УДК 517.5

**А. С. Романюк** (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

# ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССОВ $B^r_{p,\theta}$ ЛИНЕЙНЫМИ МЕТОДАМИ И НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

We investigate problems related to approximations by linear methods and the best approximations of classes $B^r_{p,\theta}$, $1 \le p \le \infty$, in the space $L_\infty$.

Досліджуються питання, пов'язані з наближеннями лінійними методами, а також найкращими наближеннями класів $B^r_{p,\theta}$, $1 \le p \le \infty$, у просторі $L_\infty$.

**1. Введение.** В настоящей работе исследуются некоторые вопросы, связанные с приближениями классов $B^r_{p,\theta}$, $1 \le p \le \infty$, линейными методами и их наилучшими приближениями тригонометрическими полиномами с „номерами" гармоник из ступенчатого гиперболического креста в пространстве $L_\infty$. Для того чтобы конкретизировать рассматриваемые вопросы, приведем необходимые обозначения и определения.

Пусть $R^d$ — $d$-мерное пространство с элементами $x = (x_1, \dots, x_d)$, $(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$ и $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^{d} [-\pi; \pi]$ — пространство $2\pi$-периодических по каждому аргументу функций $f(x)$, для которых

$$\|f\|_p = \left( (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)| < \infty, \quad p = \infty.$$

Ниже предполагаем, что для функций $f \in L_p(\pi_d)$ выполнено дополнительное условие

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx_j = 0, \quad j = \overline{1, d}.$$

Множество таких функций обозначим $L^0_p(\pi_d)$.

Для функций $f \in L^0_p(\pi_d)$ приведем определение классов О. В. Бесова $B^r_{p,\theta}$.

Пусть $V_l(t)$, $l \in N$, обозначает ядро Валле Пуссена порядка $2l - 1$:

$$V_l(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{l} \cos kt + 2 \sum_{k=l+1}^{2l-1} \left( 1 - \frac{k-l}{l} \right) \cos kt.$$

Сопоставим каждому вектору $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in N$, $j = \overline{1, d}$, полином

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^{d} \left( V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j - 1}}(x_j) \right)$$

и для $f \in L^0_p(\pi_d)$ обозначим

$$A_s(f, x) = f(x) * A_s(x),$$

где „ $*$ " — операция свертки.

Тогда при $1 \le p \le \infty$, $r = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, классы $B^r_{p,\theta}$ определяются следующим образом (см., например, [1, с. 368]):

$$B^r_{p,\theta} = \left\{ f(x) \colon \|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \left( \sum_s 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f,x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \le 1 \right\} \tag{1}$$

при $1 \le \theta < \infty$ и

$$B^r_{p,\infty} = \left\{ f(x) \colon \|f\|_{B^r_{p,\infty}} = \sup_s 2^{(s,r)} \|A_s(f,x)\|_p \le 1 \right\}. \tag{1'}$$

Отметим, что в случае $p \in (1, \infty)$ (1) и (1′) можно записать в других обозначениях:

$$B^r_{p,\theta} = \left\{ f(x) \colon \|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \left( \sum_s 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f,x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \le 1 \right\} \tag{2}$$

при $1 \le \theta < \infty$ и

$$B^r_{p,\infty} = \left\{ f(x) \colon \|f\|_{B^r_{p,\infty}} = \sup_s 2^{(s,r)} \|\delta_s(f,x)\|_p \le 1 \right\}. \tag{2'}$$

В (2) и (2′) $\delta_s(f, x)$ обозначает „блок" ряда Фурье $f(x)$:

$$\delta_s(f,x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

где $\rho(s) = \left\{ k \colon k = (k_1, \ldots, k_d),\ 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j},\ j = \overline{1, d} \right\}$ и $\hat{f}(k)$ — коэффициенты Фурье $f(x)$.

Отметим, что классы $B^r_{p,\infty}$ совпадают с классами $H^r_p$, введенными С. М. Никольским (см., например, [1, с. 189]).

Для удобства напомним также определение классов $W^r_{p,\alpha}$ (см., например, [2, с. 31]).

Пусть $F_r(x, \alpha)$ обозначают многомерные аналоги ядер Бернулли, т. е.

$$F_r(x,\alpha) = 2^d \sum_k \prod_{j=1}^d k_j^{-r_j} \cos\left( k_j x_j - \frac{\alpha_j \pi}{2} \right), \quad r_j > 0, \quad \alpha_j \in R,$$

и в сумме содержатся только те векторы $k$, для которых $k_j > 0$, $j = \overline{1, d}$. Через $W^r_{p,\alpha}$ обозначим класс функций $f(x)$, представимых в виде

$$f(x) = \varphi(x) * F_r(x,\alpha) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} \varphi(y) F_r(x - y, \alpha)\, dy,$$

где $\varphi(x) \in L_p(\pi_d)$, $\|\varphi\|_p \le 1$.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что координаты вектора $r = (r_1, \ldots, r_d)$ упорядочены в виде $0 < r_1 = r_2 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \le \ldots \le r_d$ и $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$ обозначает вектор с координатами $\gamma_j = \dfrac{r_j}{r_1}$, $j = \overline{1, d}$.

Пусть $Q^r_n$ обозначает множество

$$Q_n^r = \bigcup_{(s,\gamma)\le n} \rho(s).$$

Тогда множество векторов $k = (k_1, \ldots, k_d)$ таких, что $k \in Q_n^r$, называют ступенчатым гиперболическим крестом. Иногда нам удобно рассматривать множество $\Gamma(N, \gamma)$, соответствующее множеству $Q_n^r$. По определению

$$\Gamma(N,\gamma) = \left\{ k\colon k = (k_1,\ldots,k_d),\ \prod_{j=1}^{d} |k_j|^{\gamma_j} \le N \right\}$$

и при этом $\Gamma(N, \gamma)$ называют гиперболическим крестом. Через $T(N, \gamma)$ обозначим множество полиномов вида

$$t(x) = \sum_{k\in\Gamma(N,\gamma)} c_k e^{i(k,x)}$$

и соответственно через $T(Q_n^r)$ — множество полиномов вида

$$t(x) = \sum_{k\in Q_n^r} c_k e^{i(k,x)}.$$

В случае, когда $\gamma = (1, \ldots, 1) \in N^d$, множество $T(N, \gamma)$ будем обозначать $T(N)$. Отметим, что в принятых обозначениях справедливы соотношения

$$T(Q_n^r) \subset T(2^n, \gamma) \subset T(Q_{n+\gamma(d)}^r),$$

где $\gamma(d) = \gamma_1 + \ldots + \gamma_d$.

Для $f \in L_p^0(\pi_d)$ определим величины

$$E_{N,\gamma}(f)_p = \inf_{t\in T(N,\gamma)} \|f - t\|_p, \quad 1 \le p \le \infty,$$

$$E_{Q_n^r}(f)_p = \inf_{t\in T(Q_n^r)} \|f - t\|_p, \quad 1 \le p \le \infty,$$

— наилучшие приближения функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами с „номерами" гармоник соответственно с гиперболического и ступенчатого гиперболического крестов. Для функционального класса $F$ полагаем

$$E_{N,\gamma}(F)_p = \sup_{f\in F} E_{N,\gamma}(f)_p,$$

$$E_{Q_n^r}(F)_p = \sup_{f\in F} E_{Q_n^r}(f)_p.$$

Если $A$ — некоторое конечное множество, то через $|A|$ обозначим количество его элементов.

Известно [3], что в одномерном случае существует последовательность операторов, реализующая порядки наилучших приближений классов периодических функций $W_p^r$ в пространстве $L_p$, $1 \le p \le \infty$, и, кроме того, нормы этих операторов равномерно ограничены. Несколько иная ситуация имеет место в многомерном случае при приближении классов $W_{p,\alpha}^r$ и $H_p^r$ в пространствах $L_1$ и $L_\infty$.

Так, в работах [4, 5] (см. также [2]) В. Н. Темляков установил, что существуют линейные операторы со значениями в $T(Q_n^r)$, которые обеспечивают тот же порядок приближения классов $W_{1,\alpha}^r$ и $H_1^r$ в метрике $L_1$, что и наилучшие приближения $E_{Q_n^r}(W_{1,\alpha}^r)_1$ и $E_{Q_n^r}(H_1^r)_1$ соответственно. Но при этом последовательность таких операторов имеет неограниченные нормы. Аналогичная ситуация имеет место и при приближении классов $H^r_\infty$ в метрике $L_\infty$.

В связи с этим представляется интересным исследовать поведение норм последовательностей линейных операторов, которые обеспечивают такой же порядок приближения классов $B^r_{p,\theta}$ в равномерной метрике, как их наилучшие приближения. Исследованию этого вопроса и посвящена первая часть работы.

Во второй части работы устанавливаются соотношения между наилучшими приближениями классов $B^r_{p,\theta}$ в метрике $L_\infty$ полиномами из $T(Q^r_n)$ и приближениями этих классов линейными операторами со значениями в $T(Q^r_n)$.

Сформулируем несколько известных утверждений, необходимых в дальнейшем.

**Теорема А** (Литтлвуда – Пэли [1, с. 65]). *Пусть задано $p \in (1, \infty)$. Существуют положительные числа $C_1$ и $C_2$ такие, что для каждой функции $f \in L^0_p(\pi_d)$ справедлива оценка*

$$C_1 \|f\|_p \le \left\| \left( \sum_s |\delta_s(f, x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \le C_2 \|f\|_p.$$

**Лемма А** [2, с. 28]. *Пусть $1 < p < q \le \infty$ и $f \in L^0_p(\pi_d)$. Тогда*

$$\|f\|_p \gg \left\{ \sum_s \left( \|\delta_s(f, x)\|_q 2^{\|s\|_1 (1/q - 1/p)} \right)^p \right\}^{1/p}.$$

**Теорема Б** [6]. *Пусть $n = (n_1, \ldots, n_d)$, $n_j$ — целые неотрицательные числа, $j = \overline{1, d}$, и*

$$t(x) = \sum_{|k_j| \le n_j} c_k e^{i(k, x)}.$$

*Тогда при $1 \le q < p \le \infty$ имеет место неравенство*

$$\|t\|_p \le 2^d \prod_{j=1}^d n_j^{(1/q - 1/p)} \|t\|_q.$$

Это неравенство установлено С. М. Никольским и названо „неравенством разных метрик". В случае $d = 1$ и $p = \infty$ соответствующее неравенство доказал Джексон [7].

**Теорема В** [2, с. 32]. *Для того чтобы $f \in H^r_p$, $1 \le p \le \infty$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения*

$$\|\delta_s(f, x)\|_p \ll 2^{-(s, r)}, \quad 1 < p < \infty,$$

$$\|A_s(f, x)\|_p \ll 2^{-(s, r)}, \quad 1 \le p \le \infty.$$

**2. Оценка норм операторов приближения.** Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Пусть на $L^0_\infty(\pi_d)$ определена последовательность ограниченных линейных операторов $\mathcal{L}_{Q^r_n}$, $r = (r_1, \ldots, r_1) \in R^d_+$, ставящих в соответствие каждой функции из $L_\infty(\pi_d)$ тригонометрический полином из $T(Q^r_n)$ таким образом, что для функций $f(x)$ из класса $B^r_{\infty,\theta}$, $1 \le \theta < \infty$, выполнено порядковое неравенство*

$$\|f - \mathcal{L}_{Q_n^r}(f)\|_\infty \ll E_{Q_n^r}(B^r_{\infty,\theta})_\infty.$$

*Тогда для любого* $\varepsilon > 0$

$$\|\mathcal{L}_{Q_n^r}\| \gg n^{(d-1)(1-\varepsilon)}.$$

***Доказательство.*** Пусть $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_d)$, $\tau_j \in R$, $j = \overline{1, d}$, и $I_\tau$ обозначает оператор сдвига аргумента функции $f(x)$ на вектор $\tau$, т. е. $(I_\tau f)(x) = f(x + \tau)$. Следуя Марцинкевичу [8], рассмотрим ограниченный линейный оператор $T_{Q_n^r}$, действующий на $f(x)$ по правилу

$$(T_{Q_n^r} f)(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} (I_{-\tau} \mathcal{L}_{Q_n^r} I_\tau f)(x) d\tau.$$

Тогда вследствие инвариантности нормы относительно сдвига аргумента справедливо соотношение

$$\|T_{Q_n^r}\| \leq \|\mathcal{L}_{Q_n^r}\|. \tag{3}$$

Кроме того, легко проверить, что

$$T_{Q_n^r}(e^{i(k,x)}) = \begin{cases} c_{n,k} e^{i(k,x)}, & k \in Q_n^r; \\ 0, & k \overline{\in} Q_n^r. \end{cases}$$

Действительно, если $k \in Q_n^r$, то

$$T_{Q_n^r}(e^{i(k,x)}) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} I_{-\tau} \mathcal{L}_{Q_n^r} e^{i(k,(x+\tau))} d\tau = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} I_{-\tau} \mathcal{L}_{Q_n^r} e^{i(k,x)} e^{i(k,\tau)} d\tau. \tag{4}$$

Принимая во внимание, что $\mathcal{L}_{Q_n^r}(e^{i(k,x)})$ — элемент $T(Q_n^r)$, можем записать

$$\mathcal{L}_{Q_n^r}(e^{i(k,x)}) = \sum_{m \in Q_n^r} c_{n,m} e^{i(m,x)}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) находим

$$T_{Q_n^r}(e^{i(k,x)}) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} I_{-\tau} \left( e^{i(k,\tau)} \sum_{m \in Q_n^r} c_{n,m} e^{i(m,x)} \right) d\tau =$$

$$= (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} \left( e^{i(k,\tau)} \sum_{m \in Q_n^r} c_{n,m} e^{i(m,(x-\tau))} \right) d\tau = c_{n,k} e^{i(k,x)}.$$

Аналогично проверяется, что если $k \overline{\in} Q_n^r$, то $T_{Q_n^r}(e^{i(k,x)}) = 0$. Таким образом, $T_{Q_n^r}$ — оператор, который действует на $f(x)$ следующим образом:

$$(T_{Q_n^r} f)(x) = f(x) * \sum_{k \in Q_n^r} c_{n,k} e^{i(k,x)}. \tag{6}$$

Далее, пусть $f \in B^r_{\infty,\theta}$. Тогда $I_\tau f \in B^r_{\infty,\theta}$ и согласно условию теоремы

$$\|I_\tau f - \mathcal{L}_{Q_n^r}(I_\tau f)\|_\infty \ll E_{Q_n^r}(B^r_{\infty,\theta})_\infty. \tag{7}$$

Обозначая через $I$ единичный оператор и используя соотношение (7), записываем

$$\|f - T_{Q^r_n}(f)\|_\infty = (2\pi)^{-d} \left\| \int_{\pi_d} I_{-\tau}(I - \mathcal{L}_{Q^r_n})(I_\tau f)\, d\tau \right\|_\infty \le$$

$$\le (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} \left\| I_{-\tau}(I_\tau(f) - \mathcal{L}_{Q^r_n}(I_\tau(f)) \right\|_\infty d\tau =$$

$$= (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} \left\| I_\tau(f) - \mathcal{L}_{Q^r_n}(I_\tau(f)) \right\|_\infty d\tau \ll E_{Q^r_n}(B^r_{\infty,\theta})_\infty. \qquad (8)$$

Таким образом, как следует из соотношений (3) и (8), теорему достаточно доказать для оператора из (6).

Итак, пусть

$$\mathcal{L}_{Q^r_n}(f) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(x-y) L_{Q^r_n}(y)\, dy,$$

$$L_{Q^r_n}(y) = \sum_{k \in Q^r_n} c_{n,k} e^{i(k,y)}.$$

Тогда для нормы оператора $\mathcal{L}_{Q^r_n}$ можем записать

$$\|\mathcal{L}_{Q^r_n}\| = \|L_{Q^r_n}\|_1. \qquad (9)$$

Сначала докажем следующее вспомогательное утверждение.

**Лемма 1.** *Существует $\delta > 0$ такое, что для всех $n$ выполнено неравенство*

$$\sum_{k \in Q^r_n} |c_{n,k}| \ge \delta |Q^r_n|.$$

***Доказательство.*** Будем рассуждать от противного, т. е. предположим, что для любого $\delta > 0$ найдется $n$ такое, что

$$\sum_{k \in Q^r_n} |c_{n,k}| < \delta |Q^r_n|. \qquad (10)$$

Обозначим $\Omega = \{ k = (k_1, \ldots, k_d),\ |c_{n,k}| > 2^{-1} \}$. Тогда согласно (10)

$$\delta |Q^r_n| > \sum_{k \in Q^r_n / \Omega} |c_{n,k}| + \sum_{k \in \Omega} |c_{n,k}| > \sum_{k \in Q^r_n / \Omega} |c_{n,k}| + \frac{1}{2} \sum_{k \in \Omega} 1 =$$

$$= \sum_{k \in Q^r_n / \Omega} |c_{n,k}| + \frac{1}{2}|\Omega| \ge \frac{1}{2}|\Omega|,$$

т. е.

$$|\Omega| < 2\delta |Q^r_n|. \qquad (11)$$

Пусть далее $S$ обозначает множество векторов $s = (s_1, \ldots, s_d)$: $(s, 1) \le n$, $\rho(s) \in Q^r_n$, таких, что для некоторого вектора $k^s = (k^s_1, \ldots, k^s_d) \in \rho(s)$ выполнено неравенство $|c_{n,k^s}| \le 2^{-1}$. Соответственно $\bar{S}$ — множество остальных векторов $s = (s_1, \ldots, s_d)$ таких, что $\rho(s) \in Q^r_n$. Тогда согласно (11) в силу оценки

$$\sum_{s \in \bar{S}} 2^{(s,1)} \le |\Omega|$$

можем записать

$$\sum_{s\in\bar S} 2^{(s,1)} < 2\delta|Q_n^r| \asymp \delta 2^n n^{d-1} = 2^{n-\log_2(1/\delta)} n^{d-1} \asymp$$

$$\asymp 2^{n-\log_2(1/\delta)}\left(n-\log_2\frac{1}{\delta}\right)^{d-1} \asymp \sum_{(s,1)\le n-\log_2(1/\delta)} 2^{(s,1)}.$$

Следовательно, для количества элементов множества $\bar S$ выполнено соотношение

$$|\bar S| \ll \left(n-\log_2\frac{1}{\delta}\right)^d. \tag{12}$$

(Здесь, не умаляя общности, предполагаем $\delta > n^{-1}$.)

Далее, поскольку

$$|S| + |\bar S| \asymp n^d, \tag{13}$$

то согласно (12) и (13) получаем оценку

$$|S| \ge C(d)\left(n^d - \left(n-\log_2\frac{1}{\delta}\right)^d\right) \gg n^{d-1}\log_2\frac{1}{\delta}. \tag{14}$$

Теперь рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_{s\in S}\left(\prod_{j=1}^d k_j^s\right)^{-r_1} e^{i(k^s,x)}|S|^{-1/\theta}, \tag{15}$$

где, по-прежнему, вектор $k^s = (k_1^s,\dots,k_d^s) \in Q_n^r$ такой, что $|c_{n,k^s}| \le 2^{-1}$. Поскольку функция

$$g(x) = \sum_{s\in S}\left(\prod_{j=1}^d k_j^s\right)^{-r_1} e^{i(k^s,x)}$$

принадлежит классу $H_\infty^r$ (см. [2, с. 61]), то согласно теореме B

$$\|A_s(g,x)\|_\infty \ll 2^{-r_1\|s\|_1}.$$

Следовательно, в силу этого соотношения

$$\|f\|_{B_{\infty,\theta}^r} = |S|^{-1/\theta}\left(\sum_{s\in S}2^{(s,r)\theta}\|A_s(g,x)\|_\infty^\theta\right)^{1/\theta} \ll |S|^{-1/\theta}\left(\sum_{s\in S}1\right)^{1/\theta} \ll 1,$$

и поэтому функция $C_1 f(x)$, с некоторой постоянной $C_1 > 0$, принадлежит классу $B_{\infty,\theta}^r$.

Таким образом, с одной стороны, рассматривая для $f \in B_{\infty,\theta}^r$ приближающий полином

$$t(f,x) = \sum_{(s,\gamma)\le n} A_s(f,x),$$

имеем

$$\|f - t_n(f,x)\|_\infty = \left\|\sum_{(s,\gamma)>n} A_s(f,x)\right\|_\infty \le \sum_{(s,\gamma)>n}\|A_s(f,x)\|_\infty =$$

$$= \sum_{(s,\gamma)>n} 2^{(s,r)}\|A_s(f,x)\|_\infty 2^{-(s,r)}. \tag{16}$$

Используя неравенство Гельдера (с естественной модификацией при $\theta = 1$) и затем соотношение

$$\sum_{(s,\gamma)>n} 2^{-\alpha(s,\gamma)} \asymp 2^{-\alpha n} n^{d-1}, \quad \alpha > 0,$$

продолжаем оценку (16):

$$\leq \left( \sum_{(s,\gamma)>n} 2^{(s,r)\theta} \| A_s(f, x) \|_\infty^\theta \right)^{1/\theta} \left( \sum_{(s,\gamma)>n} 2^{-(s,r)\theta'} \right)^{1/\theta'} \ll$$

$$\ll \| f \|_{B^r_{\infty,\theta}} 2^{-nr_1} n^{(d-1)/\theta'} \leq 2^{-nr_1} n^{(d-1)/\theta'}.$$

Отсюда заключаем, что

$$E_{Q^r_n}(B^r_{\infty,\theta})_\infty \ll 2^{-nr_1} n^{(d-1)(1-1/\theta)}. \tag{17}$$

С другой стороны, согласно условию теоремы для $f(x)$ из (15) имеем

$$\| f - \mathcal{L}_{Q^r_n}(f) \|_\infty \ll E_{Q^r_n}(B^r_{\infty,\theta})_\infty.$$

Сопоставляя эту оценку с (17), получаем

$$\| f - \mathcal{L}_{Q^r_n}(f) \|_\infty \ll 2^{-nr_1} n^{(d-1)(1-1/\theta)}. \tag{18}$$

Теперь оценим левую часть (18) снизу. Имеем

$$\| f - \mathcal{L}_{Q^r_n}(f) \|_\infty \geq | f(0) - \mathcal{L}_{Q^r_n}(f(0)) | =$$

$$= \left| \sum_{s \in S} (1 - c_{n,k^s}) \left( \prod_{j=1}^d k_j^s \right)^{-r_1} \right| |S|^{-1/\theta} \geq \frac{1}{2} \sum_{s \in S} \left( \prod_{j=1}^d k_j^s \right)^{-r_1} |S|^{-1/\theta} \gg$$

$$\gg 2^{-nr_1} |S| |S|^{-1/\theta} = 2^{-nr_1} |S|^{1-1/\theta}. \tag{19}$$

Сопоставляя (18) и (19), получаем оценку

$$2^{-nr_1} |S|^{1-1/\theta} \ll 2^{-nr_1} n^{(d-1)(1-1/\theta)},$$

из которой следует, что

$$|S| \ll n^{d-1}. \tag{20}$$

Наконец, сопоставляя (14) и (20), находим

$$n^{d-1} \log_2 \frac{1}{\delta} \ll n^{d-1},$$

т. е. $\log_2(1/\delta) \leq C_2$, где $C_2$ — некоторая абсолютная постоянная. Легко видеть, что для достаточно малых $\delta > 0$ это неравенство противоречиво.

Лемма доказана.

Далее нам понадобится еще одно вспомогательное утверждение.

**Лемма 2** [2, с. 23]. *Для произвольного $\eta > 0$ найдется постоянная $C_\eta > 0$ такая, что для произвольного полинома $t(x) \in T(Q^r_n)$ выполняется неравенство*

$$\sum_{k \in Q^r_n} |\hat{t}(k)| \leq C_\eta n^\eta 2^n \| t \|_1. \tag{21}$$

Теперь оценим правую часть (9). Запишем (21) в виде

$$\| t \|_1 \geq C_\delta n^{-\delta} 2^{-n} \sum_{k \in Q_n^r} |\hat{t}(k)|,$$

где число $\delta > 0$ взято из леммы 1, и воспользуемся леммой 1. В результате будем иметь

$$\| \mathcal{L}_{Q_n^r} \| = \| L_{Q_n^r} \|_1 \gg n^{-\delta} 2^{-n} \delta |Q_n^r| \asymp n^{-\delta} 2^{-n} 2^n n^{d-1} \asymp n^{(d-1)(1-\delta/(d-1))}.$$

Полагая $\varepsilon = \delta/(d-1)$, получаем утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Отметим, что утверждения, аналогичные теореме 1, для классов $W^r_{\infty,\alpha}$ и $H^r_\infty$ доказаны В. Н. Темляковым в [4, 5] (см. также [2]).

**3. Соотношение между линейными методами приближения и наилучшими приближениями.** Установим сначала оценку снизу приближения классов $B^r_{p,\theta}$, $1 \leq p \leq \leq \infty$, линейными методами в пространстве $L_\infty$. Эта оценка в сочетании с известным результатом о наилучших приближениях позволит записать соотношение между приближениями линейными методами и наилучшими приближениями классов $B^r_{p,\theta}$, $1 \leq p \leq 2$, в пространстве $L_\infty$.

**Теорема 2.** *Пусть* $\mathcal{L}_N$ *— линейный ограниченный оператор, сопоставляющий каждой функции* $f \in B^r_{p,\theta}$, $1 \leq \theta < \infty$, $1 \leq p \leq \infty$, *тригонометрический полином* $\mathcal{L}_N(f) \in T(N, \gamma)$. *Тогда*

$$\sup_{f \in B^r_{p,\theta}} \| f - \mathcal{L}_N(f) \|_\infty \gg N^{-r_1 + 1/p} (\log^{\nu-1} N)^{1-1/\theta}, \quad r_1 > \frac{1}{p}. \tag{22}$$

***Доказательство.*** Заметим, что из тех же соображений, что и при доказательстве предыдущей теоремы, оценку (22) достаточно доказать для оператора $\mathcal{L}_N$, который задается формулой

$$\mathcal{L}_N(f) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(x-y) L_N(y)\, dy,$$

где

$$L_N(y) = \sum_{k \in \Gamma(N,\gamma)} c_{N,k}\, e^{i(k,y)}.$$

Кроме того, не ограничивая общности, будем считать, что $\nu = d$. В таком случае вектор $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$ имеет вид $\gamma = (1, \ldots, 1) \in N^d$ и, следовательно, $\mathcal{L}_N(f) \in T(N)$. Пусть, по-прежнему, $V_m(t)$ обозначает ядро Валле Пуссена

$$V_m(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kt + 2\sum_{k=m+1}^{2m-1} \frac{2m-k}{m} \cos kt.$$

Для вектора $s = (s_1, \ldots, s_d) \in N^d$ положим

$$f_s(x) = \prod_{j=1}^{d} \left( V_{2^{s_j+1}}(x_j) - V_{2^{s_j}}(x_j) \right).$$

Легко проверяется, что

$$\| f_s \|_p \asymp 2^{\|s\|_1 (1-1/p)}, \quad 1 \leq p \leq \infty. \tag{23}$$

Далее, по числу $N$ подберем $n$ из соотношения $2^{n-1} < N \le 2^n$ и рассмотрим функцию

$$f(x) = C_3\, 2^{-n(r_1+1-1/p)}\, n^{-(d-1)/\theta} \sum_{s \in S_n} f_s(x),$$

где $S_n = \{ s : \|s\|_1 = n+1 \}$, $C_3 > 0$ — некоторая постоянная. Заметим, что согласно определению множеств — полиномов $T(N)$ и векторов $S_n$, а также в силу выбора чисел $n$ и $N$ справедливо равенство

$$f(x) * L_N(x) = 0. \tag{24}$$

Нетрудно убедиться также, что $f \in B^r_{p,\theta}$, $1 \le \theta < \infty$, $1 \le p \le \infty$.

Действительно,

$$\|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \left( \sum_s 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f,x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \asymp 2^{-n(r_1+1-1/p)}\, n^{-(d-1)/\theta} \times$$

$$\times \left( \sum_{s\in S_n} 2^{(s,r)\theta} \|f_s\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \asymp 2^{-n(r_1+1-1/p)}\, n^{-(d-1)/\theta} \left( \sum_{s\in S_n} 2^{(s,r)\theta}\, 2^{\|s\|_1(1-1/p)\theta} \right)^{1/\theta} \asymp$$

$$\asymp 2^{-n(r_1+1-1/p)}\, n^{-(d-1)/\theta} \left( \sum_{s\in S_n} 2^{\|s\|_1(r_1+1-1/p)\theta} \right)^{1/\theta} \asymp n^{-(d-1)/\theta} \left( \sum_{s\in S_n} 1 \right)^{1/\theta} \ll 1.$$

Таким образом, принимая во внимание равенство (24) и соотношение $2^{n-1} < N \le 2^n$, получаем

$$\|f - \mathcal{L}_N(f)\|_\infty = \|f\|_\infty \asymp 2^{-n(r_1-1/p)}\, n^{-(d-1)/\theta}\, n^{d-1} =$$

$$= 2^{-n(r_1-1/p)}\, n^{(d-1)(1-1/\theta)} \asymp N^{-(r_1-1/p)} \left(\log^{d-1} N\right)^{1-1/\theta}.$$

Следовательно,

$$\sup_{f\in B^r_{p,\theta}} \|f - \mathcal{L}_N(f)\|_\infty \gg N^{-(r_1-1/p)} \left(\log^{d-1} N\right)^{1-1/\theta}. \tag{25}$$

Теорема доказана.

Отметим, что в [9] была доказана следующая теорема.

**Теорема Г.** *Пусть* $1 \le p \le 2$, $1 \le \theta \le \infty$, $r_1 > 1/p$. *Тогда*

$$E_{N,\gamma}(B^r_{p,\theta})_\infty \ll N^{-(r_1-1/p)} (\log^{\nu-1} N)^{(1/2-1/\theta)_+}. \tag{26}$$

Сопоставляя (25) и (26), приходим к утверждению.

**Теорема 3.** *Пусть* $r = (r_1, \ldots, r_1) \in R^d_+$, $1 < \theta < \infty$. *Тогда при* $1 \le p \le 2$, $r_1 > 1/p$ *для любой последовательности линейных ограниченных операторов* $\mathcal{L}_N$, *действующих из* $B^r_{p,\theta}$ *в* $T(N,\gamma)$, *выполнено соотношение*

$$E_{N,\gamma}(B^r_{p,\theta})_\infty = o\left( \sup_{f\in B^r_{p,\theta}} \|f - \mathcal{L}_N(f)\|_\infty \right). \tag{27}$$

Соотношение (27) свидетельствует о том, что приближение классов $B^r_{p,\theta}$ $1 < \theta < \infty$, $1 \le p \le 2$, линейными методами в равномерной метрике не реализует порядковых оценок соответствующих наилучших приближений. В связи с этим отметим, что, как было установлено В. Н. Темляковым [4, 5], для любой последовательности линейных ограниченных операторов $\mathcal{L}_{Q_n^r}$ со значениями в $T(Q_n^r)$ при $d \geq 2$, $r_1 > 1/p$ также справедливы соотношения

$$E_{Q_n^r}(W_{p,\alpha}^r)_\infty = o\left(\sup_{f \in W_{p,\alpha}^r} \|f - \mathcal{L}_{Q_n^r}(f)\|_\infty\right), \quad 1 < p < \infty,$$

$$E_{Q_n^r}(H_p^r)_\infty = o\left(\sup_{f \in H_p^r} \|f - \mathcal{L}_{Q_n^r}(f)\|_\infty\right), \quad 1 \leq p < \infty.$$

Относительно классов $W_{1,\alpha}^r$ ситуация иная. Так, если для приближения функций $f \in W_{1,\alpha}^r$ использовать полиномы

$$\mathcal{L}_{Q_n^r}(f) = f(x) * t_n(F_r),$$

где $t_n(F_r)$ — полином из $T(Q_n^r)$, наилучшим образом приближающий в $L_\infty$ ядро Бернулли $F_r(x, \alpha)$, то

$$\sup_{f \in W_{1,\alpha}^r} \|f - \mathcal{L}_{Q_n^r}(f)\|_\infty \asymp E_{Q_n^r}(F_r)_\infty \asymp E_{Q_n^r}(W_{1,\alpha}^r)_\infty.$$

В то же время, как было отмечено выше,

$$E_{Q_n^r}(H_1^r)_\infty = o\left(\sup_{f \in H_1^r} \|f - \mathcal{L}_{Q_n^r}(f)\|_\infty\right).$$

Заметим, что вопрос о соотношении между величинами $E_{N,\gamma}(B_{p,1}^r)_\infty$ и $\sup_{f \in B_{p,1}^r} \|f - \mathcal{L}_N(f)\|_\infty$ остался открытым.

1. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
2. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – 112 с.
3. *Dahmen W., Gorlich E.* A conjecture of M. Golomb on optimal and nearly-optimal approximation // Bull. Amer. Math. Soc. – 1974. – **80**, № 6. – P. 1199–1202.
4. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной разностью тригонометрическими полиномами и поперечники некоторых классов функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1982. – **46**, № 1. – С. 171–186.
5. *Темляков В. Н.* Приближение периодических функций нескольких переменных тригонометрическими полиномами и поперечники некоторых классов функций // Там же. – 1985. – **49**, № 5. – С. 986–1030.
6. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1951. – **38**. – С. 244–278.
7. *Jakson D.* Certain problem of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. – 1933. – **39**, № 12. – P. 889–906.
8. *Marcinkiewicz J.* Quelques remarques sur l'interpolation // Acta Litt. Acad. Sci. Szeged. – 1937. – **8**. – P. 127–130.
8. *Романюк А. С.* Об оценках аппроксимативных характеристик классов Бесова периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 9. – С. 1250–1261.

Получено 05.12.2001