УДК 517.5

В. И. Рукасов, С. О. Чайченко (Славян. пед. ин-т)

ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССОВ $C^{\overline{\psi}}H_\omega$ СУММАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

We consider some problems of the approximation of the classes $C^{\overline{\psi}}H_\omega$, which were introduced by A. I. Stepanets in 1996, by the Valée - Poussin sums. We find asymptotic equalities which, in some important cases, provide the solution of the Kolmogorov – Nikol'skii problem for Valée-Poussin sums on the classes $C^{\overline{\psi}}H_\omega$.

Розглянуто деякі питання наближення класів $C^{\overline{\psi}}H_\omega$, введених О. І. Степанцем у 1996 р., сумами Валле Пуссена. Знайдено асимптотичні рівності, які в деяких випадках забезпечують розв'язок задачі Колмогорова – Нікольського для сум Валле Пуссена на класах $C^{\overline{\psi}}H_\omega$.

Пусть $f(x)$ — непрерывная 2π-периодическая функция и

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f, x) \tag{1}$$

— ее ряд Фурье. Пусть, далее, пара $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ произвольных фиксированных систем чисел $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k)$, $k = 0, 1, \ldots, \psi_1(0) = 1$, $\psi_2(0) = 0$, удовлетворяет условию $\overline{\psi}^2(k) = \psi_1^2(k) + \psi_2^2(k) \neq 0$, $k \in N$. Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_1(k)}{\overline{\psi}^2(k)} A_k(f, x) - \frac{\psi_2(k)}{\overline{\psi}^2(k)} \tilde{A}_k(f, x), \qquad \tilde{A}_k(f, x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx,$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой функции $\varphi(\cdot)$, то $\varphi(\cdot)$, следуя А. И. Степанцу [1], назовем $\overline{\psi}$-производной функции f и будем писать $\varphi(\cdot) = f^{\overline{\psi}}(\cdot)$. Подмножество функций $f \in C$ (C — пространство непрерывных 2π-периодических функций), которые имеют $\overline{\psi}$-производные, обозначим через $C^{\overline{\psi}}$.

Если $f \in C^{\overline{\psi}}$ и при этом $f^{\overline{\psi}} \in H_\omega$, где

$$H_\omega = \{\varphi \in C : |\varphi(t') - \varphi(t'')| \leq \omega(|t' - t''|) \quad \forall t', t'' \in R^1\},$$

$\omega(t)$ — произвольный фиксированный модуль непрерывности, то полагаем $f \in C^{\overline{\psi}}H_\omega$.

Пусть $\Lambda = \|\lambda_k^{(n)}\|$, $k, n = 0, 1, \ldots$, $\lambda_0^{(n)} = 1$, $\lambda_k^{(n)} = 0$ при $k \geq n$, — произвольная бесконечная треугольная матрица чисел. Каждой функции $f \in C^{\overline{\psi}}H_\omega$ на основании ее разложения (1) с помощью матрицы Λ сопоставим последовательность полиномов:

$$U_n(f; x; \Lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^{(n)}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Если n, p — произвольные натуральные числа, $p \leq n$, и

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & 1 \leq k \leq n - p; \\ 1 - \dfrac{k - n + p}{p}, & n - p \leq k \leq n - 1, \end{cases}$$

то полиномы $U_n(f; x; \Lambda)$ совпадают с известными суммами Валле Пуссена $V_{n,p}(f; x)$ функции $f(x)$.

Настоящая работа посвящена изучению асимптотического поведения величины

$$\mathcal{E}(C^{\overline{\psi}}H_\omega; V_{n,p}) = \sup_{f \in C^{\overline{\psi}}H_\omega} \| f(\cdot) - V_{n,p}(f; \cdot) \|_C \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{2}$$

Для величины (2) при $n \to \infty$ найдены асимптотические равенства, которые в ряде важных случаев обеспечивают решение известной задачи Колмогорова–Никольского для сумм $V_{n,p}(f; \cdot)$ на классах $C^{\overline{\psi}}H_\omega$.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество непрерывных положительных выпуклых вниз при $t \geq 1$ функций $\psi(t)$, удовлетворяющих условию $\lim\limits_{t \to \infty} \psi(t) = 0$.

В этой работе функции ψ_i, $i = 1, 2$, будем выбирать из подмножеств F, $\mathfrak{M}_C$ и F_c множества $\mathfrak{M}$, которые определяются следующим образом [1].

Каждой функции $\psi \in \mathfrak{M}$ ставим в соответствие две функции

$$\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right) \quad \text{и} \quad \mu(t) = \mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(t) - t}, \quad t \geq 1.$$

Тогда

$$F = \{\psi \in \mathfrak{M}: \eta'(t) \leq K_1\}, \quad \mathfrak{M}_C = \{\psi \in \mathfrak{M}: 0 < K_2 \leq \mu(t) \leq K_3 < \infty\},$$

где K_j, $j = 1, 2, 3,$ — некоторые постоянные (которые, возможно, зависят от функции ψ) и

$$F_c = \{\psi \in F: \lim_{n \to \infty} (\eta(\psi; n) - n) = c, \ 1 \leq c \leq \infty\}.$$

Понятно, что $\mathfrak{M}_C \subset F_c \subset F$.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема . *Пусть $\psi_i \in F$, $i = 1, 2$, n и $p = p(n)$ — произвольные натуральные числа, $p < n$ и выполнено условие: существуют константы K_4, K_5 такие, что*

$$0 < K_4 \leq \frac{\eta(\psi_1; n) - n}{\eta(\psi_2; n) - n} \leq K_5 < \infty, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Тогда при $n \to \infty$

$$\mathcal{E}(C^{\overline{\psi}}H_\omega; V_{n,p}) = \frac{2\theta_\omega}{\pi^2} \overline{\psi}(n) \ln^+ \frac{\eta(n) - n}{p} \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t \, dt +$$

$$+ O\left(\overline{\psi}(n) \left[\omega\left(\frac{1}{n-p}\right) + \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln^+ \frac{p}{\eta(n) - n} \right] + \omega\left(\frac{1}{n-p}\right) \sum_{i=1}^{2} \psi_i(n-p) - \psi_i(n) \right), \tag{4}$$

где $\overline{\psi}(n) = \sqrt{\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n)}$ и $\eta(n)$ есть либо $\eta(\psi_1; n)$, либо $\eta(\psi_2; n)$, $\theta_\omega \in \left[\frac{2}{3}; 1\right]$, причем $\theta_\omega = 1$, если $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности.

Сделаем несколько замечаний. Пусть $\psi_i \in F_c$, $1 \leq c \leq \infty$, $i = 1, 2$, и выполнено условие (3). Выберем числа $p = p(n)$ так, чтобы $n - p \in [\eta^{-1}(\psi_i; n); n]$, $i = 1, 2$.

Тогда, принимая во внимание неравенства [2]

$$\frac{1}{2} \le \frac{\eta(\psi;n) - n}{n - \eta^{-1}(\psi;n)} \le K_6, \qquad \frac{n - \eta^{-1}(\psi;n)}{\eta^{-1}(\psi;n)} \le K_7,$$

справедливые для любой функции $\psi \in F$ и всех натуральных n, находим

$$\ln^+ \frac{p}{\eta(\psi_i;n) - n} = \ln^+ \frac{p}{n - \eta^{-1}(\psi_i;n)} \frac{n - \eta^{-1}(\psi_i;n)}{\eta(\psi_i;n) - n} \le K, \quad i = 1, 2, \tag{5}$$

и

$$\omega\left(\frac{1}{n-p}\right) \le \omega\left(\frac{1}{\eta^{-1}(\psi_i;n)}\right) \le$$

$$\le \left(2 + \frac{n - \eta^{-1}(\psi_i;n)}{\eta^{-1}(\psi_i;n)}\right)\omega\left(\frac{1}{n}\right) = O(1)\omega\left(\frac{1}{n}\right), \quad i = 1, 2. \tag{6}$$

Учитывая эти факты и очевидное (для выбранных $p = p(n)$) соотношение

$$\psi_i(n-p) = O(1)\psi_i(n), \quad i = 1, 2, \tag{7}$$

из теоремы получаем такое следствие.

***Следствие* 1.** *Пусть* $\psi_i \in F_c$, $1 \le c \le \infty$, $i = 1, 2$, *выполнено условие* (3) *и числа* $p = p(n)$ *выбраны таким образом, чтобы* $n - p \in [\eta^{-1}(\psi_i; n); n]$, $i = 1, 2$.

Тогда при $n \to \infty$

$$\mathscr{E}(C^{\overline{\psi}}H_\omega; V_{n,p}) = \frac{2\theta_\omega}{\pi^2}\,\overline{\psi}(n) \ln^+ \frac{\eta(n) - n}{p} \int\limits_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt + O(1)\overline{\psi}(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right), \tag{8}$$

где $\eta(n)$ *есть либо* $\eta(\psi_1; n)$, *либо* $\eta(\psi_2; n)$ *и* $\theta_\omega \in \left[\frac{2}{3}; 1\right]$, *причем* $\theta_\omega = 1$, *если* $\omega(t)$ *— выпуклый модуль непрерывности.*

Равенство (8) обеспечивает решение задачи Колмогорова–Никольского для сумм $V_{n,p}(f; \cdot)$ на классах $C^{\overline{\psi}}H_\omega$, если $c = \infty$, выполнено условие (3) и $p = o(\eta(n) - n)$. Указанным условиям удовлетворяют функции $\psi_{r,i}(n) = e^{-\alpha_i n^r}$, $\alpha_i > 0$, $0 < r < 1$, $i = 1, 2$, и $p = \ln^\beta n$, $\beta > 0$. Следует отметить, что функции $\psi_{r,i}(n) \notin \mathfrak{M}_C$, $i = 1, 2$.

Если же $\psi_i \in \mathfrak{M}_C$, $i = 1, 2$, то условие (3) выполняется автоматически, при этом для любой функции $\psi \in \mathfrak{M}_C$

$$\ln^+(\eta(\psi; n) - n) = \ln n + O(1).$$

Пусть

$$\Theta \stackrel{\mathrm{df}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{p}{n}.$$

Соотношения (5) – (7) будут выполнены, если $0 \le \Theta < 1$.

Таким образом, из теоремы получаем еще одно следствие.

Следствие 2. *Если* $\psi_i \in \mathfrak{M}_C$, $i = 1, 2$, *и* $0 \le \Theta < 1$, *то при* $n \to \infty$

$$\mathscr{E}(C^{\overline{\psi}} H_\omega; V_{n,p}) = \frac{2\theta_\omega}{\pi^2} \overline{\psi}(n) \ln\frac{n}{p} \int\limits_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t\, dt + O(1) \overline{\psi}(n) \omega\left(\frac{1}{n}\right), \tag{9}$$

где $\theta_\omega \in \left[\frac{2}{3}; 1\right]$, *причем* $\theta_\omega = 1$, *если* $\omega(t)$ *— выпуклый модуль непрерывности.*

В случае, когда $\Theta = 0$, равенство (9) дает решение задачи Колмогорова–Никольского для сумм $V_{n,p}(f; \cdot)$ на классах $C^{\overline{\psi}} H_\omega$ при любых функциях $\psi_i \in \mathfrak{M}_C$, $i = 1, 2$. Если же $0 < \Theta < 1$, то равенство (9) принимает вид

$$\mathscr{E}(C^{\overline{\psi}} H_\omega; V_{n,p}) = O(1) \overline{\psi}(n) \omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Заметим, что в этом случае суммы Валле Пуссена доставляют приближение, совпадающее по порядку с величиной наилучшего приближения тригонометрическими полиномами степени не выше n. Этот факт отмечен в работе [3].

При $p = 1$ (приближение суммами Фурье) равенства (8) и (9) совпадают с результатами А. И. Степанца [1]. При $\psi_1(n) = n^{-r} \cos\frac{\beta\pi}{2}$, $\psi_2(n) = n^{-r} \sin\frac{\beta\pi}{2}$, $r \ge 0$, $\beta \in R^1$, классы $C^{\overline{\psi}} H_\omega$ переходят в классы $W^r_\beta H_\omega$. В этом случае равенство (9) при $p \le \frac{n}{2}$ совпадает с результатом А. В. Ефимова [4] (при $\beta = r$ и $p = o(n)$, $n \to \infty$, такое равенство получено А. Ф. Тиманом [5]).

Доказательство теоремы сводится, по сути, к исследованию интегральных представлений уклонений

$$\rho_{n,p}(f; x) \overset{\text{df}}{=} f(x) - V_{n,p}(f; x), \quad f \in C^{\overline{\psi}} H_\omega, \tag{10}$$

к получению которых мы переходим.

Будем считать, что системы чисел $\psi_1(k)$, $\psi_2(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, являются сужениями на множестве натуральных чисел некоторых функций $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ непрерывного аргумента, а матрицы Λ определяются последовательностями функций $\lambda_i(x) = \lambda_i^{(n)}(x)$, $0 \le x < \infty$, $i = 1, 2$, таких, что $\lambda_i^{(n)}\left(\frac{k}{n}\right) = \lambda_k^{(n)}$, $i = 1, 2$.

Пусть

$$\tau_i^{(n)}(x) = \tau_i(x) = \begin{cases} (1 - \lambda_i^{(n)}(x)) \psi_i(nx), & 0 \le x \le 1; \\ \psi_i(nx), & 1 \le x, \ i = 1, 2. \end{cases}$$

Тогда если функции $\tau_1(x)$ и $\tau_2(x)$ непрерывны при всех $x \ge 0$ и их преобразования Фурье

$$\hat{\tau}_{1+}(t) \overset{\text{df}}{=} \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \tau_1(x) \cos tx\, dx, \qquad \hat{\tau}_{2-}(t) \overset{\text{df}}{=} \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \tau_2(x) \sin tx\, dx$$

суммируемы на всей числовой оси, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\tau}_{1+}(t)|dt < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\tau}_{2-}(t)|dt < \infty,$$

то, как показано в работе [1], для любой функции $f \in C^{\overline{\psi}}H_\omega$ в каждой точке $x \in R^1$ справедливо равенство

$$f(x) - U_n(f; x; \Lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{\overline{\psi}}\left(x - \frac{t}{n}\right)\hat{\tau}_n(t)dt, \tag{11}$$

в котором $\hat{\tau}_n(t) = \hat{\tau}_{1+}(t) + \hat{\tau}_{2-}(t)$ и интеграл понимается в смысле главного значения.

Интегральное представление для величин $\rho_{n,p}(f; x)$, определенных в (10), получается из соотношения (11), если в качестве $\tau_1(x)$ и $\tau_2(x)$ использовать функции

$$\tau_i(x) = \tau_i(p; x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1 - \dfrac{p}{n}; \\ \dfrac{x - \left(1 - \dfrac{p}{n}\right)}{\dfrac{p}{n}}\psi_i(nx), & 1 - \dfrac{p}{n} \le x \le 1; \\ \psi_i(nx), & 1 \le x < \infty, \ i = 1, 2, \end{cases}$$

суммируемость преобразований Фурье которых отмечалась в работе [6].

В дальнейшем удобнее пользоваться представлением (11), в котором функции $\tau_i(\cdot)$ записаны в виде $\tau_i(p; \cdot) = \nu_i(p; \cdot) + \mu_i(p; \cdot)$, $i = 1, 2$, где

$$\nu_i(p; x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \dfrac{n-p}{n}; \\ \dfrac{nx - n + p}{p}\psi_i(n), & \dfrac{n-p}{n} < x \le 1; \\ \psi_i(nx), & 1 < x, \ i = 1, 2, \end{cases} \tag{12}$$

и

$$\mu_i(p; x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, \dfrac{n-p}{n}\right] \cup (1, \infty); \\ \dfrac{nx - n + p}{p}[\psi_i(nx) - \psi_i(n)], & x \in \left(\dfrac{n-p}{n}, 1\right], \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

Суммируемость преобразований Фурье функций $\nu_i(p; \cdot)$, $i = 1, 2$, утверждается леммой 2 из работы [1]. В этом случае представление (11) принимает вид

$$\rho_{n,p}(f; x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{\overline{\psi}}\left(x - \frac{t}{n}\right)\hat{\nu}_{n,p}(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} f^{\overline{\psi}}\left(x - \frac{t}{n}\right)\hat{\mu}_{n,p}(t)dt \stackrel{\text{df}}{=}$$

$$\stackrel{\text{df}}{=} \rho^*_{n,p}(f; x) + \Delta_{n,p}(f; x), \tag{13}$$

где $\hat{\nu}_{n,p}(t) = \hat{\nu}_{1+}(t) + \hat{\nu}_{2-}(t)$, $\hat{\mu}_{n,p}(t) = \hat{\mu}_{1+}(t) + \hat{\mu}_{2-}(t)$.

Ближайшей нашей целью будет получение асимптотического представления для величин $\rho^*_{n,p}(f; x)$ и оценок для величин $\Delta_{n,p}(f; x)$ на множествах

$C^{\overline{\psi}}H_\omega$. Будем пользоваться следующим утверждением, которое, по существу, является дополнением к лемме 3 из работы [1].

Лемма 1. *Пусть* $\psi \in \mathfrak{M}' = \left\{\psi \in \mathfrak{M}: \int_1^\infty \frac{\psi(t)}{t}dt < \infty\right\}$, $\beta \in R^1$ *и* $a_n = a(n)$ *— произвольная последовательность действительных чисел, для которой*

$$a(n) \geq a(0) > 0.$$

Пусть, далее, n *и* $p = p(n)$ *— произвольные натуральные числа,* $p < n$ *и* $\nu(p;\cdot)$ *— любая из функций (12). Тогда если* $\varphi \in H^0_\omega = \left\{f \in H_\omega: \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0\right\}$, *то в каждой точке* $x \in R^1$ *выполняется равенство*

$$r_{n,p}^{\psi,\beta}(\varphi;x) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi\left(x-\frac{t}{n}\right)-\varphi(x)\right]\int_0^\infty \nu(p;v)\cos\left(vt-\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\,dt =$$

$$= -\frac{\psi(n)}{\pi}\int\limits_{a''(n)\leq|t|\leq n\pi/p}\left[\varphi\left(x-\frac{t}{n}\right)-\varphi(x)\right]\frac{\sin\left(t-\frac{\beta\pi}{2}\right)}{t}dt + d_{n,p}^{\psi}(a(n);\varphi;x), \quad (14)$$

где

$$a''(n) = \left\{a(n): a(n) \leq \frac{n\pi}{p}\right\},$$

причем

$$|d_{n,p}^{\psi}(a(n);\varphi;x)| \leq K\left[\psi(n)\left(\omega\left(\frac{1}{n-p}\right)+\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln^+\frac{a(n)p}{n\pi}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\int_{1/a(n)}^{\infty}\frac{\psi(nt+n)}{t}dt + \int_{a(n)}^{\infty}\frac{\psi(n)-\psi\left(n+\frac{n}{t}\right)}{t}dt\right)\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

$$\ln^+ t = \max\{\ln t; 0\}.$$

Доказательство. Пусть

$$\rho_n(f;x) = f(x) - S_{n-1}(f;x),$$

где $S_{n-1}(f;x)$ — частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f(x)$. Используя интегральные представления для $\rho_n(f;x)$, полученные в работе [7], находим

$$r_{n,p}^{\psi,\beta}(\varphi;x) - \rho_n(\varphi;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(x;\frac{t}{n}\right)\int_{(n-p)/n}^{1}(\nu(p;v)-\nu(1;v))\cos\left(vt-\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\,dt, \quad (15)$$

где для сокращения записей введено обозначение $\delta\left(x;\frac{t}{n}\right) = \varphi\left(x-\frac{t}{n}\right)-\varphi(x)$.

Ясно, что при $p = 1$ $r_{n,p}^{\psi,\beta}(\varphi;x) = \rho_n(\varphi;x)$, поэтому всюду в дальнейшем предполагаем $p \neq 1$.

Исследуем представление (15). Принимая во внимание равенства (12), интегрируя по частям и выполняя элементарные преобразования, получаем

$$r_{n,p}^{\psi,\beta}(\varphi;x) - \rho_n(\varphi;x) = \frac{\psi(n)}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta\left(x;\frac{t}{n}\right)\left(S_{n,p}^{\beta}(t) - S_{n,1}^{\beta}(t)\right)dt, \tag{16}$$

где

$$S_{n,p}^{\beta}(t) \overset{\text{df}}{=} \frac{n}{p}\,\frac{\cos\left(t - \dfrac{\beta\pi}{2}\right) - \cos\left(\dfrac{n-p}{n}t - \dfrac{\beta\pi}{2}\right)}{t^2}.$$

Пусть

$$J_{n,p}(\varphi;x;\beta) \overset{\text{df}}{=}$$

$$\overset{\text{df}}{=} \int\limits_{|t|\le n\pi/p}\delta\left(x;\frac{t}{n}\right)\left[\sin\left(t - \frac{\beta\pi}{2}\right)\frac{t - \dfrac{n}{p}\sin\dfrac{p}{n}t}{t^2} + \cos\left(t - \frac{\beta\pi}{2}\right)\frac{\dfrac{2n}{p}\sin^2\dfrac{p}{2n}t}{t^2}\right]dt.$$

Тогда равенство (16) можно записать в виде

$$r_{n,p}^{\psi,\beta}(\varphi;x) - \rho_n(\varphi;x) = \frac{\psi(n)}{\pi}\left(\int\limits_{n\pi/p\le|t|\le n\pi}\delta\left(x;\frac{t}{n}\right)\frac{\sin\left(t - \dfrac{\beta\pi}{2}\right)}{t}dt\, + \right.$$

$$\left. + J_{n,p}(\varphi;x;\beta) - J_{n,1}(\varphi;x;\beta) + \int\limits_{|t|\ge n\pi/p}\delta\left(x;\frac{t}{n}\right)S_{n,p}^{\beta}(t)dt - \int\limits_{|t|\ge n\pi}\delta\left(x;\frac{t}{n}\right)S_{n,1}^{\beta}(t)dt\right). \tag{17}$$

Рассмотрим интегралы из правой части соотношения (17). Вначале получим оценку для $|J_{n,p}(\varphi;x;\beta)|$.

Функция $\dfrac{t - \frac{n}{p}\sin\frac{p}{n}t}{t^2}$ на промежутке $\left(0;\dfrac{n\pi}{p}\right)$ монотонно возрастает. Поэтому (см. предложение III.1.1 работы [7]) функция

$$\int\limits_0^x \sin\left(t - \frac{\beta\pi}{2}\right)\frac{t - \dfrac{n}{p}\sin\dfrac{p}{n}t}{t^2}dt$$

на каждом промежутке $[\alpha_k;\alpha_{k+1})$, $k = 0, 1, \ldots, m = \left[\dfrac{n}{p}\right]$, где α_k — нули функции $\sin\left(t - \dfrac{\beta\pi}{2}\right)$, причем через α_0 обозначен ближайший справа от точки $t = 0$ такой нуль, будет иметь нуль x_k. Следовательно, согласно лемме III.1.3 работы [7]

$$\left|\int_0^{n\pi/p}\delta\left(x;\frac{t}{n}\right)\frac{\sin\left(t-\frac{\beta\pi}{2}\right)\left(t-\frac{n}{p}\sin\frac{p}{n}t\right)}{t^2}dt\right| \le$$

$$\le \omega\left(\frac{2\pi}{n}\right)\int_0^{x_{m-1}}\left|\sin\left(t-\frac{\beta\pi}{2}\right)\frac{t-\frac{n}{p}\sin\frac{p}{n}t}{t^2}\right|dt +$$

$$+\max_{x_{m-1}\le t\le n\pi/p}\left|\delta\left(x;\frac{t}{n}\right)\right|\int_{x_{m-1}}^{n\pi/p}\left|\sin\left(t-\frac{\beta\pi}{2}\right)\frac{t-\frac{n}{p}\sin\frac{p}{n}t}{t^2}\right|dt \le K\omega\left(\frac{1}{n}\right). \quad (18)$$

Аналогичная оценка справедлива и для интеграла, взятого по промежутку $\left[-\frac{n\pi}{p};0\right)$. Тогда, принимая во внимание монотонность функции $\frac{(2n/p)\sin^2(p/2n)t}{t^2}$ на промежутках $\left(-\frac{n\pi}{p};0\right)$ и $\left(0;\frac{n\pi}{p}\right)$, повторяя рассуждения, с помощью которых была доказана оценка (18), для любой функции $\varphi\in H_\omega^0$, любых натуральных $p<n$ и произвольного $x\in R^1$ получаем

$$|J_{n,p}(\varphi;x;\beta)| \le K\omega\left(\frac{1}{n}\right). \quad (19)$$

Учитывая монотонность функции $1/t^2$, $t>0$, и используя рассуждения, с помощью которых была получена оценка (18), можно показать, что для любой функции $\varphi\in H_\omega^0$, любых натуральных $p<n$ и произвольного $x\in R^1$ имеет место неравенство

$$\left|\int_{|t|\ge n\pi/p}\delta\left(x;\frac{t}{n}\right)S_{n,p}^{\beta}(t)dt\right| \le K\omega\left(\frac{1}{n-p}\right). \quad (20)$$

Таким образом, из соотношений (17), (19) и (20) следует

$$r_{n,p}^{\psi,\beta}(\varphi;x)-\rho_n(\varphi;x) = \frac{\psi(n)}{\pi}\int_{n\pi/p\le|t|\le n\pi}\delta\left(x;\frac{t}{n}\right)\frac{\sin\left(t-\frac{\beta\pi}{2}\right)}{t}dt + b_{n,p}^{\psi}(\varphi;x), \quad (21)$$

причем

$$b_{n,p}^{\psi}(\varphi;x) \le K\psi(n)\omega\left(\frac{1}{n-p}\right). \quad (22)$$

Сопоставляя утверждения теоремы III.6.1, предложения III.7.1 из работы [7] и соотношения (21) – (22), получаем утверждение леммы. Лемма 1 доказана.

Выше было отмечено, что функции $\hat{\nu}_{1+}(t)$ и $\hat{\nu}_{2-}(t)$ суммируемы на R^1, причем $\nu_1(p,0)=0$. Поэтому, принимая во внимание соотношения (42) и (42′) из работы [1], заключаем, что для любой функции $f\in C^{\overline{\psi}}H_\omega^0$, $\psi_i\in\mathfrak{M}'$, $i=1$, 2, в каждой точке $x\in R^1$

$$\rho^*_{n,p}(f;x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[f^{\overline{\psi}}\left(x-\frac{t}{n}\right) - f^{\overline{\psi}}(x)\right]\hat{\nu}_{n,p}(t)\,dt. \tag{23}$$

Сравнивая величины $\rho^*_{n,p}(f;x)$ из соотношения (23) и $r^{\psi,\beta}_{n,p}(\varphi;x)$ из соотношения (14), видим, что для любой функции $f \in C^{\overline{\psi}}H^0_\omega$ при любых натуральных $p < n$ в каждой точке $x \in R^1$ выполняется равенство

$$\rho^*_{n,p}(f;x) = r^{\psi_1;0}_{n,p}(f^{\overline{\psi}};x) + r^{\psi_2;1}_{n,p}(f^{\overline{\psi}};x).$$

Поэтому из леммы 1 получаем такое следствие.

Следствие 3. *Пусть* $\psi_i \in \mathfrak{M}'$, $i = 1, 2$, *и* $a_i = a_i(n)$, $i = 1, 2$, *— две произвольные последовательности чисел, для которых*

$$a_i(n) \ge a_i(0) > 0 \quad \forall\, n \in N.$$

Если $f \in C^{\overline{\psi}}H^0_\omega$, *то для любых натуральных чисел* n *и* $p = p(n)$, $p < n$, *в каждой точке* $x \in R^1$

$$\rho^*_{n,p}(f;x) = -\frac{\psi_1(n)}{\pi}\int\limits_{a''_1 \le |t| \le n\pi/p}\delta\left(x;\frac{t}{n}\right)\frac{\sin t}{t}\,dt\ +$$

$$+\ \frac{\psi_2(n)}{\pi}\int\limits_{a''_2 \le |t| \le n\pi/p}\delta\left(x;\frac{t}{n}\right)\frac{\cos t}{t}\,dt + d^{\psi_1}_{n,p}(a_1;f;x) + d^{\psi_2}_{n,p}(a_2;f;x), \tag{24}$$

где

$$\delta\left(x;\frac{t}{n}\right) = f^{\overline{\psi}}\left(x-\frac{t}{n}\right) - f^{\overline{\psi}}(x), \qquad a''_i = \left\{a_i\colon a_i \le \frac{n\pi}{p}\right\}, \quad i = 1, 2,$$

причем

$$\left|d^{\psi_i}_{n,p}(a_i;f;x)\right| \le K\left[\psi_i(n)\left(\omega\left(\frac{1}{n-p}\right) + \omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln^+\frac{a_i p}{n\pi}\right)\ +\right.$$

$$\left. +\ \left(\int\limits_{1/a_i}^{\infty}\frac{\psi_i(nt+n)}{t}\,dt + \int\limits_{a_i}^{\infty}\frac{\psi_i(n)-\psi_i\left(n+\frac{n}{t}\right)}{t}\,dt\right)\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right], \quad i = 1, 2, \tag{25}$$

$$\ln^+ t = \max\{\ln t; 0\}.$$

В случае, когда $p = 1$, аналогичное утверждение доказано А. И. Степанцом в работе [1].

Для величин $\Delta_{n,p}(f;x)$ из соотношения (13) справедлива оценка

$$\left\|\Delta_{n,p}(f;x)\right\|_C \le K\omega\left(\frac{1}{n-p}\right)\sum_{i=1}^{2}(\psi_i(n-p) - \psi_i(n)), \tag{26}$$

для доказательства которой необходимо воспользоваться следующим утверждением.

Лемма 2. *Пусть* $\psi_1 \in \mathfrak{M}$, $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$. *Тогда для любой функции* $f \in C^{\overline{\psi}}H_\omega$ *и произвольных натуральных чисел* n *и* p, $p < n$, *выполняется неравенство*

$$\| \Delta_{n,p}(f;x) \|_C \le E_{n-p}(f^{\overline{\psi}}) \| \hat{\mu}_{n,p} \|_1,$$

в котором $E_{n-p}(f^{\overline{\psi}})$ *— величина наилучшего приближения* $\overline{\psi}$*-производной в равномерной метрике посредством тригонометрических полиномов порядка не выше* $n-p$ *и*

$$\| \hat{\mu}_{n,p} \|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{(n-p)/n}^{1} (\mu_1(p;x)\cos tx + \mu_2(p;x)\sin tx) \right| dt.$$

Доказательство леммы 2 проводится по схеме доказательства предложения 4 из работы [8].

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Для этого возьмем в утверждении следствия 3 в качестве последовательностей $a_i(n)$, $i = 1, 2$, величины

$$a_i(n) = \mu(\psi_i; n) = \frac{n}{\eta(\psi_i; n) - n}, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{27}$$

Понятно, что эти последовательности удовлетворяют всем условиям следствия 3. В работе [9] показано, что

$$\int_{1/\mu(\psi;n)}^{\infty} \frac{\psi(nt+n)}{t} dt + \int_{\mu(\psi;n)}^{\infty} \frac{\psi(n) - \psi\left(n + \frac{n}{t}\right)}{t} dt \le K\psi(n) \quad \forall \psi \in F.$$

Учитывая эти факты и оценки (25), для любой функции $f \in C^{\overline{\psi}} H_\omega^0$ получаем

$$\sum_{i=1}^{2} \left\| d_{n,p}^{\psi_i}(a_i; f; \cdot) \right\|_C \le K\overline{\psi}(n) \left(\omega\left(\frac{1}{n-p}\right) + \omega\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^{2} \ln^+ \frac{p}{\eta(\psi_i; n) - n} \right). \tag{28}$$

Условие (3) позволяет заменить интегралы в формуле (24) на интегралы от тех же функций, которые берутся по одинаковым промежуткам $a_1'' \le |t| \le \frac{n\pi}{p}$ или $a_2'' \le |t| \le \frac{n\pi}{p}$. Погрешности при таких заменах не превысят величин остаточных членов. Поэтому на основании представления (13) с учетом равенства (24), оценок (26) и (28) получаем такое утверждение.

Лемма 3. *Пусть* $\psi_i \in F$, $i = 1, 2$, *и выполнено условие* (3). *Тогда если* $f \in C^{\overline{\psi}} H_\omega^0$, *то для любых натуральных чисел* n *и* $p = p(n)$, $p < n$, *в каждой точке* $x \in R^1$

$$\rho_{n,p}(f;x) = \frac{\overline{\psi}(n)}{\pi} \int_{a_n \le |t| \le n\pi/p} \delta\left(x; \frac{t}{n}\right) \frac{\sin(t - \gamma_n)}{t} dt +$$

$$+ O(1) \left(\overline{\psi}(n) \left[\omega\left(\frac{1}{n-p}\right) + \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln^+ \frac{a_n p}{n} \right] + \omega\left(\frac{1}{n-p}\right) \sum_{i=1}^{2} (\psi_i(n-p) - \psi_i(n)) \right), \tag{29}$$

где

$$\overline{\psi}(n) = \sqrt{\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n)}, \quad \gamma_n = \operatorname{arctg} \frac{\psi_2(n)}{\psi_1(n)}, \quad \ln^+ t = \max\{\ln t; 0\}.$$

а в качестве a_n *можно выбрать любую последовательность из соотношения* (27) (*причем только те ее члены, которые не превышают* $n\pi/p$).

Используя метод построения экстремальных функций, предложенный в [7], можно показать, что

$$\sup_{f \in C^{\bar{\psi}}H_\omega} \left\| \int\limits_{a_n \le |t| \le n\pi/p} \delta\left(x; \frac{t}{n}\right) \frac{\sin(t - \gamma_n)}{t} dt \right\|_C =$$

$$= \frac{2\theta_\omega}{\pi} \ln \frac{\pi n}{p a_n} \int\limits_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t \, dt + O(1)\omega\left(\frac{1}{n}\right), \qquad (30)$$

где $\theta_\omega \in \left[\frac{2}{3}; 1\right]$, причем $\theta_\omega = 1$, если $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности.

Сопоставляя утверждение леммы 3 с равенством (30), завершаем доказательство теоремы.

1. *Степанец А. И.* Приближение $\bar{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье. – Киев, 1996. – 70 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 96.11).
2. *Степанец А. И.* Несколько утверждений для выпуклых функций // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 5. – С. 688 – 702.
3. *Степанец А. И.* Скорость сходимости группы отклонений на множествах $\bar{\psi}$-интегралов // Там же. – № 12. – С. 1673 – 1693.
4. *Ефимов А. В.* О приближении периодических функций суммами Валле Пуссена. II // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – **24**. – С. 431 – 468.
5. *Тиман А. Ф.* Апроксимационные свойства линейных методов суммирования рядов Фурье // Там же. – 1953. – **17**. – С. 99 – 134.
6. *Рукасов В. И., Чайченко С. О.* Приближение $\bar{\psi}$-интегралов 2π-периодических функций суммами Валле Пусена // Ряди Фур'є: теорія і застосування: Зб. наук. пр. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – С. 242 – 254.
7. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
8. *Степанец А. И.* Приближения в пространствах локально интегрируемых функций // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 5. – С. 597 – 625.
9. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1986. – **50**, № 1. – С. 101 – 136.

Получено 10.10.2000