элементом. Тогда любая подгруппа* H *группы* G, *являющаяся минимальной не* $\mathfrak{F}$*-группой, имеет следующие свойства*:

1) $H^{\mathfrak{F}}/H^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(H)$ — *$\mathfrak{F}$-эксцентральный главный ωd-фактор группы* H;

2) $\pi(H^{\mathfrak{F}}) = \pi(H^{\mathfrak{F}}/H^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(H)) \subseteq \pi$;

3) *каждый элемент из* $H^{\mathfrak{F}}$, *являющийся* $Z_{\mathfrak{F},G}$*-элементом, содержится в* $H^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(H)$ *и является одновременно* $Z_{\mathfrak{F},H}$*- и* $Z_{\mathfrak{N},H^{\mathfrak{F}}}$*-элементом*;

4) *если* $H^{\mathfrak{F}}$ *разрешима, то* $2 \in \omega$, $H^{\mathfrak{F}}$ *является неабелевой 2-группой экспоненты 4 и имеет секцию, изоморфную группе кватернионов порядка 8*;

5) *если* $H^{\mathfrak{F}}$ *неразрешима, то* $\omega \cap \pi(H^{\mathfrak{F}}) = \{2\}$.

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{F}$ S-замкнута, то $HN/N \in \mathfrak{F}$, а значит, $H^{\mathfrak{F}}$ содержится в N и является π-группой. Пусть элемент $x \neq 1$ из $H^{\mathfrak{F}}$ является $Z_{\mathfrak{F},G}$-элементом. Покажем что x — $Z_{\mathfrak{F},H}$-элемент. По определению, G имеет такой $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор L/K, что $x \in L$ и $x \notin K$. Согласно лемме 6 все H-главные πd-факторы группы $L/K \cap HK/K = K(H \cap L)/K$ $\mathfrak{F}$-центральны в HK/K. Рассмотрим H-изоморфное отображение t группы HK/K на $H/H \cap K$, т. е. $t: hK \to h(H \cap K)$, $h \in H$. Функция t переводит $K(H \cap L)/K$ в $H \cap L/H \cap K$. Так как t — H-изоморфизм, то все H-главные πd-факторы группы $H \cap L/H \cap K$ $\mathfrak{F}$-центральны в $H/H \cap K$, причем x содержится в $H \cap L$, но не содержится в $H \cap K$. Отсюда вытекает, что x — $Z_{\mathfrak{F},H}$-элемент.

Применяя леммы 5 и 7, видим, что $H^{\mathfrak{F}}/H^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(H)$ — $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный ωd-фактор группы H, и $\pi(H^{\mathfrak{F}}) = \pi(H^{\mathfrak{F}}/H^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(H))$. Предположим, что $H^{\mathfrak{F}}$ имеет π-элемент $x \neq 1$, являющийся $Z_{\mathfrak{F},G}$-элементом. Как показано выше, x является $Z_{\mathfrak{F},H}$-элементом. Значит, H имеет такой $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор L/K, что x содержится в L, но не входит в K.

Поскольку $H^{\mathfrak{F}} \cap L$ содержит x и не содержится в K, то из изоморфизма $H^{\mathfrak{F}}L / H^{\mathfrak{F}}K \simeq L/K(H^{\mathfrak{F}} \cap L)$ получаем $L = K(H^{\mathfrak{F}} \cap L)$. Таким образом, факторы L/K и $H^{\mathfrak{F}} \cap L / H^{\mathfrak{F}} \cap K$ H-изоморфны, а значит, оба они $\mathfrak{F}$-центральны в H. Отсюда вытекает, что фактор $H^{\mathfrak{F}} \cap L / H^{\mathfrak{F}} \cap K$ централен в $H^{\mathfrak{F}}$, а значит, x является $Z_{\mathfrak{N}, H^{\mathfrak{F}}}$-элементом. Кроме того, применяя лемму 7, получаем $H^{\mathfrak{F}} \cap L \subseteq H^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(H)$, и поэтому $x \in H^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(H)$. Утверждения 1 – 3 доказаны.

Докажем утверждение 4. Предложим, что $H^{\mathfrak{F}}$ разрешима. Тогда согласно лемме 8 $H^{\mathfrak{F}}$ является p-группой для некоторого $p \in \omega$ и удовлетворяет условиям, перечисленным в лемме 8. Поскольку, как мы показали, все элементы порядка p из $H^{\mathfrak{F}}$ являются $Z_{\mathfrak{F}, H}$-элементами и содержатся в $H^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(H)$, то доказательство утверждения 4 завершается применением лемм 8 и 9.

Предположим теперь, что $H^{\mathfrak{F}}$ неразрешима и порядок $H^{\mathfrak{F}}$ делится на некоторое нечетное простое число $q \in \omega$. Пусть $\mathfrak{H}$ — формация всех q-нильпотентных групп. Известно, что $\mathfrak{H} = LF(h)$, причем $h(q) = (1)$, а $h(r) = \mathfrak{E}$ для всех простых чисел $r \neq q$. Поскольку $H^{\mathfrak{F}} / H^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(H)$ характеристически проста, то $H^{\mathfrak{F}}$ не является q-нильпотентной группой. Пусть H_1 — минимальная не q-нильпотентная подгруппа из $H^{\mathfrak{F}}$. Известно, что H_1 — группа Шмидта, и ее силовская q-подгруппа совпадает с $H_1^{\mathfrak{H}}$. Таким образом, мы имеем формацию $\mathfrak{H}$, группу $H^{\mathfrak{F}}$, в которой каждый элемент порядка q является $Z_{\mathfrak{H}, H^{\mathfrak{F}}}$-элементом, и минимальную не $\mathfrak{H}$-группу H_1. Применяя утверждение 4 теоремы к $\mathfrak{H}$, $H^{\mathfrak{F}}$ и H_1, получаем, что $H_1^{\mathfrak{H}}$ — 2-группа. Приходим к противоречию. Утверждение 5 доказано.

Если $\mathfrak{F} = LF(f)$, то функцию f называем локальным спутником формации $\mathfrak{F}$. Как и выше, спутник f называется полувнутренним, если для любого простого p формация $f(p)$ либо входит в $\mathfrak{F}$, либо совпадает с классом $\mathfrak{E}$ всех групп.

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{F} = LF(f)$ — *S-замкнутая формация, спутник* f *полувнутренний,* $\omega = \{p \in \mathbb{P} : f(p) \subseteq \mathfrak{F}\}$. *Предположим, что каждый ω-элемент простого порядка из* G *является* $Z_{\mathfrak{F}, G}$*-элементом. Тогда любая подгруппа* H *из* G, *являющаяся минимальной не* $\mathfrak{F}$*-группой, имеет следующие свойства*:

1) $H^{\mathfrak{F}} / H^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(H)$ — *$\mathfrak{F}$-эксцентральный главный ωd-фактор группы* H;

2) $\pi(H^{\mathfrak{F}}) = \pi(H^{\mathfrak{F}} / H^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(H))$;

3) *каждый элемент из* $H^{\mathfrak{F}}$, *являющийся* $Z_{\mathfrak{F}, G}$*-элементом, содержится в* $H^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(H)$ *и является одновременно* $Z_{\mathfrak{F}, H}$- *и* $Z_{\mathfrak{N}, H^{\mathfrak{F}}}$*-элементом*;

4) *если* $H^{\mathfrak{F}}$ *разрешима, то* $2 \in \omega$, $H^{\mathfrak{F}}$ *является неабелевой 2-группой экспоненты 4 и имеет секцию, изоморфную группе кватернионов порядка 8*;

5) *если* $H^{\mathfrak{F}}$ *неразрешима, то* $\omega \cap \pi(H^{\mathfrak{F}}) = \{2\}$.

Заметим, что в теореме 1 каждый ω-элемент группы G, имеющий простой порядок, является $Z_{\mathfrak{F}, G}$-элементом. Ясно, что теорема 2 получается из теоремы 1 в случае, когда π — множество всех простых чисел. Сформулируем несколько следствий из теорем 1 и 2. Вначале сформулируем результат, в котором формация может быть ненасыщенной. Возьмем формацию $\mathfrak{N}_\pi$ всех нильпотентных π-групп и формацию $\mathfrak{A}$ всех абелевых групп. Если π не совпадает с множеством всех простых чисел, то формация $\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{A}$ π-насыщена, но не насыщена.

Следствие 1. *Пусть* $\widetilde{\mathfrak{F}} = \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{A}$. *Если коммутант* G' *группы* G *является* π*-группой, а элементы простого порядка и порядка* 4 *из* G' *являются* $Z_{\widetilde{\mathfrak{F}},G}$*-элементами, то* $G \in \widetilde{\mathfrak{F}}$.

Следствие 2. *Пусть* $\widetilde{\mathfrak{F}}$ — *S-замкнутая насыщенная формация. Пусть каждый элемент простого порядка группы* G *является* $Z_{\widetilde{\mathfrak{F}},G}$*-элементом. Если* $G \notin \widetilde{\mathfrak{F}}$, *то* $\widetilde{\mathfrak{F}}$*-корадикал любой ее подгруппы, являющейся минимальной не* $\widetilde{\mathfrak{F}}$*-группой, является неабелевой* 2*-группой экспоненты* 4.

Следствие 3. *Пусть* $\widetilde{\mathfrak{F}} = LF(f)$ — *S-замкнутая формация, где спутник* f *полувнутренний и* $f(2) \in \{\varnothing, \mathfrak{E}\}$. *Пусть* G — *группа и* $\omega = \{ p \in \pi(G) : f(p) \subseteq \widetilde{\mathfrak{F}}\}$. *Если в группе* G *каждый ее* ω*-элемент простого порядка является* $Z_{\widetilde{\mathfrak{F}},G}$*-элементом, то* $G \in \widetilde{\mathfrak{F}}$.

Напомним, что группа G называется p-сверхразрешимой [11], если она p-разрешима и все ее главные p-факторы циклические. Известно, что формация всех p-сверхразрешимых групп имеет полувнутренний локальный спутник f такой, что $f(p)$ — формация всех абелевых групп экспоненты, делящей $p-1$, а $f(q) = \mathfrak{E}$ для любого простого $q \neq p$.

Следствие 4. *Пусть* $\widetilde{\mathfrak{F}}$ — *формация всех* p*-сверхразрешимых групп,* p — *нечетное простое число. Если каждый элемент порядка* p *группы* G *является* $Z_{\widetilde{\mathfrak{F}},G}$*-элементом, то* $G \in \widetilde{\mathfrak{F}}$.

Следствие 5. *Пусть* $\widetilde{\mathfrak{F}}$ — *формация всех* 2*-сверхразрешимых групп. Пусть каждый элемент порядка* 2 *группы* G *является* $Z_{\widetilde{\mathfrak{F}},G}$*-элементом. Тогда* G *либо* 2*-сверхразрешима, либо любая ее минимальная не* 2*-сверхразрешимая подгруппа* H *имеет следующие свойства*:

1) H — *группа Шмидта (т. е. минимальная ненильпотентная группа)*;

2) $H^{\widetilde{\mathfrak{F}}}$ — *неабелева силовская* 2*-подгруппа в* H, *имеющая экспоненту* 4;

3) *ни один элемент порядка* 4 *из* $H^{\widetilde{\mathfrak{F}}}$ *не является* $Z_{\widetilde{\mathfrak{F}},G}$*-элементом.*

Доказательство. Пусть H — минимальная не 2-сверхразрешимая подгруппа из G. Известно, что 2-сверхразрешимые группы 2-нильпотентны (см. [11, 12]). Поэтому H — группа Шмидта. Теперь применяем теорему 2.

Следствие 6. *Пусть* $\widetilde{\mathfrak{F}}$ — *формация всех* p*-нильпотентных групп,* p — *нечетное простое число. Если в группе* G *каждый элемент порядка* p *является* $Z_{\mathfrak{F},G}$*-элементом, то* G p*-нильпотентна.*

Следствие 7. *Пусть* $\widetilde{\mathfrak{F}}$ — *формация всех* 2*-нильпотентных групп. Если в группе* G *каждый элемент порядка* 2 *является* $Z_{\mathfrak{F},G}$*-элементом, то* G *либо* 2*-нильпотентна, либо имеет подгруппу Шмидта* H, *силовская* 2*-подгруппа которой* H_2 *обладает следующими свойствами*:

1) H_2 — *неабелева* 2*-группа экспоненты* 4;

2) *ни один элемент порядка* 4 *из* H_2 *не является* $Z_{\mathfrak{F},G}$*-элементом.*

Следствие 8. *Пусть* $\mathfrak{U}$ — *формация всех сверхразрешимых групп. Если в группе* G *каждый элемент простого порядка является* $Z_{\mathfrak{U},G}$*-элементом, то выполняются следующие условия*:

1) G p*-сверхразрешима для любого простого числа* $p > 2$;

2) *если* G *не сверхразрешима, то любая ее минимальная несверхразре-*

шимая подгруппа H является группой Шмидта с неабелевой нормальной силовской 2-подгруппой экспоненты 4.

Доказательство. Утверждение 1 вытекает из следствия 4, так как любой элемент порядка p является $Z_{\mathfrak{U},G}$-элементом тогда и только тогда, когда он является $Z_{\mathfrak{X},G}$-элементом, где $\mathfrak{X}$ — класс всех p-сверхразрешимых групп. Утверждение 2 вытекает из утверждения 1 и следствия 5.

Следствие 9. *Пусть в группе G каждый элемент простого порядка является $Z_{\mathfrak{N},G}$-элементом. Тогда G p-нильпотентна для любого простого $p > 2$. Если G ненильпотентна, то она содержит подгруппу Шмидта H, у которой силовская 2-подгруппа H_2 является неабелевой группой экспоненты 4, и ни один элемент порядка 4 из H_2 не является $Z_{\mathfrak{N},G}$-элементом.*

Замечание 1. Поскольку каждый элемент $x \neq 1$ из $Z_{\mathfrak{F}}(G)$ является $Z_{\mathfrak{F},G}$-элементом, то в теоремах и следствиях условие „является $Z_{\mathfrak{F},G}$-элементом" можно заменить на „содержится в $Z_{\mathfrak{F}}(G)$". В качестве примера приведем следующий результат, вытекающий из следствия 8.

Следствие 10. *Пусть $\mathfrak{U}$ — формация всех сверхразрешимых групп, N — такая нормальная подгруппа из G, что $G/N \in \mathfrak{U}$. Пусть каждый элемент простого порядка из N содержится в $Z_{\mathfrak{U}}(G)$ (это условие выполняется, если все подгруппы простых порядков из N нормальны в G). Тогда G либо сверхразрешима, либо p-сверхразрешима для любого простого $p > 2$ и любая ее минимальная несверхразрешимая подгруппа является группой Шмидта с нормальной силовской 2-подгруппой экспоненты* 4.

Замечание 2. Ввиду леммы 8 п. 4 в теоремах 1 и 2 можно дополнить следующим утверждением:

$$H^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(H) = \Phi\left(H^{\mathfrak{F}}\right) = Z\left(H^{\mathfrak{F}}\right) = (H^{\mathfrak{F}})' = Z_{\mathfrak{F}}(H) \cap H^{\mathfrak{F}} \text{ – группа экспоненты 2.}$$

Замечание 3. Ввиду леммы 11 из теоремы 1 вытекают теоремы 3.3, 3.4 работы [2].

Замечание 4. Коммутант p-сверхразрешимой группы p-нильпотентен (см. [13], теорема V.9.1). Поэтому из приведенных результатов вытекают теоремы III.5.3, IV.5.5 и IV.5.7 из [13].

1. *Yokoyama A.* Finite solvable groups whose $\mathfrak{F}$-hypercenter contains all minimal subgroups // Arch. Math. – 1975. – **26**, № 2. – P. 123 – 130.
2. *Miao Long, Guo Wenbin.* The influence of c-normality of subgroups on the structure of finite groups // Изв. Гомел. ун-та им. Ф. Скорины. – 2000. – **3** (**16**).– С. 101 – 106.
3. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. – Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. – 892 p.
4. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. – М.: Наука,1978. – 272 с.
5. *Shemetkov L. A.* On partially saturated formations and residuals of finite groups // Communs Algebra. – 2001. – **29** (**9**). – P. 4125 – 4137.
6. *Скиба А. Г., Шеметков Л. А.* Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Мат. тр. – 1999. – **2**, № 2. – С. 114 – 147.
7. *Селькин М. В.* О влиянии максимальных подгрупп на формационное строение конечных групп // Конечные группы. – Минск: Наука и техника, 1975. – С. 151 – 163.
8. *Ward H. N.* Automorphisms of quaternion-free 2-groups // Math. Z. –1969. – **112**, № 1. –P. 52 – 58.
9. *Seitz G. M., Wright C. R. B.* On finite groups whose Sylow subgroups are modular or quaternion-free // J. Algebra. – 1969. – **13**, № 3. – P.374 – 381.
10. *Чунихин С. А.* О специальных группах // Мат. сб. – 1929. – **36**, № 2. – С. 135 – 137.
11. *Чунихин С. А.* О π-свойствах конечных групп // Мат. сб. – 1949. – **25**, № 3. – С. 321 – 346.
12. *Чунихин С. А.* Подгруппы конечных групп. – Минск: Наука и техника, 1964. – 158 с.
13. *Huppert B.* Endliche Gruppen I. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1967. – 793 S.

Получено 18.02.2002