УДК 517.956

В. Ф. Акулов, (Макеев. инж.-строит. ин-т),
А. Е. Шишков, д-р физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

О единственности решений смешанных задач и задачи Коши для параболических уравнений высокого порядка с неограниченными коэффициентами

Найдены новые классы (обобщенные классы Тэклинда) единственности обобщенных решений начально-краевых задач для линейных и квазилинейных дивергентных параболических уравнений высокого порядка с растущими на бесконечности коэффициентами.

Знайдені нові класи (узагальнені класи Теклінда) єдиності узагальнених розв'язків початково-граничних задач для лінійних та квазілінійних дивергентних параболічних рівнянь високого порядку з необмежено зростаючими на нескінченності коефіцієнтами.

В неограниченной области $G = \Omega \times (0, T) \subset R^{n+1}_{x,t}$, $n > 1$, $T < \infty$, с кусочно C^1-гладкой границей $\partial G = \Omega_0 \cup \Omega_T \cup \Gamma$ рассматривается смешанная задача

$$Pu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha_x a_\alpha (t, x, u, \nabla_x u, \ldots, \nabla^m_x u) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^\alpha D^\alpha_x F_\alpha (t, x); \quad (1)$$

$$u|_{\Omega_0} = \varphi(x); \qquad D^\alpha u|_\Gamma = 0 \quad \forall \alpha : |\alpha| \leqslant m - 1. \quad (2)$$

Здесь каратеодориевы функции $a_\alpha (t, x, \xi)$, $\xi = (\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(m)})$, удовлетворяют $\forall (t, x, \xi) \in G \times R^{N(m)}$ условиям

$$\sum_{|\alpha| = m} a_\alpha (t, x, \xi)\, \xi^{(m)}_\alpha \geqslant (m - l) A - l a_0 (t, x, \xi)\, \xi^{(0)} - d_1 B, \quad d_1 < \infty; \quad (3)$$

$$\sum_{|\alpha| = m} a^2_\alpha (t, x, \xi) \leqslant d_2 M_1 (|x|) (A + B), \quad d_2 < \infty; \quad (4)$$

$$(m - l) \sum_{|\beta| \leqslant m-1} a^2_\beta (t, x, \xi) \leqslant d_3 K (|x|) (A + B), \quad d_3 < \infty; \quad (4^*)$$

где $A \equiv M_0 (|x|) |\xi^{(m)}|^2$, $B \equiv K (|x|) \sum_{i=0}^{m-1} |\xi^{(i)}|^2$, $M_0 (s)$, $M_1 (s)$, $K (s)$ — непрерывные неотрицательные функции; l равно 0 или 1.

Замечание 1. Условие (3) для $m > 1$ является, очевидно, более общим при $l = 0$. Но при $l = 1$ оно позволяет охватить также вырождающиеся параболические уравнения второго порядка ($m = 1$, $l = 1$,). В последнем случае необходимо налагать дополнительное условие на структуру функций $a_i (t, x, s, \xi)$:

$$\Big| \sum_{i=1}^n a_i (t, x, s, \xi)\, \eta_i \Big| \leqslant c \Big(\sum_{i=1}^n a_i (t, x, s, \xi)\, \xi_i \Big)^{1/2} \times \Big(\sum_{i=1}^n a_i (t, x, s, \eta)\, \eta_i \Big)^{1/2} \quad \forall (s, \xi, \eta) \in R^{2n+1}, \quad c < \infty, \quad (5)$$

выполняющееся, например, при $a_i (t, x, s, \xi) \equiv \sum_{j=1}^n a_{ij} (t, x, s)\, \xi_j$.

Предполагаем, что функции $M_0 (\tau)$, $M_1 (\tau)$, $K (\tau)$ удовлетворяют условиям

$$M (\tau) \equiv (M_0 (\tau))^{\frac{1-m}{2m}} (M_1 (\tau))^{\frac{1}{2}} \leqslant \tau h (\tau), \qquad \max_{0 < s < \tau} K (s) \leqslant h^2 (\tau); \quad (6)$$

$$\max_{\tau<s<d\tau} M_i(s) \leqslant d_0^{2m} \min_{\tau<s<d\tau} M_i(s), \quad i=0,1; \quad d_0<\infty, \quad 1<d<\infty, \tag{7}$$

где $h(\tau)$ — произвольная монотонно неубывающая функция, удовлетворяющая следующему условию «тэклиндовского» типа:

$$\int_1^\infty (h(s))^{1-2m} (M(s))^{-1} ds = \infty. \tag{8}$$

Вначале рассматривается поведение на бесконечности произвольного обобщенного решения задачи (1), (2), под которым, как обычно, понимается функция $u(t, x)$ такая, что для любой ограниченной подобласти $\Omega' \subset \Omega$ $u(t, x) \in L_2(0, T; \overset{0}{H}{}^m(\Omega', \partial\Omega' \setminus \partial\Omega))$, $u_t(t, x) \in L_2(\Omega' \times (0, T))$ выполнено первое из условий (2), а также следующее интегральное тождество:

$$\int_{\Omega' \times (\rho, s)} \left[\frac{\partial u}{\partial t} v + \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(t, x, u, \ldots, \nabla_x^m u) D^\alpha v - \sum_{|\alpha| \leqslant m} F_\alpha D^\alpha v\right] dx dt = 0 \tag{9}$$

для любых ρ, s: $0 \leqslant \rho < s \leqslant T$, и произвольной функции $v(t, x) \in L_2(0, T; \overset{0}{H}{}^m(\Omega'))$.

Теорема 1 (*типа Фрагмена — Линделефа*). *Пусть* $u(t, x)$ — *произвольное обобщенное решение однородной* ($F_\alpha \equiv \varphi \equiv 0$) *задачи* (1), (2). *Тогда существует постоянная* $a^* > 0$, *зависящая лишь от известных параметров, такая, что если*

$$\|u\|_{L_2(G(\tau)) = L_2(G \cap \{|x| < \tau\})} \leqslant \exp\left(a \int_{\tau_0}^{\tau} h(s) (M(s))^{-1} ds\right) \quad \forall \tau > \tau' \tag{10}$$

с некоторой постоянной $a < a^*$, *то* $u(t, x) \equiv 0$.

Зафиксируем C^m — гладкую срезающую функцию $\zeta(s)$: $\zeta(s) = 1$ при $s < 0$, $\zeta(s) = 0$ при $s > 1$, и пусть $d_4 = \max_{0 \leqslant s \leqslant 1, j \leqslant m} |\zeta^{(j)}(s)|$. Обозначим $G_\rho^s(\tau) = G(\tau) \cap \{(t, x) : \rho < t < s\}$, $G(\tau_1, \tau_2) = G(\tau_2) \setminus G(\tau_1)$, $\Omega_t(\tau_1, \tau_2) = G(\tau_1, \tau_2) \cap \{t = \text{const}\}$. В дальнейшем будет использоваться следующее мультипликативное неравенство:

$$\int_{\Omega_t(\tau_1, \tau_2)} |\nabla_x^j v|^2 dx \leqslant d_5 \left(\int_{\Omega_t(\tau_1, \tau_2)} |\nabla_x^m v|^2 dx\right)^{\frac{j}{m}} \left(\int_{\Omega_t(\tau_1, \tau_2)} v^2 dx\right)^{\frac{m-j}{m}} + d_6 (\tau_2 - \tau_1)^{-2j} \times$$

$$\times \int_{\Omega_t(\tau_1, \tau_2)} v^2 dx \quad \forall \tau_2 > \tau_1 > 0, \ j < m, \ v \in H^m(\Omega_t(\tau_1, \tau_2)), \ 0 < d_5, \ d_6 < \infty. \tag{11}$$

Доказательство теоремы 1 проводится с использованием метода введения параметра [1]. Зафиксируем постоянные $\varepsilon_0 > 0$, $\mu > 0$ и подставим в интегральное тождество (9) пробную функцию $v(t, x) = u(t, x) g^2(t) \eta_\tau(|x|)$, где $g(t) = \exp(-\mu^2 t)$, $\eta_\tau(s) = \zeta^{2m}\left(\frac{s - \tau}{\delta}\right)$, $\delta \equiv \delta(\tau) = \varepsilon_0^{-1} \mu^{-1/m} M(\tau)$. Введя обозначения

$$w(t, x) \equiv u g(t), \quad F_s(\tau) \equiv 2^{-1} \int_{\Omega_s(\tau)} w^2 dx, \quad \mathcal{J}(\tau) \equiv \int_{G_{s-\nu}^s(\tau)} w^2 dx dt,$$

$$\mathcal{J}_1(\tau) \equiv \frac{m-1}{2} \int_{G_{s-\nu}^s(\tau)} M_0(|x|) |\nabla_x^m w|^2 dx dt,$$

$$R_1 \equiv 4^{-1} \int_{G_{s-\nu}^s(\tau+\delta)} \left(\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(\ldots) D_x^\alpha u + l a_0(\ldots) u\right) g^2(t) \eta_\tau dx dt,$$

$$R_2 \equiv \int\limits_{G^S_{S-\nu}(\tau+\delta)} K(|x|) \sum_{i=0}^{m-1} |\nabla_x^i w|^2 dxdt,$$

$$R_3 \equiv \int\limits_{G^S_{S-\nu}(\tau,\tau+\delta)} M_1(|x|) \sum_{i=1}^{m} \delta^{-2i} |\nabla_x^{m-i} w|^2 dxdt,$$

$$R_4 \equiv (m-1) \int\limits_{G^S_{S-\nu}(\tau,\tau+\delta)} K(|x|) \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{j} \delta^{-2i} |\nabla_x^{j-i} w|^2 dxdt$$

и учитывая условие (3), получаем при $l \neq m$ после простых преобразований

$$\mathcal{I}_3(\tau) \equiv F_s(\tau) + \mu^2 \mathcal{I}(\tau) + \mathcal{I}_1(\tau) + 2R_1 \leqslant \int\limits_{G^S_{S-\nu}(\tau+\delta)} \sum_{|\beta| \leqslant m-1} a_\beta(t, x, \ldots, \nabla_x^m u) \times$$

$$\times D^\beta(u\eta_\tau) g^2(t) dxdt + c_1 d_4 \int\limits_{G^S_{S-\nu}(\tau,\tau+\delta)} \sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha(\ldots)| \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{m} \delta^{-i} |\nabla_x^{m-i} u| g^2(t) \eta_\tau^{1/2} dxdt + F_{s-\nu}(\tau+\delta). \tag{12}$$

Здесь и в дальнейшем c_i — постоянные, зависящие лишь от известных параметров. Применяя к слагаемым в правой части неравенства (12) неравенство Юнга с «ε» и далее условия (3), (4), приходим к соотношению

$$\mathcal{I}_3(\tau) \leqslant 4(\varepsilon_1 d_3 + \varepsilon_2 d_2) R_1 + (\varepsilon_1 d_3 + c_3 \varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2 d_2) R_2 + c_1^2 d_4^2 \varepsilon_2^{-1} R_3 +$$

$$+ c_2 d_4^2 \varepsilon_1^{-1} R_4 + F_{s-\nu}(\tau+\delta) \quad \forall \varepsilon_i > 0, \quad i = 1, 2. \tag{13}$$

В случае $l = m = 1$ после той же подстановки, оценивая слагаемое $\int\limits_{G^S_{S-\nu}(\tau+\delta)} \left| \sum_{i=1}^{n} a_i(\ldots) D_x^i \eta_\tau \cdot w \right| dxdt$ с помощью неравенства (5), условий (4) и неравенства Юнга, получаем соотношение

$$\mathcal{I}_3(\tau) \leqslant \varepsilon_2 R_1 + \varepsilon_2^{-1} d_4^2 d_2 R_3 + F_{s-\nu}(\tau+\delta). \tag{13*}$$

Оценивая R_2 с помощью интерполяционного неравенства (11) при $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = \tau + \delta$ и используя условие (6), имеем

$$R_2 \leqslant \varepsilon_3 \mathcal{I}_1(\tau+\delta) + c_3 \varepsilon_3^{-m} h^{2m}(\tau+\delta) \mathcal{I}(\tau+\delta) \quad \forall \varepsilon_3 > 0. \tag{14}$$

Аналогичным образом оцениваем $R_3 + R_4$:

$$R_3 + R_4 \leqslant \varepsilon_4 \mathcal{I}_1(\tau+\delta) + (\varepsilon_0 \mu^2 + h^{2m}(\tau+\delta)) c_4 \varepsilon_4^{-m} \mathcal{I}(\tau+\delta) \quad \forall \varepsilon_4 > 0. \tag{15}$$

Фиксируя ε_1, ε_2 так, чтобы $4(\varepsilon_1 d_3 + \varepsilon_2(1 + d_2)) < 1$, из оценок (13)—(15) получаем

$$\mathcal{I}_3(\tau) \leqslant \varepsilon_5 - c_5 \mathcal{I}_1(\tau+\delta) + (\varepsilon_0 \mu^2 + h^{2m}(\tau+\delta)) c_6 \varepsilon_5^{-m} \mathcal{I}(\tau+\delta) + F_{s-\nu}(\tau+\delta), \tag{16}$$

где $\varepsilon_5 = \min(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$. Подставляя в тождество (9) $v(t, x) = w(t, x) \zeta^{2m}((|x| - \tau - (1 + 2^{-j})\delta) 2^{j+1} \delta^{-1})$, $j = 0, 1, \ldots$, и действуя так же, как при выводе оценки (16), получаем соотношение

$$\mathcal{I}_3(\tau + \delta_j) \leqslant \varepsilon \mathcal{I}_1(\tau + \delta_{j+1}) + (\varepsilon_0 \mu^2 + h^{2m}(\tau + \delta_{j+1})) c_7 \varepsilon^{-m} 2^{2mj} \times$$

$$\times \mathcal{I}(\tau + \delta_{j+1}) + F_{s-\nu}(\tau + \delta_{j+1}), \quad \delta_j \equiv (1 - 2^{-j}) \delta.$$

Полагая $\varepsilon = 2^{-2(m+1)}$ и итерируя последнее неравенство, начиная с $j=0$

до бесконечности, получаем

$$\mathcal{J}_3(\tau) \leqslant (\varepsilon_0^{2m}\mu^2 + h^{2m}(\tau+\delta))\, c_8\mathcal{J}(\tau+\delta) + c_9F_{s-\nu}(\tau+\delta). \tag{17}$$

Выберем теперь последовательность $\tau_i \to \infty$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, так, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$h(\tau_i) \leqslant d_7h(\tau_{i-1}), \quad 1 < d_7 < \infty, \quad i = 1, 2, \ldots;$$

$$\int\limits_{\tau_0}^{\tau_{i-1}} h(s)(M(s))^{-1}ds \leqslant d_8 \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} h(s)(M(s))^{-1}ds \equiv d_8S_i,\ 0 < d_8 < \infty,\ i = 1, 2, \ldots; \tag{18}$$

для любого номера $i > 0$ существует натуральное число n_i такое, что

$$\tau_i = \underbrace{f(f(\ldots(f}_{n_i}(\tau_{i-1}))\ldots), \tag{18*}$$

где $f(\tau) = 1 + \delta(\tau)$, $\delta(\tau) = \varepsilon_0^{-1}\mu_i^{-1/m}M(\tau)$, $\mu_i = \varepsilon_0^{-m}h^m(\tau_{i-1})$. По последовательности τ_i определяем последовательность t_i соотношением

$$t_i = t_{i-1} - \nu_i, \quad \nu_i = \varepsilon_0^{2m} \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (h(s))^{1-2m}(M(s))^{-1}ds. \tag{19}$$

Предполагаем, что параметр ε_0 удовлетворяет неравенству

$$c_8(1 + d_7^{2m})\,\varepsilon_0^{2m} = \theta < 1.$$

Тогда $\forall\tau \in [\tau_{i-1}, \underbrace{f(f(\ldots(f}_{n_i-1}(\tau_{i-1}))\ldots)]$, полагая $\mu \equiv \mu_i$, из соотношения (17) получаем

$$F_s(\tau) + \mu_i^2\mathcal{J}(\tau) \leqslant \theta\mu_i^2\mathcal{J}(\tau+\delta(\tau)) + c_9F_{s-\nu}(\tau+\delta(\tau)). \tag{20}$$

Учитывая, что $1 = \dfrac{\tau+\delta-\tau}{\delta} \geqslant d_0^{-1}\displaystyle\int\limits_{\tau}^{\tau+\delta(\tau)} \delta(s)^{-1}ds$, проитерируем оценку (20) n_i раз, начиная с τ_{i-1}; получаем

$$F_s(\tau_{i-1}) + \mu_i^2\mathcal{J}(\tau_{i-1}) \leqslant \mu_i^2\exp\Big(-d_0^{-1}\ln\theta^{-1}\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\delta(s)^{-1}ds\Big)\mathcal{J}(\tau_i) +$$
$$+ c_9(1-\theta)^{-1}F_{s-\nu}(\tau_i).$$

Отсюда следует неравенство

$$f_s(\tau_{i-1}) \leqslant I_{s-\nu}^s(\tau_i)\exp\Big(2\mu_i^2\nu - d_0^{-1}\ln\theta^{-1}\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\delta(s)^{-1}ds\Big) +$$
$$+ c_{10}\exp(2\mu_i^2\nu)\,f_{s-\nu}(\tau_i), \tag{21}$$

где $f_s(\tau) \equiv \int\limits_{\Omega_s(\tau)} u^2dx$, $I_{s-\nu}^s(\tau_i) \equiv \mu_i^2 \int\limits_{G_{s-\nu}^s(\tau_i)} u^2dxdt$.

Записываем неравенство (21) с учетом (18)—(19) при $s = t_{i-1}$, $\nu = \nu_i$, а также, замечая, что $\mu_i^2\nu_i \leqslant S_i$, $\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\delta(s)^{-1}ds \geqslant d_7^{-1}S_i$, получаем

$$f_{t_{i-1}}(\tau_{i-1}) \leqslant P_iI_{t_i}^{t_{i-1}}(\tau_i) + L_if_{t_i}(\tau_i), \tag{22}$$

$$P_i \leqslant \exp((2 - (d_0d_7)^{-1}\ln\theta^{-1}S_i), \quad L_i \leqslant c_{10}\exp(2S_i). \tag{23}$$

Так как в силу условия (8) для любых $\tau_0 < \infty$ и $t_0 < T$ существует конечный номер $E=E(\tau_0, t_0)$ такой, что $\sum_{i=1}^{E} \nu_i > t_0$ и $f_{t_E}(\tau_E)=0$. Отсюда, итерируя оценку (22) E раз, начиная с $i=1$, получаем

$$f_{t_0}(\tau_0) \leqslant \sum_{i=1}^{E} \left(P_i \prod_{j=1}^{i-1} L_j\right) I_{t_i}^{t_{i-1}}(\tau_i). \tag{24}$$

Учитывая (23) и (18), имеем

$$P_i \prod_{j=1}^{i-1} L_j \leqslant \exp\left(i \ln c_{10} - ((d_0 d_7)^{-1} \ln \theta^{-1} - 2(1+d_8)) S_i\right). \tag{25}$$

При достаточно малом ε_0 из (24), (25), (10) следует оценка

$$f_{t_0}(\tau_0) \leqslant \sum_{i=1}^{E} \exp(2(a-a^*-1) S_i) < \sum_{i=1}^{E} \exp(-2S_i), \tag{26}$$

$$0 < a^* = 1 + (2d_0 d_7)^{-1} \ln \theta^{-1} - 2d_8 - \max_{i \leqslant E} \left(i\, S_i^{-1}\right) \ln c_{10} < \infty.$$

Учитывая (18), получаем оценку

$$\sum_{i=1}^{E} \exp(-2S_i) \leqslant \exp(-2S_1) + \sum_{i=2}^{E} \exp(-2d_8^{-1} H_i) \leqslant$$

$$\leqslant \exp(-2S_1) + \sum_{i=2}^{E} \exp(-2d_8^{-1}(1+d_8)^{2-i} S_1), \tag{27}$$

где $H_i \equiv \sum_{j=1}^{i-1} S_j$.

Из (6) следует оценка

$$S_1 \geqslant \ln \tau_1 - \ln \tau_0. \tag{28}$$

С учетом (27), (28) оценка (26) принимает вид

$$f_{t_0}(\tau_0) \leqslant \exp(-2S_1)\left(1 + \sum_{i=2}^{E} \exp(-c_{1i} S_1)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{E} \left(\frac{\tau_1}{\tau_0}\right)^{-c_{1i}} \exp(-2S_1) \leqslant c_{21} \exp(-2S_1), \tag{29}$$

где $c_{1i} = 2d_8^{-1}(1+d_8)^{2-i} - 2$.

Но так как $S_i \to \infty$ при $i \to \infty$, то $\exp(-2S_1) \to 0$ при $\tau_0 \to \infty$, и значит, $f_{t_0}(\tau_0) = 0 \ \forall \tau_0 > \tau'$, $t_0 < T$, откуда следует, что $u \equiv 0$.

З а м е ч а н и е 2. В случае уравнений второго порядка условия (3), (4) можно ослабить так, чтобы полностью охватить в линейном случае вырождающиеся уравнения, рассмотренные в [2]:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(t, x, s, \xi)\, \xi_i + a_0(t, x, s, \xi)\, s \geqslant \sum_{k=1}^{n} b^k(t, x)\, \xi_k s - d_1 K(|x|)\, s^2,$$

$$|a_i| \leqslant d_2 M_1(|x|)\,|\xi|, \quad |b^k|^2 \leqslant d_3 M_1(|x|)\, K^{2m-1}(|x|), \quad D_{x_k} b^k \leqslant d_3 K(|x|),$$

где b^k, $D_{x_k} b^k$ измеримы и ограничены в любой конечной подобласти области G.

Рассмотрим единственность решений задачи (1), (2) в классах растущих на бесконечности функций. Предположим, что вместо условий (3), (4) выполнены следующие структурные условия (совпадающие с (3), (4) в линейном случае):

$$\sum_{|\alpha|=m} E_\alpha(\xi_\alpha^{(m)} - \eta_\alpha^{(m)}) \geqslant (m-l) A_1 - l E_0(\xi^{(0)} - \eta^{(0)}) - d_1 B_1; \tag{30}$$

$$\sum_{|\alpha|=m} E_\alpha^2 \leqslant d_2 M_1(|x|)(A_1+B_1), \quad (m-l)\sum_{|\beta|\leqslant m-1} E_\beta^2 \leqslant d_3 K(|x|)(A_1+B_1); \quad (31)$$

где

$$A_1 \equiv M_0(|x|)\,|\xi^{(m)}-\eta^{(m)}|^2, \quad B_1 \equiv K(|x|)\sum_{i=0}^{m-1}|\xi^{(i)}-\eta^{(i)}|^2,$$

$$E_\alpha \equiv a_\alpha(t,x,\xi)-a_\alpha(t,x,\eta).$$

Теорема 2. *Пусть* $u_1(t,x)$, $u_2(t,x)$ — *обобщенные решения задачи* (1), (2). *Тогда если для* u_1 и u_2 *выполняется оценка*

$$R(\tau) \equiv \|u_1-u_2\|_{L_2(G(\tau))} \leqslant \exp\Big(a\int_{\tau_0}^{\tau} h(s)(M(s))^{-1}ds\Big) \quad \forall \tau > \tau' \qquad (32)$$

с некоторой постоянной $a<\infty$, *то* $u_1 \equiv u_2$, *где* $h(s)$, $M(s)$ — *функции из* (6), (8).

Доказательство с учетом условий (30), (31) стандартным приемом, связанным с подстановкой в интегральное тождество (9) пробной функции $v(t,x)=(u_1-u_2)\eta_\tau g(t)$, сводится к повторению рассуждений из доказательства теоремы 1.

Рассмотрим некоторые следствия, получаемые из теоремы 2 при конкретных коэффициентах. Очевидно, для линейных параболических уравнений с ограниченными коэффициентами ($M(\tau)\leqslant \mathrm{const}$, $K(\tau)\leqslant \mathrm{const}$) найденные классы являются известными классами Тихонова — Тэклинда [3, 4]. В общем случае ограничимся рассмотрением уравнений, для которых $M_0(\tau)=M_1(\tau)$, а значит, $M(\tau)=(M_1(\tau))^{1/2m}$. Обозначим через $\psi(\tau)$ произвольную монотонно не убывающую функцию, удовлетворяющую следующему условию:

$$\int_1^\infty (s\psi(s))^{-1}ds=\infty. \qquad (33)$$

1. $M_1(\tau)=\tau^\alpha\psi(\tau)$, $0<\alpha<2m$. Условию (8) в этом случае удовлетворяет функция

$$h(\tau)=(\tau^{(2m-\alpha)\gamma}\psi(\tau))^{1/2m}, \quad \gamma=\frac{1}{2m-1},$$

и из теоремы 2 следует, что если

$$R(\tau)\leqslant \exp(a\tau^{(2m-\alpha)\gamma}) \quad \forall\tau>\tau', \quad a<\infty, \qquad (34)$$

то $u_1\equiv u_2$. В [5] такой класс единственности получен для уравнений (1) с меньшим ростом коэффициентов (в наших обозначениях): при $M_1(\tau)=c\tau^\alpha$, $c<\infty$, $\alpha<2m$. Теорема 2 при таком росте коэффициентов дает более широкий класс единственности, а именно: можно положить

$$h(\tau)=(\tau^{\frac{2m-\alpha}{2m}}\psi(\tau))^\gamma,$$

и при этом

$$R(\tau)\leqslant \exp(a(\tau^{2m-\alpha}\psi(\tau))^\gamma) \quad \forall\tau>\tau', \quad a<\infty.$$

2. $M_1(\tau)=\tau^{2m}$. Тогда в качестве $h(\tau)$ можно положить $(\psi(\tau))^\gamma$ и из теоремы 2 получаем следующий класс единственности:

$$R(\tau)\leqslant \tau^{a(\psi(\tau))^\gamma}, \quad a<\infty.$$

3. Можно найти в определенном смысле предельный рост коэффициентов уравнения (1), при котором соответствующие классы единственности становятся степенными.

Так, если $M_1(\tau)=\tau^{2m}h(\tau)$, $K(\tau)=h^2(\tau)$, $h(\tau)\equiv(\psi(\tau))^{1/2m}$, где $\psi(\tau)$ удовлетворяет условию (33), то, как легко убедиться, соответствующий класс единственности таков:

$$R(\tau) \leqslant \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^a, \quad a < \infty.$$

Замечание 3. Как было сказано выше, полученные в работе результаты охватывают и вырождающиеся параболические уравнения второго порядка. Найденные классы единственности обобщенных решений при этом являются более широкими, чем полученные в [2] обобщенные классы Тихонова. Точные классы единственности классических решений задачи Коши и смешанных задач для линейных недивергентных вырождающихся параболических уравнений второго порядка получены в работах [6, 7]. Наши классы единственности близки к найденным в [6, 7] обобщенным классам Тэклинда, в частности, так же, как и в [7], эти классы становятся классами Тэклинда при ограниченных старших коэффициентах уравнения и предельном росте младших $(M(\tau) = 1,\ K(\tau) = h^2(\tau))$, где $h(\tau) = \tau\psi(\tau)$, а $\psi(\tau)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию (33).

1. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Метод введения параметра для исследования эволюционных уравнений // Успехи мат. наук.— 1978.— **33**, № 5.— С. 7—76.
2. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А.* Аналог принципа Сен — Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений // Там же.— 1976.— **31**, № 6.— С. 142—166.
3. *Тихонов А. Н.* Теоремы единственности для уравнения теплопроводности // Мат. сб.— 1935.— **42**, № 2.— С. 199—216.
4. *Tacklind S.* Sur les class quasiaralytiques des solutions des equations aux derivees partielles du tyre parabolique // Nova Acta Gegial Soc. Schientiarum, Uppsaliensis.— 1963.— **10**, N 3.— P. 3—55.
5. *Гагнидзе А. Г.* О единственности решения задачи Коши для параболического уравнения с растущими коэффициентами // Тр. Тбилис. ун-та.— 1988.— **278**.— С. 139—162.
6. *Камынин Л. И.* О существовании решений задачи Коши и линейных краевых задач для параболического уравнения второго порядка в неограниченной области // Дифференц. уравнения.— 1987.— **23**, № 11.— С. 1937—1948.
7. *Камынин Л. И.* О единственности решения линейных краевых задач для вырождающегося параболического уравнения второго порядка в неограниченной области // Там же.— 1985.— **21**, № 11.— С. 1953—1970.

Получено 09.10.91

УДК 517.9

Б. В. Базалий, д-р физ.-мат. наук,
С. П. Дегтярев, канд. физ.-мат. наук.
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

О задаче Стефана с кинетическим и классическим условием на свободной границе

Рассмотрена задача Стефана с кинетическим условием на границе раздела фаз $u^+ = u^- = \varepsilon k(y, \tau) - \varepsilon v$, где $k(y, \tau)$ — полусумма главных кривизн свободной границы, v — скорость ее перемещения в направлении нормали.

Доказана разрешимость модифицированной задачи Стефана в пространствах гладких функций и сходимость ее решений к решению классической задачи Стефана при $\varepsilon \to 0$.

Розглянута задача Стефана з кінетичною умовою на вільній границі розподілу фаз $u^+ = u^- = \varepsilon k(y, \tau) - \varepsilon v$, де $k(y, \tau)$ — напівсума головних кривин, v — швидкість її переміщення у напрямку нормалі.

Доведена розв'язність модифікованої задачі Стефана в просторах гладких функцій та збіжність її розв'язків до розв'язку класичної задачі Стефана, коли $\varepsilon \to 0$.

Сравнительно недавно появилась серия работ (см., например, [1]), в которых математическая модель задачи кристаллизации обосновывается как некоторый предел в краевой задаче для уравнений фазовых полей. При этом наряду с классической задачей Стефана, в которой на искомом фронте крис-