УДК 519.1

С. А. Кругляк (Нац. академия СБУ, Киев)

ФУНКТОРЫ КОКСТЕРА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА $*$-КОЛЧАНОВ

For a certain class of $*$-quivers, we construct the Coxeter functors and present their application to the description of families of orthoprojectors whose sum is a multiple of the unit operator.

Для відповідного класу $*$-колчанів побудовано функтори Кокстера та наведено їх застосування до опису сімей ортопроекторів, сума яких кратна одиничному оператору.

В работе [1] введены и изучены понятия инволютивного колчана и категории его представлений.

В настоящей статье будем рассматривать инволютивные колчаны с инволюцией $*$, для каждой точки a которых $a^* = a$; будем называть их $*$-колчанами. Изучим $*$-представления π таких колчанов в категории сепарабельных гильбертовых пространств. Таким образом, если γ — стрелка, ведущая из точки (i) в точку (j), то $\pi(i) = H_i$, $\pi(j) = H_j$ — сепарабельные гильбертовы пространства, $\pi(\gamma) = \Gamma$ — ограниченный линейный оператор из пространства H_i в пространство H_j, $\pi(\gamma^*) = \Gamma^*$. Морфизм представления π в представление $\tilde{\pi}$ задается набором линейных операторов $C_i \colon H_i \to \tilde{H}_i$ таких, что все диаграммы

$$\begin{tikzcd} H_i \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[d, "C_i"] & H_j \arrow[d, "C_j"] \\ \tilde{H}_i \arrow[r, "\tilde{\Gamma}"] & \tilde{H}_j \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H_i \arrow[d, "C_i"] & H_j \arrow[l, "\Gamma^*"'] \arrow[d, "C_j"] \\ \tilde{H}_i & \tilde{H}_j \arrow[l, "\tilde{\Gamma}^*"'] \end{tikzcd}$$

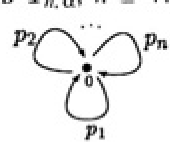
коммутативны, т. е.

$$C_j\Gamma = \tilde{\Gamma}C_i, \qquad C_i\Gamma^* = \tilde{\Gamma}^* C_j. \tag{1}$$

Если колчан имеет лишь конечное число точек $0, 1, 2, \ldots, n$ и пространства $\pi(i) = H_i$ конечномерны, то размерностью представления π называется числовой вектор $(d_0, d_1, \ldots, d_n)$, где $d_i = \dim H_i$. Два представления π и $\tilde{\pi}$ называются эквивалентными, если существует обратимый морфизм $\{C_i\}$ представления π в $\tilde{\pi}$ (операторы C_i обратимы). В [1] доказано, что в этом случае представления π и $\tilde{\pi}$ унитарно эквивалентны, т. е. найдется морфизм представления π в представление $\tilde{\pi}$, для которого все операторы C_i унитарны (категория сепарабельных гильбертовых пространств квадратично замкнута; см. [1]).

Для $*$-колчана Q обозначим через $\operatorname{Rep} Q$ категорию всех $*$-представлений колчана Q.

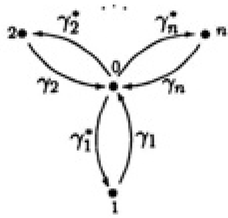
Рассмотрим класс $*$-колчанов $\mathcal{P}_{n,\alpha}$, $n \geq 4$:



с соотношениями

$$p_i = p_i^2 = p_i^*, \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = \alpha\varepsilon,$$

а также класс $*$-колчанов $Q_{n,\alpha}$, $n \geq 4$:



с соотношениями

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \gamma_i^* = \alpha \varepsilon_0, \qquad \gamma_i^* \gamma_i = \varepsilon_i.$$

Σ_n — множество действительных чисел α, для которых колчан $\mathcal{P}_{n,\alpha}(Q_{n,\alpha})$ имеет хотя бы одно (ненулевое) $*$-представление $\pi(\Pi)$ в категории сепарабельных гильбертовых пространств. В дальнейшем мы покажем, что для колчанов $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ и $Q_{n,\alpha}$ это одно и то же множество.

Если $\pi(p_i) = P_i, \pi(\gamma_i) = \Gamma_i$, то выполняются соотношения

$$P_i = P_i^* = P_i^2, \qquad \sum_{i=1}^{n} P_i = \alpha I_0,$$

$$\Gamma_i^* \Gamma_i = I_i, \qquad \sum_{i=1}^{n} \Gamma_i \Gamma_i^* = \alpha I_0. \tag{2}$$

В работах [2, 3] поставлена задача о нахождении множества Σ_n и описании $*$-представлений колчана $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ при $\alpha \in \Sigma_n$, а также получены значительные результаты в этом направлении.

В настоящей статье предлагается другой подход к решению этой задачи, в котором существенным является введение двух функторов Φ^+ и Φ^- на категориях $*$-представлений колчанов $\mathcal{P}_{n,\alpha}$. Будем называть их функторами Кокстера, поскольку их строение и роль при описании представлений колчана $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ во многом сходны со строением и ролью функторов Кокстера Φ^+ и Φ^-, введенных И. Н. Бернштейном, И. М. Гельфандом, В. А. Пономаревым в работе [4].

В статье [5] приведено почти полное описание множества Σ_n (проблемой остается принадлежность к Σ_n или не принадлежность двух точек) и полученные авторами результаты о представлениях колчана $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ при $\alpha \in \Sigma_n$. Здесь же в п. 3 показано, как функторы Кокстера применяются при решении поставленной задачи.

1. Эквивалентность категорий $\mathrm{Rep}\,\mathcal{P}_{n,\alpha}$ и $\mathrm{Rep}\,Q_{n\alpha}$. Построим функтор $F\colon \mathrm{Rep}\,\mathcal{P}_{n,\alpha} \to \mathrm{Rep}\,Q_{n,\alpha}$. Пусть представление $\pi \in Ob\,\mathrm{Rep}\,\mathcal{P}_{n,\alpha}$, $\pi(p_i) = P_i$ — ортопроекторы в пространстве H_0 і $H_i = \mathrm{Im}\,P_i$, Γ_i — естественные вложения (изометрии) H_i в H_0. Тогда $\Gamma_i^*\colon H_0 \to H_i$ — эпиморфизмы и $\Gamma_i^* \Gamma_i = I_{H_i}$, $P_i = \Gamma_i \Gamma_i^*$. Определим представление $F(\pi) = \Pi$ колчана $Q_{n,\alpha}$ следующим образом: $\Pi(i) = H_i$, $\Pi(\gamma_i) = \Gamma_i$, $\Pi(\gamma_i^*) = \Gamma_i^*$.

Пусть C_0 — морфизм представления π в представление $\tilde{\pi}$ $(C_0 P_i = \tilde{P}_i C_0)$. Обозначим через C_i ограничение оператора C_0 на пространство $H_i = \mathrm{Im}\,P_i$.

Тогда $(C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ — морфизм представления Π в представление
Положим $F(C_0) = (C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n)$. Из соотношений (1), (2) легко пол
чить

$$C_i = \tilde{\Gamma}_i^* C_0 \Gamma_i,$$

$$C_0 = \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n} \tilde{\Gamma}_i C_i \Gamma_i^*.$$

Можно построить и „обратный" функтор $F^{(-1)}$: $\operatorname{Rep} Q_{n\alpha} \to \operatorname{Rep} \mathcal{P}_n$
$F^{(-1)}(\Pi) = \pi$, где $\pi(p_i) = \Gamma_i \Gamma_i^*$, и если $(C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ — морфизм пре
ставления Π в представление $\tilde{\Pi}$, то $C_0 = F^{(-1)}(C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ — мо
физм представления $F^{(-1)}(\Pi)$ в представление $F^{(-1)}(\tilde{\Pi})$.

Лемма 1. *Функторы F и $F^{(-1)}$ осуществляют эквивалентность кате*
рий $\operatorname{Rep} \mathcal{P}_{n,\alpha}$ и $\operatorname{Rep} Q_{n,\alpha}$.

Доказательство почти очевидно. Из соотношений 3 следует, что функт
F строгий и полный. Любое представление Π колчана $Q_{n,\alpha}$ эквивалентно о
ному из представлений $F(\pi)$ (например, представлению $FF^{(-1)}(\Pi)$), что и з
вершает доказательство.

2. Функторы Кокстера. Пусть пространства H и $\hat{H}$ разложены в ортог
нальную сумму подпространств:

$$H = H^{(1)} \oplus H^{(2)} \oplus \ldots \oplus H^{(m)}, \qquad \hat{H} = \hat{H}^{(1)} \oplus \hat{H}^{(2)} \oplus \ldots \oplus \hat{H}^{(m)}.$$

Пусть

$$I_H = \mathcal{P}^{(1)} \oplus \mathcal{P}^{(2)} \oplus \ldots \oplus \mathcal{P}^{(m)}, \qquad I_{\hat{H}} = \hat{\mathcal{P}}^{(1)} \oplus \hat{\mathcal{P}}^{(2)} \oplus \cdots \oplus \hat{\mathcal{P}}^{(m)}$$

— соответствующие этим разложениям пространств разложения единичн
операторов в ортогональную сумму ортопроекторов и $A: H \to \hat{H}$ — линейн
оператор. Тогда, вводя обозначения $A_{ij} = \hat{\mathcal{P}}^{(i)} A \mathcal{P}^{(j)}$, получаем пирсовское р
ложение оператора A, изображая при этом A операторной матрицей

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}.$$

Такие матрицы перемножаются по обычным правилам действия с матрицами.

Перейдем к построению функтора $S: \operatorname{Rep} \mathcal{P}_{n,\alpha} \to \mathcal{P}_{n,\alpha/(\alpha-1)}$; $\alpha > 1$. Пусть
— представление колчана $\mathcal{P}_{n,\alpha}$, $\pi(p_i) = P_i$ — ортопроекторы в пространст
H_0 и $F(\pi) = \Pi$ — соответствующее представление колчана $Q_{n,\alpha}$; $\Pi(i) =$
$\Pi(\gamma_i) = \Gamma_i$, $P_i = \Gamma_i \Gamma_i^*$.

Пусть $\mathcal{H} = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n$ $(H_i = \operatorname{Im} P_i)$. Зададим линейный операт
$\Gamma: \mathcal{H} \to H_0$ его пирсовским разложением

$$\Gamma = [\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n].$$

Поскольку $\Gamma\Gamma^* = \sum_{i=1}^{n} \Gamma_i \Gamma_i^* = \sum_{i=1}^{n} P_i = \alpha I_{H_0}$, то $\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\Gamma\right) \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\Gamma^*\right) = I_{H_0}$, так ч
$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\Gamma^*$ — изометрия H_0 в $\mathcal{H}$.

Пусть $\hat{H}_0$ — ортогональное дополнение к $\operatorname{Im}\Gamma^*$ в $\mathcal{H}$. Обозначим через $\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\Delta^*$ естественную изометрию $\hat{H}_0$ в $\mathcal{H}$, тогда $U^* = \left[\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\Delta^*, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\Gamma^*\right]$ — изометрия (унитарный оператор) пространства $\hat{H}_0 \oplus H_0$ на пространство $\mathcal{H}$. Так как $\mathcal{H} = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_n$, оператор U имеет следующее пирсовское разложение:

$$U = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\Delta_1 & \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\Delta_2 & \cdots & \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\Delta_n \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\Gamma_1 & \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\Gamma_2 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\Gamma_n \end{bmatrix},$$

$U: \mathcal{H} \to \hat{H}_0 \oplus H_0$, $\Delta_i: H_i \to \hat{H}_0$, $\Delta_i^*: \hat{H}_0 \to H_i$.

Поскольку $U^*U = I_{\mathcal{H}}$, то

$$\frac{\alpha-1}{\alpha}\Delta_i^*\Delta_i + \frac{1}{\alpha}\Gamma_i^*\Gamma_i = I_{H_i}$$

или (так как $\Gamma_i^*\Gamma_i = I_{H_i}$) $\Delta_i^*\Delta_i = I_{H_i}$, $i = \overline{1,n}$. Кроме того,

$$\frac{\alpha-1}{\alpha}\Delta_i^*\Delta_j + \frac{1}{\alpha}\Gamma_i^*\Gamma_j = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j,$$

так что

$$\Delta_i^*\Delta_j = -\frac{1}{\alpha-1}\Gamma_i^*\Gamma_j \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

Так как $UU^* = I_{\hat{H}_0 \oplus H_0}$, то

$$\frac{\alpha-1}{\alpha}(\Delta_1\Delta_1^* + \dots + \Delta_n\Delta_n^*) = I_{\hat{H}_0}$$

или $\sum_{i=1}^{n}\Delta_i\Delta_i^* = \frac{\alpha}{\alpha-1}I_{\hat{H}_0}$. Кроме этого $\frac{\sqrt{\alpha-1}}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i\Gamma_i^* = 0$, т. е. $\sum_{i=1}^{n}\Delta_i\Gamma_i^* = 0$.

В результате получаем

$$\begin{gathered} \Delta_i^*\Delta_i = I_{H_i}, \quad i = \overline{1,n}, \\ \Delta_i^*\Delta_j = -\frac{1}{\alpha-1}\Gamma_i^*\Gamma_j \quad \text{при} \quad i \neq j, \\ \sum_{i=1}^{n}\Delta_i\Delta_i^* = \frac{\alpha}{\alpha-1}I_{\hat{H}_0}, \\ \sum_{i=1}^{n}\Delta_i\Gamma_i^* = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Из первого и третьего равенств из (4) следует, что операторы Δ_i, Δ_i^* задают представление $\hat{\Pi}$ колчана $Q_{n,\alpha/(\alpha-1)}$; $\hat{\Pi}(0) = \hat{H}_0$, $\hat{\Pi}(i) = \hat{H}_i$ при $i = \overline{1,n}$, $\hat{\Pi}(\gamma_i) = \Delta_i$, $\hat{\Pi}(\gamma_i^*) = \Delta_i^*$.

Пусть $(C_0, C_1, C_2, \dots, C_n)$ — морфизм представления Π в представление $\tilde{\Pi}$. По формуле, аналогичной второй из формул (3), положим

$$\hat{C}_0 = \frac{\alpha-1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\Delta}_i C_i \Delta_i^*.$$

Покажем, что $(\hat{C}_0, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ — морфизм представления $\hat{\Pi}$ в представление $\hat{\hat{\Pi}}$, т. е. $\hat{C}_0\Delta_k = \tilde{\Delta}_k C_k$, $C_k\Delta_k^* = \tilde{\Delta}_k^*\hat{C}_0$, $k = \overline{1,n}$.

Ограничимся подробным доказательством первого из равенств, второе доказывается аналогично. Имеем

$$\hat{C}_0\Delta_k = \frac{\alpha-1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\Delta}_i C_i(\Delta_i^*\Delta_k).$$

В силу первого и второго равенств из (4)

$$\hat{C}_0\Delta_k = -\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\Delta}_i(C_i\Gamma_i^*)\Gamma_k + \frac{\alpha-1}{\alpha}\tilde{\Delta}_k C_k.$$

Вследствие второго из равенств (1) получаем

$$\hat{C}_0\Delta_k = -\frac{1}{\alpha}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\tilde{\Delta}_i\tilde{\Gamma}_i^*(C_0\Gamma_k) + \frac{\alpha-1}{\alpha}\tilde{\Delta}_k C_k,$$

вследствие первого из равенств (1)

$$\hat{C}_0\Delta_k = -\frac{1}{\alpha}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\tilde{\Delta}_i\tilde{\Gamma}_i^*\tilde{\Gamma}_k C_k + \frac{\alpha-1}{\alpha}\tilde{\Delta}_k C_k,$$

а поскольку имеет место четвертое из равенств (4), то

$$\hat{C}_0\Delta_k = \frac{1}{\alpha}\tilde{\Delta}_k\tilde{\Gamma}_k^*\tilde{\Gamma}_k C_k + \frac{\alpha-1}{\alpha}\tilde{\Delta}_k C_k = \frac{1}{\alpha}\tilde{\Delta}_k C_k + \frac{\alpha-1}{\alpha}\tilde{\Delta}_k C_k = \tilde{\Delta}_k C_k,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, мы построили функтор $G: \operatorname{Rep} Q_{n,\alpha} \to \operatorname{Rep} Q_{n,\alpha/(\alpha-1)}$, $G(\Pi) = \hat{\Pi}$, $G(C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = (\hat{C}_0, C_1, C_2, \ldots, C_n)$. Столь же очевидна, как и лемма 1, следующая лемма.

Лемма 2. *Функтор* $G: \operatorname{Rep} Q_{n,\alpha} \to \operatorname{Rep} Q_{n,\alpha/(\alpha-1)}$ *осуществляет эквивалентность категорий.*

Так же, как с помощью функтора $F^{(-1)}$ от категории $\operatorname{Rep} Q_{n,\alpha}$ можно перейти к эквивалентной категории $\operatorname{Rep}\mathcal{P}_{n,\alpha}$, с помощью аналогичного функтора $\hat{F}^{(-1)}$ перейдем к категории $\operatorname{Rep}\mathcal{P}_{n,\alpha/(\alpha-1)}$: $\hat{F}^{(-1)}(\hat{\Pi}) = \hat{\pi}$, где $\hat{\pi}(p_i) = \Delta_i\Delta_i^*$, и если $(\hat{C}_0, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ — морфизм из представления $\hat{\Pi}$ в представление $\hat{\hat{\Pi}}$, то $\hat{F}^{(-1)}(\hat{C}_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = \hat{C}_0$ — морфизм из представления $\hat{\pi}$ в представление $\hat{\hat{\pi}}$.

Определим теперь функтор $S: \operatorname{Rep}\mathcal{P}_{n,\alpha} \to \operatorname{Rep}\mathcal{P}_{n,\alpha/(\alpha-1)}$, $\alpha > 1$, как композицию функторов: $S = \hat{F}^{(-1)}GF$. Поскольку каждый из сомножителей является функтором эквивалентности категорий, справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Функтор* $S: \operatorname{Rep}\mathcal{P}_{n,\alpha} \to \operatorname{Rep}\mathcal{P}_{n,\alpha/(\alpha-1)}$, $\alpha > 1$, *является функтором эквивалентности.*

Кроме функтора S введем также функтор $T\colon \operatorname{Rep}\mathcal{P}_{n,\alpha} \to \operatorname{Rep}\mathcal{P}_{n,n-\alpha}$ следующим образом. Пусть π — представление колчана $\mathcal{P}_{n,\alpha}$, $\pi(p_i) = P_i$ — ортопроекторы в пространстве H_0 и $\sum_{i=1}^{n} P_i = \alpha I_{H_0}$. Тогда $\sum_{i=1}^{n}(I_{H_0} - P_i) = (n-\alpha)I_{H_0}$. Пусть $T(\pi)(p_i) = I_{H_0} - P_i$, $T(\pi)$ — представление колчана $\mathcal{P}_{n,n-\alpha}$. Если C_0 — морфизм из представления π в $\tilde{\pi}$, то тот же оператор C_0 (пространства представлений не меняются) задает морфизм представления $T(\pi)$ в представление $T(\tilde{\pi})$, так что $T(C_0) = C_0$. Очевидным образом T является эквивалентностью категорий.

Введем наконец *функторы Кокстера* Φ^+ и Φ^- следующим образом:

$$\Phi^+ = ST\colon \operatorname{Rep}\mathcal{P}_{n,\alpha} \to \operatorname{Rep}\mathcal{P}_{n,(n-\alpha)/(n-1-\alpha)}, \qquad \alpha < n-1,$$

$$\Phi^- = TS\colon \operatorname{Rep}\mathcal{P}_{n,\alpha} \to \operatorname{Rep}\mathcal{P}_{n,n-\alpha/(\alpha-1)}, \qquad 1 < \alpha.$$

Из лемм 1 – 3 следует такая теорема.

Теорема 1. *Функторы Φ^+, Φ^-, S, T являются функторами эквивалентности соответствующих категорий.*

Функторы Φ^+, Φ^-, S, T порождают отображения на множестве размерностей представлений и на множестве Σ_n, эти отображения будем обозначать теми же символами, что и функторы.

Обобщенной размерностью представления π колчана $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ в пространстве H_0 назовем вектор $(d_0, d_1, \ldots, d_n)$, где $d_i = \dim H_i$ ($H_i = \operatorname{Im} P_i$; обобщенная размерность представления колчана $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ является размерностью соответствующего представления колчана $Q_{n,\alpha}$).

Легко проследить, как меняется размерность при переходе к представлениям $S(\pi)$ и $T(\pi)$:

$$\begin{gathered} S(d_0, d_1, d_2, \ldots, d_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} d_i - d_0, d_1, d_2, \ldots, d_n\right), \\ T(d_0, d_1, d_2, \ldots, d_n) = (d_0, d_0 - d_1, d_0 - d_2, \ldots, d_0 - d_n). \end{gathered} \tag{5}$$

Заметим, что именно так меняется размерность представления колчана после отражений (см. [4]) для функтора S в точке (0), а для функтора T — во всех точках (i) одновременно, $i = \overline{1, n}$.

Отображения Φ^+, Φ^- являются композицией отображений (5). Определим также отображения S, T, Φ^+, Φ^- на множестве Σ_n:

$$\begin{gathered} S(\alpha) = 1 + \frac{1}{\alpha - 1}, \qquad \alpha > 1, \\ T(\alpha) = n - \alpha, \\ \Phi^+(\alpha) = 1 + \frac{1}{n-1-\alpha}, \qquad \alpha < n-1, \\ \Phi^-(\alpha) = n - 1 - \frac{1}{\alpha - 1}, \qquad \alpha > 1. \end{gathered} \tag{6}$$

Построив функторы S, T, Φ^+, Φ^-, мы одновременно доказали следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть* $\alpha \in \Sigma_n$. *При* $\alpha > 1$ $S(\alpha) \in \Sigma_n$ *и* $\Phi^-(\alpha) \in \Sigma_n$. *При* $\alpha < n-1$ $\Phi^+(\alpha) \in \Sigma_n$. *При любых* $\alpha \in \Sigma_n$ $T(\alpha) \in \Sigma_n$.

3. Применение функторов Кокстера. Очевидно, что $\Sigma_n \subset [0; n]$. Действительно, если $\alpha \in \Sigma_n$, то $\alpha \geq 0$, так как ортопроекторы — положительные операторы, и их сумма не может быть оператором вида αI при $\alpha < 0$. Но тогда $\alpha \leq n$, так как иначе $T(\alpha) < 0$, что противоречит лемме 4. Очевидно также, что множество Σ_n симметрично относительно точки $n/2$: симметрию осуществляет отображение T. Поэтому достаточно описать множество $\Sigma_n \cap \left[0; \frac{n}{2}\right]$.

Пусть L — пространство линейных рекуррентных последовательностей $\bar{z} = (z_0, z_1, z_2, \ldots)$ с фиксированным законом рекурсии $z_{i+2} = (n-2)\, z_{i+1} - z_i$ (или, иначе, с характеристическим многочленом $F(x) = x^2 - (n-2)x + 1$). Будем рассматривать L как векторное пространство над полем действительных чисел $\mathbb{R}$. L превращается в модуль над $\mathbb{R}[x]$, если определить $x\bar{z}$ как сдвиг последовательности $\bar{z}$ влево на одну позицию: $x\bar{z} = (z_1, z_2, z_3, \ldots)$. Как известно, этот модуль является циклическим и в рассматриваемом случае, например, порождается рекуррентной последовательностью $\bar{e}$ с начальным вектором $\bar{e}^0 = (0, 1)$. Построим эту рекуррентную последовательность: $\bar{e} = (e_0, e_1, e_2, \ldots) = (0, 1, n-2, n^2-4n+3, \ldots)$. Методом математической индукции легко показать, что при $k \geq 2$

$$e_k = \sum_{i=0}^{[(k-1)/2]} (-1)^i C_{k-1-i}^{i} (n-2)^{k-1-2i}. \tag{7}$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема 2. *Множество* $\Sigma_n \cap \left[0; \frac{n-\sqrt{n^2-4n}}{2}\right)$ *состоит из двух последовательностей точек: последовательности* $x_k = \Phi^{+\,k}(0)$, *„выходящей" из точки* 0, *и последовательности* $y_k = \Phi^{+\,k}(1)$, *„выходящей" из точки* 1. *При этом* $x_k = \frac{e_k + e_{k-1}}{e_{k+1} + e_k}$, $y_k = 1 + \frac{e_k}{e_{k+1}}$ *при* $k \geq 1$, *а* e_k *— члены рекуррентной последовательности* $\bar{e}$ *с законом рекурсии* $e_{k+2} = (n-2)\, e_{k+1} - e_k$ *и начальным вектором* $\bar{e}^0 = (0, 1)$, e_k *могут быть вычислены по формуле* (7).

Обе последовательности сходятся к точке $\frac{n-\sqrt{n^2-4n}}{2}$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Покажем сначала, что точки x_k, y_k содержатся в Σ_n. Очевидно, что $\{0, 1\} \subset \Sigma_n$ (все ортопроекторы P_i нулевые, либо все ортопроекторы, кроме одного, нулевые, а последний — единичный оператор). Неподвижными точками для отображения Φ^+ $(\Phi^+(\alpha) = \alpha)$, как легко подсчитать, являются точки $\frac{n-\sqrt{n^2-4n}}{2}$ и $\frac{n+\sqrt{n^2-4n}}{2}$. Действительно, если $\alpha < \frac{n-\sqrt{n^2-4n}}{2}$, то после несложных вычислений получаем $\Phi^+(\alpha) < \frac{n-\sqrt{n^2-4n}}{2}$, так что $\Phi^{+\,k}(0)$ и $\Phi^{+\,k}(1)$ определены для всех k и согласно лемме 4 принадлежат множеству Σ_n. Взаимное расположение точек x_k, y_k таково:

$$x_0 < y_0 < x_1 < y_1 < \ldots < x_k < y_k < \ldots < \frac{n-\sqrt{n^2-4n}}{2}.$$

Обе последовательности — монотонно возрастающие и ограниченные, а
имеют предел. Поскольку $x_{k+1} = \Phi^+(x_k)(y_{k+1} = \Phi^+(y_k))$, этот предел —
вижная точка отображения Φ^+, т. е. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \lim\limits_{k\to\infty} y_k = \frac{n-\sqrt{n^2-4n}}{2}$.

Покажем теперь, что все остальные точки интервала $\left[0; \frac{n-\sqrt{n^2-4\right.$
принадлежат множеству Σ_n.

Очевидно, что $\Sigma_n \cap (0;1) = \varnothing$. Действительно, если $\sum_{i=1}^n P_i = \alpha I$,
1), и (не умаляя общности) $P_n \neq 0$, то $\sum_{i=1}^n P_i = \alpha I - P_n$, а тогда в рав
слева содержится положительный оператор, а справа — операт
являющийся положительным. Таким образом, $(x_0; y_0) \cap \Sigma_n = \varnothing$.

Покажем, что $(y_0; x_1) \cap \Sigma_n = \varnothing$. $(y_0; x_1) = \left(1, 1+\frac{1}{n-1}\right)$, $S\left(\left(1, 1+\frac{1}{n-\right.\right.$
$= (n; \infty)$. Поскольку $(n;\infty) \cap \Sigma_n = \varnothing$, то по лемме 4 и $(y_0; x_1) \cap \Sigma_n =$

Теперь осталось только заметить, что $\Phi^+((x_0; y_0)) = (x_1; y_1)$, $\Phi^+((y_0;$
$= (y_1; x_2)$ и т. д. Так как $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \lim\limits_{k\to\infty} y_k = \frac{n-\sqrt{n^2-4n}}{2}$, то мы таким о
исчерпаем множество всех точек, не входящих в последовательность.

Представим члены последовательности x_k, начиная с x_1, в виде x_k
$+ \frac{a_{k-1}}{a_k}$. Тогда легко проследить, что последовательность $\bar{a} = (a_0, a_1, \ldots$
— линейная рекуррентная последовательность с законом рекурсии a_{i+2}
$-2)a_{i+1} - a_i$ и начальным вектором $\bar{a}^{(0)} = (1, n-1)$.

Представим члены последовательности y_k, начиная с y_1, в виде y_k
$+ \frac{b_{k-1}}{b_k}$ и убедимся, что последовательность $\bar{b} = (b_0, b_1, b_2, \ldots)$ — ли
рекуррентная последовательность с тем же законом рекурсии и начальн
тором $\bar{b}^{(0)} = (1, n-2)$.

Легко видеть, что $\bar{a} = (x+1)\bar{e}$, $\bar{b} = x\bar{e}$. Поэтому $a_k = e_{k+1} + e_k$, b_k
и

$$x_k = 1 + \frac{e_k + e_{k-1}}{e_{k+1} + e_k}, \qquad y_k = 1 + \frac{e_k}{e_{k+1}} \quad \text{при} \quad k \geq 1,$$

что и завершает доказательство теоремы.

Теорема 3. *Каждый из колчанов $\mathcal{P}_{n,x_k}$ с точностью до унитарной э
лентности имеет одно-единственное неприводимое $*$-представлени
размерности $e_{k+1} + e_k$, так что $x_k = 1 + \frac{\dim \pi^{(x_{k-1})}}{\dim \pi^{(x_k)}}$.*

*Каждый из колчанов $\mathcal{P}_{n,y_k}$ с точностью до унитарной эквивалент
имеет ровно n неприводимых представлений $\pi^{(y_k,i)}$, $i = \overline{1,n}$, каждое
торых имеет размерность e_{k+1}, так что $y_k = 1 + \frac{\dim \pi^{(y_{k-1},i)}}{\dim \pi^{(y_k,i)}}$.*

Доказательство. $\pi^{(x_k)} = \Phi^{+k}(\pi^{(0)})$. Колчан $\mathcal{P}_{n,0}$ имеет одно-единственное неприводимое представление $\pi^{(0)}$ размерности 1: $\pi^{(0)}(p_i) = P_i = 0$. Дальше воспользуемся тем, что функтор Φ^+ является функтором эквивалентности категорий.

По формулам (5), учитывая, что $\Phi^+ = ST$, имеем

$$\Phi^+(d_0; d_1, d_2, \ldots, d_n) = \left((n-1)d_0 - \sum_{i=1}^{n} d_i; d_0 - d_1, d_0 - d_2, \ldots, d_0 - d_n\right).$$

Представление $\pi^{(0)}$ имеет обобщенную размерность $(1; 0, 0, \ldots, 0)$, так что

$$\Phi^+(1; 0, 0, \ldots, 0) = (n-1; 1, 1, \ldots, 1) = (e_2 + e_1; e_1, e_1, \ldots, e_1).$$

Докажем по индукции, что $\Phi^{+k}(1; 0, 0, \ldots, 0) = (e_{k+1} + e_k; e_k, e_k, \ldots, e_k)$. Пусть

$$\Phi^{+(k-1)}(1; 0, 0, \ldots, 0) = (e_k + e_{k-1}; e_{k-1}, e_{k-1}, \ldots, e_{k-1}).$$

Тогда по формулам (5)

$$\Phi^{+k}(1; 0, 0, \ldots, 0) = ((n-1)e_k - e_{k-1}; e_k, e_k, \ldots, e_k),$$

но по закону рекурсии $e_{k+2} = (n-2)e_{k+1} - e_k$, так что

$$(n-1)e_{k+1} = e_{k+2} + e_{k+1} + e_k$$

и

$$(n-1)e_k - e_{k-1} = (e_{k+1} + e_k + e_{k-1}) - e_{k-1} = e_{k+1} + e_k.$$

Поэтому

$$\Phi^{+k}(1; 0, 0, \ldots, 0) = (e_{k+1} + e_k; e_k, e_k, \ldots, e_k).$$

Это означает, что $\dim \pi^{(x_k)} = e_{k+1} + e_k$.

Вторая часть теоремы доказывается точно так же. Колчан $\mathcal{P}_{n,1}$ имеет ровно n неприводимых представлений (с точностью до унитарной эквивалентности) $\pi^{(1,i)}$: $\pi^{(1,i)}(p_i) = 1$ и $\pi^{(1,i)}(p_j) = 0$ при $i \neq j$. Представление $\pi^{(1,i)}$ имеет обобщенную размерность $(1; 0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, где $d_k = 1$ при $k = 0$ и $k = i$ и $d_k = 0$ — в остальных случаях. $\pi^{(y_k, i)} = \Phi^{+k}(\pi^{(1,i)})$.

1. *Ройтер А. В.* Боксы с инволюцией // Представления и квадратичные формы. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979. – С. 124–126.
2. *Рабанович В. И., Самойленко Ю. С.* Когда сумма проекторов или идемпотентов кратна единичному оператору // Функцион. анализ и прил. – 2000. – **34**, № 4. – С. 91–93.
3. *Рабанович В. И., Самойленко Ю. С.* Скалярные операторы, представимые суммой проекторов // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 7. – С. 939–952.
4. *Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Пономарев В. А.* Функторы Кокстера и теорема Габриеля // Успехи мат. наук. – 1973. – **28**, вып. 2. – С. 19–33.
5. *Кругляк С. А., Рабанович В. И., Самойленко Ю. С.* Представления алгебр, порожденных проекторами, и функторы Кокстера // Функцион. анализ и прил. – 2002. – **36**, № 4.

Получено 20.08.2001