УДК 517.5

Б. И. Голубов (Моск. инж.-физ. ин-т, Россия)

О МОДИФИЦИРОВАННОМ СИЛЬНОМ ДВОИЧНОМ ИНТЕГРАЛЕ И ПРОИЗВОДНОЙ*

For functions $f \in L(R_+)$, we define a modified strong dyadic integral $J(f) \in L(R_+)$ and a modified strong dyadic derivative $D(f) \in L(R_+)$. We obtain a necessary and sufficient condition for the existence of the modified strong dyadic integral $J(f)$. Under the condition $\int_{R_+} f(x)\,dx = 0$, we prove the equalities $J(D(f)) = f$ and $D(J(f)) = f$. We find a countable set of eigenfunctions of the operators J and D. We prove that the linear hull L of this set is dense in the dyadic Hardy space $H(R_+)$. For the functions $f \in H(R_+)$, we define a modified uniform dyadic integral $J(f) \in L^\infty(R_+)$.

Для функцій $f \in L(R_+)$ визначено модифікований сильний двійковий інтеграл $J(f) \in L(R_+)$ та модифіковану сильну двійкову похідну $D(f) \in L(R_+)$. Отримано необхідну та достатню умову існування модифікованого сильного двійкового інтеграла $J(f)$. За умови $\int_{R_+} f(x)\,dx = 0$ доведено рівності $J(D(f)) = f$ та $D(J(f)) = f$. Знайдено зліченну множину власних функцій операторів J та D. Доведено, що лінійна оболонка L цієї множини є щільною у двійковому просторі Харді $H(R_+)$. Для функцій $f \in H(R_+)$ означено модифікований рівномірний двійковий інтеграл $J(f) \in L^\infty(R_+)$.

Введение. В работе [1] Бутцер и Вагнер для функций $f \in L(G)$ ввели понятие сильной двоичной производной $D(f) \in L(G)$, где G — двоичная группа, изоморфная модифицированному отрезку $[0, 1]^*$. Они доказали, что функции ортонормированной на G системы Уолша – Пэли $\{w_n\}_{n=0}^\infty$ удовлетворяют условиям $D(w_n) = n w_n (n \in Z_+)$, т. е. являются собственными функциями оператора D. В этой же работе для функций $f \in L(G)$ введен сильный двоичный интеграл $I(f) \in L(G)$. Доказано, что $D(I(f)) = I(D(f)) = f$, если $\hat{f}(0) \equiv \equiv \int_G f(x)\,dx = 0$. Таким образом, установлена основная теорема интегрального исчисления для двоичного анализа. Кроме того, доказано, что следующие условия равносильны: а) существует $D(f) = g$; б) существует такая функция $g \in L(G)$, что $\hat{g}(n) = n\hat{f}(n)$, $n \in Z_+$, где $\hat{f}(n) = \int_G f(x) w_n(x)\,dx$ — коэффициенты Фурье – Уолша функции f; в) существует такая функция $g \in L(G)$, что $f = I(g) + \hat{f}(0)$.

В работе [2] этих же авторов введено понятие сильной двоичной производной $\overline{D}$ для функций $f \in L(R_+)$ и доказано равенство $(\overline{D}(f))^{\tilde{}}(x) = x\tilde{f}(x)$, где $\tilde{f}$ — преобразование Фурье – Уолша функции f. Пал [3] доказал, что если $f \in L(R_+)$ и $xf(x) \in L(R_+)$, то $\overline{D}(\tilde{f})$ существует и совпадает с $(xf(x))^{\tilde{}}$. В работе [4] при некотором дополнительном условии на функцию $f \in L(R_+)$ ($\tilde{f}(x) = 0$ для $0 \le x < a$ при некотором $a > 0$) определен сильный двоичный интеграл $\overline{I}(f)$ и доказаны равенства $\overline{D}(\overline{I}(f)) = f$ и $\overline{I}(\overline{D}(f)) = f$. В книге [5] (гл. 9) снято указанное ограничение на функцию $f \in L(R_+)$ при определении сильного двоичного интеграла $\overline{I}(f)$ и доказан следующий критерий: пара

* Выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00355).

Результаты, изложенные в данной статье, докладывались на Украинском математическом конгрессе (Киев, 23 – 26 августа 2001г.).

функций $f, g \in L(R_+)$ связана равенством $g = \tilde{I}(f)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия $\tilde{g}(0) = 0$ и $\tilde{g}(x) = \tilde{f}(x)/x$, $x > 0$.

Онневир [6] ввел понятие сильной двоичной производной $D^{(1)}(f)$ для функций $f \in L(G)$ и доказал равенства $D^{(1)}(w_k) = 2^n w_k$, где $2^n \le k < 2^{n+1}$, $n \in Z_+$. В работах [6, 7] введены также две сильные двоичные производные $D^{(1)}(f)$ и $D^{[1]}(f)$ для функций $f \in L(K)$, где двоичная группа K изоморфна модифицированной положительной полуоси R_+^*. В [7] установлено, что производные $D^{(1)}$ и $D^{[1]}$ дифференцируют один и тот же набор функций $f \in L(K)$, не совпадающий с $L(K)$.

В данной работе вводятся модифицированный сильный двоичный интеграл $J(f)$ и модифицированная сильная двоичная производная $D(f)$ для функций $f \in L(R_+)$. Отметим, что рассматриваемая производная $D(f)$ для функций $f \in L(R_+)$ фактически эквивалентна производным $D^{(1)}(f)$ и $D^{[1]}(f)$ Онневира [7], который рассматривал функции $f \in L(K)$. Устанавливается аналог упомянутого выше критерия Пала: пара функций f, $g \in L(R_+)$ связана равенством $g = J(f)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{g}(0) = 0$ и $\tilde{g}(x) = h(x)\tilde{f}(x)$, где $h(x) = 2^{-n}$, $2^n \le x < 2^{n+1}$, $n \in Z$, а $\tilde{f}$ — преобразование Фурье – Уолша функции f. При условии $\tilde{f}(0) = 0$ доказаны равенства $D(J(f)) = f$ и $J(D(f)) = f$. Кроме того, найдено счетное множество собственных функций операторов D и J и показано, что линейная оболочка L, натянутая на это множество, плотна в двоичном пространстве Харди $H(R_+)$. Доказано, что линейный оператор $\tilde{J} : L \to L(R_+)$, где $\tilde{J}(f) = (J(f))^{\sim}$, ограничен и, следовательно, допускает продолжение по непрерывности на $H(R_+)$. Наконец, доказано, что на двоичном пространстве Харди $H(R_+)$ можно определить модифицированный сильный двоичный интеграл $J(f)$ как равномерный предел на R_+ некоторой последовательности двоичных сверток $f * W_n$, где ядра $W_n \in L(R_+)$, $n \in Z_+$.

1. Основные определения и известные результаты. Как обычно, символом R_+ обозначим положительную полуось $[0, +\infty)$. Через $L^p(R_+)$, $1 \le p \le \infty$, обозначим пространство измеримых на R_+ по мере Лебега функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{L^p(R_+)} = \left(\int\limits_{R_+} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

или

$$\|f\|_{L^\infty(R_+)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in R_+} |f(x)|.$$

При этом вместо $L^1(R_+)$ будем писать $L(R_+)$. Символ Z обозначает множество всех целых чисел, а символ Z_+ — множество всех целых неотрицательных чисел.

Напомним определение преобразования Фурье – Уолша, которое впервые появилось в работе Файна [8] (см. также [5], гл. 9, и [9], гл. 6). Для числа $x \in R_+$ и натурального n положим

$$x_n \equiv [2^n x] \pmod 2, \qquad x_{-n} \equiv [2^{1-n} x] \pmod 2, \tag{1}$$

где $[a]$ обозначает целую часть числа a, а числа x_n и x_{-n} по определению равны 0 или 1. Поскольку $x_{-n} = 0$ для $n \geq n(x)$, то для $(x, y) \in R_+ \times R_+$ определено целое неотрицательное число

$$t(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n y_{-n} + x_{-n} y_n).$$

Обобщенные функции Уолша определяются для $(x, y) \in R_+ \times R_+$ равенством

$$\psi_y(x) = (-1)^{t(x, y)}.$$

Нам понадобятся также следующие свойства обобщенных функций Уолша (см. [5], гл. 9):

$$\begin{gathered} \psi_y(x) = \psi_x(y), \quad \psi_y(x) = \pm 1 \quad \text{для} \quad (x, y) \in R_+ \times R_+, \\ \psi_y(x) = \psi_{[y]}(x)\psi_{[x]}(y), \quad \psi_0(x) \equiv 1, \quad x, y \in R_+. \end{gathered} \tag{2}$$

Преобразование Фурье – Уолша $F[f] \equiv \tilde{f}$ функции $f \in L(R_+)$ задается равенством

$$F[f](x) \equiv \tilde{f}(x) = \int_{R_+} \psi_x(y) f(y) dy$$

(см. [5], гл. 9, или [9], гл. 6). Если же функция $f \in L^2(R_+)$, то $F[f] \equiv \tilde{f}$ определяется как предел по норме пространства $L^2(R_+)$ последовательности функций $\int_{D_n} \psi_x(y) f(y) dy$, $n \in Z_+$.

Преобразование Фурье – Уолша имеет свойства, аналогичные свойствам обычного преобразования Фурье. Очевидно, для функции $f \in L(R_+)$ ее преобразование Фурье – Уолша ограничено и $\|\tilde{f}\|_{L^\infty(R_+)} \leq \|f\|_{L(R_+)}$. Поэтому из сходимости последовательности функций f_n к функции f в метрике $L(R_+)$ вытекает, что $\tilde{f}_n$ сходится к $\tilde{f}$ равномерно на R_+. Справедлив также аналог теоремы Планшереля.

Теорема А. *Если* $f \in L^2(R_+)$, *то* $\tilde{f} \in L^2(R_+)$, *причем*

$$\|\tilde{f}\|_{L^2(R_+)} = \|f\|_{L^2(R_+)}, \quad F[\tilde{f}] = f.$$

На R_+ введем операцию сложения $\oplus$, положив для $(x, y) \in R_+ \times R_+$: $x \oplus y = z$, где число z в двоичной системе счисления имеет двоичные разряды

$$z_n \equiv x_n + y_n \pmod 2, \quad n \in Z \backslash 0,$$

а x_n, y_n вычисляются по правилу (1). Отметим, что для $n \in N$ x_n является n-м двоичным разрядом дробной части числа $x \in R_+$, а x_{-n} — n-м двоичным разрядом целой части этого числа. При этом двоично-рациональным числам $x \in R_+$ сопоставляются конечные двоичные разложения, т. е. $x_n = 0$ для $n \geq n(x)$.

Обобщенные функции Уолша удовлетворяют равенству

$$\psi_t(x \oplus y) = \psi_t(x)\psi_t(y), \tag{3}$$

если $t, x, y \in R_+$, $x \oplus y$ двоично иррационально. Таким образом, при фиксированных t и x равенство (3) выполняется для всех $y \in R_+$, за исключением счетного множества.

Отметим, что обобщенные функции Уолша с целым неотрицательным нижним индексом выражаются через функции Уолша:

$$\psi_k(x) = w_k(x-[x]), \quad k \in Z_+, \quad x \in R_+. \tag{4}$$

Теорема об обращении преобразования Фурье – Уолша справедлива не только для класса $L^2(R_+)$. Чтобы сформулировать ее для класса $L(R_+)$, напомним определение W-непрерывности функции. Функцию $f\colon R_+ \to R$ назовем W-непрерывной в точке $x \in R_+$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(x \oplus y) - f(x)| < \varepsilon$ при $0 < y < \delta$.

Теорема B. *Пусть функция $f \in L(R_+)$ является W-непрерывной на R_+ и $\tilde{f} \in L(R_+)$. Тогда*

$$f(x) = \int\limits_{R_+} \psi_x(y)\tilde{f}(y)dy, \quad x \in R_+.$$

Все эти факты о преобразованиях Фурье – Уолша можно найти, например, в [5] (гл. 9) или [9] (гл. 6).

2. Модифицированный сильный двоичный интеграл. Напомним определение двоичной свертки $f * g$ двух функций $f, g \in L(R_+)$:

$$(f * g) = \int\limits_{R_+} f(y)g(x \oplus y)dy.$$

В работе [5, с. 435] введено понятие сильного двоичного интеграла в пространстве $L(R_+)$ следующим образом. Для $n \in Z_+$ положим

$$\overline{W}_n(x) = \lim_{k \to +\infty} \int\limits_{2^{-n}}^{2^k} \frac{1}{t}\psi_x(t)dt, \quad x \in R_+. \tag{5}$$

Как доказано в [5, с. 434], предел в (5) существует как почти всюду на R_+, так и в метрике пространства $L(R_+)$. Поэтому для любой функции $f \in L(R_+)$ и $n \in Z_+$ определена двоичная свертка

$$(f * \overline{W}_n)(x) = \int\limits_{R_+} f(t)\overline{W}_n(x \oplus t)dt. \tag{6}$$

Из (6) следует $f * \overline{W}_n \in L(R_+)$.

Определение 1. *Если для некоторой функции $f \in L(R_+)$ существует такая функция $g \in L(R_+)$, что $\lim\limits_{n \to +\infty} \| f * \overline{W}_n - g \|_{L(R_+)} = 0$, то функция $g \equiv \equiv I(f)$ называется сильным двоичным интегралом функции f.*

Известна следующая теорема [5, с. 435].

Теорема C. *Пусть $f, g \in L(R_+)$. Тогда $g = I(f)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{g}(0) = 0$ и $\tilde{g}(x) = \tilde{f}(x)/x$ для $x > 0$.*

Сильный двоичный интеграл существует не для всех функций $f \in L(R_+)$. Например, он не существует для функции $X_{[0,1)}$, где через $X_E(x)$ обозначена характеристическая функция множества $E \in R_+$, т. е. $X_E(x) = 1$ для $x \in E$ и $X_E(x) = 0$ для $x \in R_+ \setminus E$.

Обозначим через $L_d(R_+)$ множество всех функций $f \in L(R_+)$, для которых существуют сильные двоичные интегралы. Очевидно, $L_d(R_+)$ является линейным подпространством в $L(R_+)$. Как доказано в [5] (гл. 9), функции

$$a_{m,n}(x) = 2^{-n}\psi_{m2^{-n}}(x)X_{[0,2^n)}(x), \quad m \in N, \quad n \in Z_+, \tag{7}$$

принадлежат $L_d(R_+)$, а их линейная оболочка L плотна в $L_d(R_+)$.

В дальнейшем нам понадобятся две леммы.

Лемма 1. *Справедливы равенства* $\tilde{a}_{m,n}(x) = X_{[m2^{-n}, (m+1)2^{-n})}(x)$, $m \in N$, $n \in Z_+$, $x \in R_+$ (см. [10], лемма 1).

Лемма 2. *Если* $m \in N$, $n \in Z_+$, *то существует единственное целое число* r, *при котором справедливо вложение* $[m2^{-n}, (m+1)2^{-n}) \subset [2^r, 2^{r+1})$ (см. [11], лемма 3).

Последовательность ядер (5), с помощью которой определяется сильный двоичный интеграл, хотя и задается явным образом, но свойства функций W_n (например, их поведение в окрестности нуля) исследовать достаточно сложно. По этой причине, как нам кажется, заслуживает внимания определение модифицированного сильного двоичного интеграла с помощью следующей более простой последовательности ядер:

$$W_n(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 2^n; \\ k-1, & 2^{n-k-1} \leq x < 2^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, \end{cases} \tag{8}$$

где $n \in Z_+$. Можно доказать, что и преобразование Фурье – Уолша ядер (8) выражается достаточно просто, а именно, имеет вид

$$\tilde{W}_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 2^{-n}; \\ 2^{-k}, & 2^k \leq x < 2^{k+1}, \quad k = -n, -n+1, \ldots \end{cases} \tag{9}$$

Заметим, что функции (8) и (9) W-непрерывны на R_+, причем

$$W_n \in L(R_+), \qquad \int_{R_+} W_n(x)\,dx = 0, \qquad n \in Z_+.$$

Определение 2. *Если для некоторой функции* $f \in L(R_+)$ *существует такая функция* $g \in L(R_+)$, *что* $\lim_{n \to +\infty} \|f * W_n - g\|_{L(R_+)} = 0$, *то функцию* $g \equiv J(f)$ *назовем модифицированным сильным двоичным интегралом (МСДИ) функции* f.

Следующая теорема является аналогом теоремы С.

Теорема 1. *Пусть* $f, g \in L(R_+)$. *Равенство* $g = J(f)$ *имеет место тогда и только тогда, когда*

$$\tilde{g}(0) = 0 \quad и \quad \tilde{g}(x) = \tilde{f}(x)h(x) \qquad для \quad x > 0,$$

где

$$h(x) = 2^{-n}, \qquad 2^n \leq x < 2^{n+1}, \quad n \in Z. \tag{10}$$

Не все функции $f \in L(R_+)$ имеют МСДИ. Например, покажем, что он не существует для функции $\varphi = X_{[0,1)}$. Для этой функции $\tilde{\varphi} = \varphi$ [5, с. 421]. Принимая во внимание равенства (2) и теорему А, для $x \in [0, 1)$ получаем

$$(\varphi * W_n)(x) = \int_{R_+} \tilde{\varphi}(y)\tilde{W}_n(y)\psi_x(y)\,dy = \int_0^1 \tilde{W}_n(y)\,dy. \tag{11}$$

Поэтому из (9) и (11) для $x \in [0, 1)$ имеем

$$(\varphi * W_n)(x) = \sum_{k=-n}^{-1} \int_{2^k}^{2^{k+1}} \tilde{W}_n(y)\,dy = \sum_{k=-n}^{-1} 2^{-k} 2^k = n.$$

Следовательно, $(\varphi * W_n)(x) \to +\infty$ при $n \to +\infty$ для $x \in [0, 1)$. Поэтому последовательность $(\varphi * W_n)(x)$ не может иметь предел в метрике $L(R_+)$, т. е. функция $\varphi = X_{[0,1)}$ не имеет МСДИ.

Однако, как вытекает из следующей теоремы, функций, имеющих МСДИ, достаточно много.

Теорема 2. *Каждая из функций $a_{m,n}$, определяемых равенствами* (7), *имеет МСДИ и является собственной функцией оператора J с собственным значением 2^{-r}, где целое число $r = r(m, n)$ однозначно определяется вложением $[m2^{-n}, (m+1)2^{-n}) \subset [2^r, 2^{r+1})$.*

Из этой теоремы вытекает следующее утверждение.

***Следствие* 1.** *Справедливы равенства $J(a_{1,n}) = 2^n a_{1,n}$, $n \in Z_+$.*

Обозначим через $L_J(R_+)$ множество всех функций $f \in L(R_+)$, для которых существует МСДИ $J(f)$. Из следствия 1 получаем такое утверждение.

***Следствие* 2.** *Линейный оператор $J: L_J(R_+) \to L(R_+)$ неограничен.*

Из теоремы 2 вытекает также следующее следствие.

***Следствие* 3.** *Справедливы равенства*

$$J(a_{m,0}) = 2^{-r} a_{m,0}, \quad 2^r \le m < 2^{r+1}, \quad r = 0, 1, \ldots . \tag{12}$$

Учитывая равенства (4) и (7), для $m \in Z_+$ имеем

$$a_{m,0}(x) = \begin{cases} w_m(x), & 0 \le x < 1; \\ 0, & x \ge 1, \end{cases}$$

где $w_m(x)$ — функция Уолша в нумерации Пэли. Таким образом, равенства (12) можно записать в виде

$$J(w_m) = 2^{-r} w_m, \quad 2^r \le m < 2^{r+1}, \quad r = 0, 1, \ldots, \tag{13}$$

если считать, что $w_m(x) = 0$, $x \ge 1$.

Отметим, что ядра (8) принадлежат пространству $L(R_+)$. Поэтому свертка $(f * W_n)(x)$ для функций $f \in L^\infty(R_+)$ имеет смысл в каждой точке $x \in R_+$. Этот факт позволяет ввести следующее определение.

Определение 3. *Если $f \in L^\infty(R_+)$ и в точке $x \in R_+$ существует конечный предел*

$$J(f)(x) = \lim_{n \to +\infty} (f * W_n)(x), \tag{14}$$

то этот предел назовем модифицированным двоичным интегралом (*МДИ*) *функции f в точке x.*

Символом $L_C^\infty(R_+)$ обозначим подпространство всех функций $f \in L^\infty(R_+)$, которые W-непрерывны на R_+. Очеведно, для $f \in L_C^\infty(R_+)$ имеем

$$\| f \|_{L^\infty(R_+)} = \sup_{x \in R_+} | f(x) |.$$

Известно (см. [5], гл. 9), что $\psi_y \in L_C^\infty(R_+)$ для любого $y \ge 0$.

Определение 4. *Если для функции $f \in L_C^\infty(R_+)$ предел* (14) *существует в метрике $L^\infty(R_+)$, то функцию $J(f)$ назовем модифицированным сильным двоичным интегралом* (*МСДИ*) *функции f в пространстве $L_C^\infty(R_+)$.*

Теорема 3. *Обобщенные функции Уолша $\psi_y(x)$ при любом $y \in R_+$ имеют МДИ в каждой точке $x \in R_+$, причем $J(\psi_0)(x) \equiv 0$ на R_+, а для $y > 0$ справедливо равенство $J(\psi_y)(x) = h(y)\psi_y(x)$, $x \in R_+$, где функция h определяется равенством* (10). *Кроме того, при любом $y \in R_+$ существует*

МСДИ $J(\psi_y)$ *в пространстве* $L_C^\infty(R_+)$, *причем* $J(\psi_0) = 0$ *и* $J(\psi_y) = h(y)\psi_y$ *для* $y > 0$.

Следствие 4. *Обобщенные функции Уолша* ψ_y *являются собственными функциями оператора* $J: L_C^\infty(R_+) \to L_C^\infty(R_+)$ *с собственными числами* $h(y)$ *при* $y > 0$ *и* 0 *при* $y = 0$.

Из этого следствия и (10) вытекает следующее утверждение.

Следствие 5. *Оператор* $J: L_C^\infty(R_+) \to L_C^\infty(R_+)$ *неограничен.*

3. Модифицированная сильная двоичная производная. В этом пункте введем понятие модифицированной сильной двоичной производной (МСДП) $D(f)$ для функции $f \in L(R_+)$ и установим равенства $D(J(f)) = f$ и $J(D(f)) = f$ при условии $\int_{R_+} f(x)dx = 0$. Таким образом, операторы D и J являются взаимно обратными.

Зададим последовательность ядер

$$\Lambda_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{\psi_{2^{-k}}(x)}{2^{2k}} X_{[0,2^k)}(x), \quad n \in Z_+. \tag{15}$$

Определение 5. *Если для функции* $f \in L(R_+)$ *существует такая функция* $\varphi \in L(R_+)$, *что*

$$\lim_{n \to +\infty} \| f * \Lambda_n - \varphi \|_{L(R_+)} = 0,$$

то функцию $\varphi \equiv D(f)$ *назовем МСДП функции* f.

Теорема 4. *Если функция* $f \in L(R_+)$ *имеет МСДП* φ, *то*

$$\tilde{\varphi}(0) = 0, \qquad \tilde{\varphi}(x) = \frac{\tilde{f}(x)}{h(x)}, \quad x > 0,$$

где функция h *определяется равенством* (10).

Следствие 6. *Если функция* $f \in L(R_+)$ *имеет МСДП* $D(f)$ *и выполняется равенство* $\tilde{f}(0) = 0$, *то для* $D(f)$ *существует МСДИ, причем* $J(D(f)) = f$.

Действительно, в предположениях следствия на основании теоремы 4 справедливы равенства $\tilde{f}(0) = 0$, $\tilde{f}(x) = D(f)\tilde{\ }(x)h(x)$, $x > 0$. Но тогда согласно теореме 1 заключаем, что $f = J(D(f))$.

Утверждение следствия 6 допускает обращение.

Теорема 5. *Если для функции* $f \in L(R_+)$ *существует МСДИ* $J(f)$ *и выполняется равенство* $\tilde{f}(0) = 0$, *то* $J(f)$ *имеет МСДП, причем* $D(J(f)) = f$.

Обозначим через L_D множество всех функций $f \in L(R_+)$, для каждой из которых существует МСДП $D(f)$. Очевидно, L_D является линейным подпространством в $L(R_+)$. Согласно теореме 2 для каждой из функций (7) существует МСДИ, а согласно лемме 1 $\tilde{a}_{m,n}(0) = 0$. Поэтому из теорем 2 и 5 вытекает такое утверждение.

Следствие 7. *Каждая из функций* (7) *является собственной функцией оператора* $D: L_D \to L_C^\infty(R_+)$, *причем* $D(a_{m,n}) = 2^r a_{m,n}$, *где целое число* r *однозначно определяется вложением* $[m2^{-n}, (m+1)2^{-n}) \subset [2^r, 2^{r+1})$.

Из этого следствия на основании равенства (13) вытекает следующее утверждение.

Следствие 8. *Справедливы равенства*

$$D(w_m) = 2^r w_m, \quad 2^r \le m < 2^{r+1}, \quad r = 0, 1, \ldots,$$

если считать, что $w_m(x) = 0, \ x \ge 1$.

Из следствия 8 вытекает такое утверждение.

Следствие 9. *Линейный оператор* $D : L_D \to L(R_+)$ *неограничен.*

Отметим, что ядра (15) принадлежат пространству $L(R_+)$. Поэтому свертка $(f * \Lambda_n)(x)$ для функций $f \in L^\infty(R_+)$ имеет смысл в каждой точке $x \in R_+$. Этот факт позволяет ввести следующее определение.

Определение 6. *Если* $f \in L^\infty(R_+)$ *и в точке* $x \in R_+$ *существует конечный предел*

$$D(f)(x) = \lim_{n \to +\infty} (f * \Lambda_n)(x), \tag{16}$$

то этот предел назовем модифицированной двоичной производной (МДП) функции f *в точке* x.

Определение 7. *Если для функции* $f \in L_C^\infty(R_+)$ *предел* (16) *существует в метрике* $L^\infty(R_+)$, *то функцию* $D(f)$ *назовем модифицированной сильной двоичной производной (МСДП) функции* f *в пространстве* $L_C^\infty(R_+)$.

Теорема 6. *Обобщенные функции Уолша* $\psi_y(x)$ *при любом* $y \in R_+$ *имеют МДП в каждой точке* $x \in R_+$, *причем* $D(\psi_0)(x) \equiv 0$ *на* R_+, *а для* $y > 0$ *справедливо равенство* $D(\psi_y)(x) = \psi_y(x)/h(y)$, $x \in R_+$, *где функция* h *определяется равенством* (10). *Кроме того, при любом* $y \in R_+$ *существует МСДП* $D(\psi_y)$ *в пространстве* $L_C^\infty(R_+)$, *причем* $D(\psi_0) = 0$ *и* $D(\psi_y) = \psi_y/h(y)$ *для* $y > 0$.

Отметим, что эквивалентные версии теорем 4 и 6 для производной $D^{(1)}$ в случае, когда $y \in K$ и функции ψ_y заданы на двоичной группе K, установлены Онневиром [7].

Из теоремы 6 вытекает такое следствие.

Следствие 10. *Обобщенные функции Уолша* ψ_y *являются собственными функциями оператора* $D: \ L_C^\infty(R_+) \to L_C^\infty(R_+)$ *с собственными числами* $(h(y))^{-1}$ *при* $y > 0$ *и* 0 *при* $y = 0$.

Из этого следствия и (10) вытекает следующее утверждение.

Следствие 11. *Линейный оператор* $D: \ L_C^\infty(R_+) \to L_C^\infty(R_+)$ *неограничен.*

4. Модифицированный сильный двоичный интеграл в пространстве $H(R_+)$. В этом пункте мы определим модифицированный равномерный двоичный интеграл для функций из двоичного пространства Харди $H(R_+)$. Полуинтервал вида $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$ при $k \in Z_+$, $n \in Z$ назовем двоичным отрезком, а множество всех таких отрезков обозначим через Δ. Для функции $f \in L(R_+)$ определим двоичную максимальную функцию на R_+:

$$M(f)(x) = \sup_{x \in I, I \subset \Delta} \left| \frac{1}{|I|} \int_I f(t)dt \right|, \quad x \in Z_+.$$

Определение 8. *Двоичным пространством Харди* $H(R_+)$ *назовем множество всех таких функций* $f \in L(R_+)$, *для которых* $M(f) \in L(R_+)$, *причем* $\|f\|_{H(R_+)} = \|M(f)\|_{L(R_+)}$.

Поскольку $M(f)(x) \ge |f(x)|$ почти всюду на R_+, то $\|f\|_{L(R_+)} \le \|f\|_{H(R_+)}$. Пользуясь полнотой пространства $L(R_+)$, легко установить, что пространство $H(R_+)$ также полно.

В работе [10] доказана следующая теорема.

Теорема D. *Если* $f \in L(R_+)$, *то*

$$\int_{R_+} \frac{|\tilde{f}(x)|}{x} dx \le 50\sqrt{2}\,\|f\|_{H(R_+)}.$$

Эта теорема является двоичным аналогом следующей теоремы Хилле и Тамаркина [12].

Теорема E. *Если функция* $f(z)$ *принадлежит пространству Харди* $H(R_+^2)$ *в верхней полуплоскости* $R_+^2 = \{z \in C : \operatorname{Im} z > 0\}$, *а* $\hat{f}(x)$ *— преобразование Фурье ее граничной функции* $f(x)$ *на действительной оси, то*

$$\int_{R_+} \frac{|\hat{f}(x)|}{x} dx \le \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx.$$

Теорема E, в свою очередь, является аналогом следующей теоремы Харди (см. [13] или [14], гл. 7).

Теорема F. *Если функция* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *принадлежит пространству Харди* H *в единичном круге* $|z| < 1$ *комплексной плоскости* $\mathbf{C}$, *а* $f(e^{it})$ *— ее граничная функция на окружности* $|z| = 1$, *то*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n+1} \le \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})| dt.$$

Пусть $D_n = [0, 2^n)$, $n \in Z_+$. Для функции $f \in L(D_n)$ введем двоичную максимальную функцию с помощью равенства

$$M_n(f)(x) = \sup_{x \in I,\, I \subset D_n} \left| \frac{1}{|I|} \int_I f(t) dt \right|, \quad x \in D_n.$$

Определение 9. *Двоичным пространством Харди* $H(D_n)$ *назовем множество всех таких функций* $f \in L(D_n)$, *для которых* $M_n(f) \in L(D_n)$, *причем* $\|f\|_{H(D_n)} = \|M_n(f)\|_{L(D_n)}$.

Отметим, что двоичное пространство Харди $H(D_0)$ рассматривалось, например, в [5] (гл. 3), где отмечалось, что это пространство полно.

На основании теоремы D легко доказывается следующая лемма.

Лемма 3. *Если* $f \in H(R_+)$, *то на* R_+ *существует равномерный предел*

$$J(f)(x) \equiv \lim_{n \to +\infty} (f * W_n)(x), \quad x \in R_+, \tag{17}$$

где функция $(f * W_n)(x)$ *определяется равенством*

$$(f * W_n)(x) = \int_{R_+} (f * W_n)\tilde{}(t) \psi_x(t) dt = \int_{2^{-n}}^{+\infty} \tilde{f}(t) h(t) \psi_x(t) dt.$$

При этом линейный оператор $J : H(R_+) \to L^\infty(R_+)$ *ограничен, точнее*

$$\|J(f)\|_{L^\infty(R_+)} \le 100\sqrt{2}\,\|f\|_{H(R_+)}.$$

На основании леммы 3 можно ввести следующее определение.

Определение 10. *Если $f \in H(R_+)$, то функция $J(f)(x)$, $x \in R_+$, определяемая равенством* (17), *называется модифицированным равномерным двоичным интегралом (МРДИ) функции f.*

Поскольку предел в равенстве (17) является равномерным на R_+, а функции $f * W_n$ являются W-непрерывными, то МРДИ $J(f)(x)$ также W-непрерывен на R_+, если $f \in H(R_+)$.

Отметим, что определение 10 не противоречит определению 2, так как если последовательность функций имеет предел в пространстве $L(R_+)$ и равномерный предел на R_+, то эти пределы совпадают почти всюду на R_+.

Лемма 4. *Каждая из функций* (7) *принадлежит пространству $H(R_+)$, причем*

$$\|a_{m,n}\|_{H(R_+)} = \|a_{m,n}\|_{L(R_+)} = 1, \quad m \in N, \quad n \in Z_+.$$

Выше через L обозначена линейная оболочка, натянутая на совокупность функций вида (7). Будем рассматривать L как линейное подпространство в $H(R_+)$. Это возможно на основании леммы 4. Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 5. *Оператор $\tilde{J} : L \to L(R_+)$ ограничен, причем*

$$\|\tilde{J}(f)\|_{L(R_+)} \le 100\sqrt{2}\,\|f\|_{H(R_+)}, \quad f \in L, \tag{18}$$

где $\tilde{J}(f) \equiv J(f)^{\tilde{}}$, $f \in L$.

Действительно, согласно теореме 1 $\tilde{J}(f)(x) = \tilde{f}(x)h(x)$ для $x > 0$. Поэтому неравенство (18) легко вытекает из теоремы D и неравенства $h(x) \le 2/x$, $x > 0$.

Отметим, что в лемме 5 $J(f)$ можно понимать как МСДИ и как МРДИ.

Для функции $f \in H(R_+)$ введем обозначение

$$f_n(x) = \left(f(x) - 2^{-n}\int_{D_n} f(t)\,dt\right)\mathrm{X}_{D_n}(x), \quad x \in R_+, \quad n \in Z_+.$$

Леммы 6 – 9 нужны для доказательства основной леммы 10.

Лемма 6. *Если $f \in H(R_+)$, то $f_n \in H(R_+)$ и $\|f_n\|_{H(R_+)} \le 2\|f\|_{H(R_+)}$.*

Лемма 7. *Если $f \in H(R_+)$, то*

$$\|f - f_n\|_{H(R_+)} \le 2^n \max_{i \ge n} \varepsilon_i + \int_{2^n}^{+\infty} M(f)(x)\,dx,$$

где

$$\varepsilon_i = 2^{-i}\int_{D_i} f(t)\,dt.$$

Лемма 8. *Если $f \in H(R_+)$, то $\|f - f_n\|_{H(R_+)} \to 0$ при $n \to +\infty$.*

Лемма 9. *Пусть функция $f \in H(D_n)$, $n \in Z_+$, удовлетворяет условию*

$$\int_{D_n} f(t)\,dt = 0$$

и с помощью равенства $f(x) = 0$ продолжена на $R_+ \setminus D_n = [2^n, +\infty)$. Тогда *продолженная функция принадлежит пространству* $H(R_+)$ *и справедливо равенство*

$$\|f\|_{H(R_+)} = \|f\|_{H(D_n)}.$$

Лемма 10. *Линейная оболочка* L, *натянутая на систему функций* (7), *плотна в пространстве* $H(R_+)$.

Из этой леммы и леммы 5 вытекает следующая теорема.

Теорема 7. *Ограниченный линейный оператор* $\tilde{J} : L \to L(R_+)$ *допускает продолжение по непрерывности на* $H(R_+)$, *и продолженный оператор* $\tilde{J} : H(R_+) \to L(R_+)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\|\tilde{J}(f)\|_{L(R_+)} \le 100\sqrt{2}\,\|f\|_{H(R_+)}, \quad f \in H(R_+).$$

Аналог этой теоремы для функций, заданных на $[0, 1)$, также справедлив и может быть сформулирован в таком виде.

Теорема G. *Пусть* $f \in H(D_0)$ *и* $F \equiv I(f)$ — *ее сильный двоичный интеграл в смысле Бутцера – Вагнера. Тогда для последовательности* $\hat{F}(n)$ *коэффициентов Фурье – Уолша функции* F *справедливо неравенство*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\hat{F}(n)\right| \le 25\sqrt{2}\,\|f\|_{H(D_0)}.$$

Впервые эта теорема была доказана в [15], а затем другое ее доказательство приведено в книге [5, с. 104]. При этом в [5, 15] вместо $\hat{F}(n)$ пишется $\tilde{f}(n)/n$ и таким образом утверждение теоремы формулируется в терминах коэффициентов Фурье – Уолша самой функции f, а не ее двоичного интеграла.

Замечание. Линейный оператор J, определяемый равенством (17), не является ограниченным оператором из $H(R_+)$ в $L(R_+)$.

1. *Butzer P. L., Wagner H. J.* Walsh series and the concept of a derivative // Appl. Anal. – 1973. – **3**, № 1. – P. 29 – 46.
2. *Butzer P. L., Wagner H. J.* A calculus for Walsh functions defined on R_+ // Proc. Symp. Naval Res. Lab., Washington, D. C., April 18 – 20, 1973. – P. 75 – 81.
3. *Pal J.* On the connection between the concept of a derivative defined on the dyadic field and the Walsh – Fourier transform // Ann. Sci. Univ. Budapest. Sect. Math. – 1975. – **18**. – P. 49 – 54.
4. *Pal J.* On a concept of a derivative among functions defined on the dyadic field // SIAM J. Math. Anal. – 1977. – **8**, № 3. – P. 375 – 391.
5. *Schipp F., Wade W. R., Simon P.* Walsh series. – Budapest: Akad. Kiado, 1990. – 560 p.
6. *Onneweer C. W.* Differentiation on p-adic or p-series field // Linear Spaces and Approximation: Int. Ser. Numer. Math. – 1978. – **40**. – P. 187 – 198.
7. *Onneweer C. W.* On the definition of dyadic differentiation // Appl. Anal. – 1979. – **9**. – P. 267 – 278.
8. *Fine N. J.* The generalized Walsh functions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1950. – **69**. – P. 66 – 77.
9. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. – М.: Наука, 1987. – 344 с.
10. *Голубов Б. И.* Об аналоге неравенства Харди для преобразования Фурье – Уолша // Изв. РАН. Сер. мат. – 2001. – **65**, № 3. – С. 3 – 14.
11. *Голубов Б. И.* Об ограниченности двоичных операторов Харди и Харди – Литтлвуда в двоичных пространствах H и BMO //Anal. math. – 2000. – **26**. – P. 287 – 298.
12. *Hille E., Tamarkin J. D.* On the absolute integrability of Fourier transforms // Fund. math. – 1935. – **25**. – P. 329 – 352.
13. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Some new properties of Fourier constants // Math. Ann. – 1926. – **97**. – P. 159 – 209.
14. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.
15. *Ladhawala N. R.* Absolute summability of Walsh – Fourier series // Pacif. J. Math. – 1976. – **65**. – P. 103 – 108.

Получено 11.10.2001