УДК 517.51

Р. А. Ласурия (Абхаз. ун-т, Сухум)

СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА СФЕРЕ, НА ОСНОВЕ Ф-СИЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Structural properties of functions defined on a sphere are established on the basis of the strong approximation of Fourier – Laplace series.

Встановлюються структурні властивості функцій, заданих на сфері, на основі сильної апроксимації рядів Фур'є – Лапласа.

1. В настоящее время существует достаточно много результатов, касающихся обратных теорем в терминах сильной суммируемости тригонометрических рядов Фурье (см., например, [1 – 6]).

В данной работе рассматриваются структурные свойства функции, заданной на единичной двумерной сфере S^2, в терминах Ф-сильной суммируемости рядов Фурье – Лапласа. При этом формулировки результатов, полученных в работе, в известной степени аналогичны соответствующим результатам из [5, 6].

Пусть функция $f(x) = f(\theta, \varphi)$ непрерывна на единичной сфере с нормой

$$\| f \|_{C(S^2)} = \max_{x \in S^2} | f(x) |.$$

Под модулем непрерывности функции $f(x) \in C(S^2)$ будем понимать величину, определяемую равенством [7]

$$\omega(f; \delta) = \sup_{0<\gamma\le\delta} \left\| f(x) - S_\gamma(f; x) \right\|_{C(S^2)}, \tag{1}$$

где

$$S_\gamma f(x) = \frac{1}{2\pi \sin\gamma} \int\limits_{(x,y)\le\cos\gamma} f(y)\, dt(y),$$

(x, y) — скалярное произведение векторов в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, dt — элемент площади поверхности $\{ y : y \in S^2 : (x, y) = \cos\gamma,\ 0 < \gamma < \pi \}$. Положим $\Delta_\gamma f(x) = f(x) - S_\gamma f(x)$. Модуль непрерывности k-го порядка, $k \in \mathbb{N}$, определяется равенством

$$\omega_k(f; \delta) = \sup_{0<\gamma\le\delta} \left\| \Delta_\gamma^k f(x) \right\|_{C(S^2)},$$

$$\omega_1(f; \delta) = \omega(f; \delta),$$

где

$$\Delta_\gamma^k f(x) = \Delta_\gamma\left(\Delta_\gamma^{k-1} f(x)\right), \qquad \Delta_\gamma^0 f(x) \equiv f(x).$$

Пусть, далее,

$$T_n(x) = T_n(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{n} Y_k(\theta, \varphi)$$

— полином сферической гармоники, где $Y_k(\cdot)$ — сферическая гармоника порядка k, так что

$$D Y_k(\theta, \varphi) = -k(k+1) Y_k(\theta, \varphi),$$

$$D = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right\} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

— оператор Лапласа на сфере,

$$E_n(f) = E_n(f)_{C(S^2)} = \inf_{T_{n-1}}\|f - T_{n-1}\|_{C(S^2)} = \left\|f - T^*_{n-1}(f)\right\|_{C(S^2)}$$

— величина наилучшего приближения функции f сферическими суммами порядка не выше $n-1$. Положим

$$\rho_k^{(1/2)}(f;x) = f(x) - \sigma_{k-1}^{(1/2)}(f;x),$$

$$\sigma_n^{(1/2)}(f;x) = \frac{1}{A_n^{1/2}}\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{-1/2}\, S_\nu^{(1/2)}(f;x),$$

где $\sigma_n^{(1/2)}(f;x)$ — средние Чезаро $(C, 1/2)$ ряда Фурье – Лапласа (см., например, [7]),

$$f(x) = f(\theta,\varphi) \sim \frac{1}{4\pi}\sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta',\varphi')P_j(\cos\gamma)\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi', \qquad (2)$$

$P_j(t)$ — многочлены Лежандра, $S_\nu^{(1/2)}(f;x)$ — частичные суммы ряда (2), $\nu = 0, 1, 2, \ldots$.

2. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть функция* $\Phi(\cdot)$ *непрерывная строго возрастающая выпуклая вниз на* $[0, +\infty)$ *и равная нулю в нуле, а функция* $\Psi(\cdot)$ — *обратная к ней. Если для* $f(x) = f(\theta,\varphi)$, *заданной на сфере* S^2, *существует последовательность* $(T_n(x))$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *сферических сумм таких, что*

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\Phi\big(|T_k(x) - f(x)|\big)\right\|_{C(S^2)} = M < +\infty, \qquad (3)$$

то для модуля непрерывности выполняется неравенство

$$\omega(f;h) \le K h^2 \int_h^1 \frac{\Psi(u)}{u^3}\,du, \qquad (4)$$

где K — *положительная величина, не зависящая от* $h > 0$.

Доказательство. Применяя неравенство Иенсена [8, с. 92], с учетом (3) находим

$$M \ge \left\|\sum_{k=n}^{2n-1}\Phi\big(|T_k(x) - f(x)|\big)\right\|_{C(S^2)} \ge n\left\|\Phi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}|T_k(x) - f(x)|\right)\right\|_{C(S^2)} =$$

$$= n\Phi\left(\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}|T_k(x) - f(x)|\right\|_{C(S^2)}\right) \ge n\Phi\left(\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}T_k(x) - f(x)\right\|_{C(S^2)}\right) \ge$$

$$\ge n\,\Phi\big(E_{2n}(f)\big), \qquad n \in \mathbb{N}. \qquad (5)$$

Из условий теоремы следует, что функция $\Psi(\cdot)$ также непрерывна, строго возрастает, равна нулю в нуле и выпукла вверх на $[0, +\infty)$. Тогда, как известно, $\Psi(\cdot)$ является модулем непрерывности, для которого справедливо свойство полуаддитивности:

$$\Psi(t_1 + t_2) \le \Psi(t_1) + \Psi(t_2) \quad \forall t_1, t_2 > 0. \qquad (6)$$

Согласно (6) из (5) получаем

$$E_{2n}(f) \le \Psi\left(\frac{M}{n}\right) \le \Psi\left(\frac{[M]+1}{n}\right) \le ([M]+1)\Psi\left(\frac{1}{n}\right) = K\Psi\left(\frac{1}{n}\right). \tag{7}$$

Подбирая $k \in \mathbb{N}$ так, чтобы $2^k \le n < 2^{k+1}$, на основании (7) имеем

$$E_n(f) \le E_{2^k}(f) \le K\Psi\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right) \le K_1\Psi\left(\frac{1}{n}\right). \tag{8}$$

Ар. С. Джафаровым [9] установлено неравенство

$$\omega(f; 1/n) \le K n^{-2} \sum_{k=1}^{n} k E_k(f). \tag{9}$$

Сопоставляя (8) и (9), находим

$$\omega(f; 1/n) \le \frac{K}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \Psi\left(\frac{1}{k}\right) \le \frac{K_1}{n^2} \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} (x+1)\Psi\left(\frac{1}{x}\right) dx \le$$

$$\le \frac{K_1}{n^2} \int_{1}^{n} (x+1)\Psi\left(\frac{1}{x}\right) dx \le \frac{K_2}{n} \int_{1/n}^{1} \frac{\Psi(u)}{u^3} du. \tag{10}$$

Пусть $0 < h \le 1$. Тогда, выбирая n так, чтобы $\frac{1}{n+1} \le h < \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, из (10) получаем (4):

$$\omega(f; h) \le \omega(f; 1/n) \le K_3 h^2 \int_{h}^{1} \frac{\Psi(u)}{u^3} du.$$

Теорема 1 доказана.

***Следствие* 1.** *Пусть* $\Phi(u) = u^p$, $p \ge 1$. *Если для* $f(\cdot)$, *заданной на* S^2, *существует последовательность* $(T_n(x))$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *сферических сумм таких, что*

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} |T_k(x) - f(x)|^p \right\|_{C(S^2)} = M < +\infty,$$

то

$$\omega(f; h) \le K h^{1/p}, \quad 0 < h \le 1, \quad K \equiv \mathrm{cont} > 0.$$

Теорема 2. *Пусть функция* $\Phi(\cdot)$ *непрерывная строго возрастающая выпуклая вверх на* $[0, +\infty)$ *и равная нулю в нуле, а* $\Psi(\cdot)$ — *обратная к ней функция, причем*

$$\Psi(t_1 + t_2) \le A[\Psi(t_1) + \Psi(t_2)] \quad \forall t_1, t_2 > 0. \tag{11}$$

Если для функции $f(x) = f(\theta, \varphi)$, *заданной на сфере* S^2,

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \Phi\left(\left|\rho_k^{(1/2)}(f; x)\right|\right) \right\|_{C(S^2)} = M < +\infty,$$

то для модуля непрерывности

$$\omega(f; h) \le K h^2 \int_{h}^{1/2} \frac{\Psi(u|\ln u|)}{u^3 |\ln u|} du, \quad 0 < h \le 1. \tag{12}$$

Доказательство. Отправляясь от аналога неравенства Лебега [7]

$$\left|\rho_k^{(1/2)}(f;x)\right| \le K \ln k E_k(f) \quad \forall x \in S^2, \quad K \ge 1,$$

и учитывая, что в случае выпуклости вверх функция $\dfrac{\Phi(u)}{u}$ убывает, находим

$$M \ge \left\| \sum_{k=n}^{2n-1} \Phi\left(\left|\rho_k^{(1/2)}(f;x)\right|\right) \right\|_{C(S^2)} = \left\| \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{\Phi\left(\left|\rho_k^{(1/2)}(f;x)\right|\right)}{\left|\rho_k^{(1/2)}(f;x)\right|} \left|\rho_k^{(1/2)}(f;x)\right| \right\|_{C(S^2)} \ge$$

$$\ge \left\| \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{\Phi(K \ln n E_n(f))}{K \ln n E_n(f)} \left|\rho_k^{(1/2)}(f;x)\right| \right\|_{C(S^2)} \ge$$

$$\ge \frac{n\,\Phi(\ln n E_n(f))}{K \ln n E_n(f)} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \sigma_k^{(1/2)}(f;x) - f(x) \right\|_{C(S^2)} \ge \frac{n\,\Phi(\ln n E_n(f))\; E_{2n}(f)}{K \ln n E_n(f)}.$$

Отсюда получаем

$$E_{2n}(f) \le \frac{K_1 \ln n E_n(f)}{n\,\Phi(\ln n E_n(f))}. \tag{13}$$

С помощью индукции покажем выполнимость неравенства

$$E_{2^k}(f) \le \left(\ln 2^k\right)^{-1} \Psi\left(\frac{C \ln 2^k}{2^k}\right), \quad C \equiv \mathrm{cont} > 0. \tag{14}$$

При $k = 1$

$$M \ge \left\| \Phi\left(\left|\rho_2^{(1/2)}(f;x)\right|\right) \right\|_{C(S^2)} \ge \Phi(E_2(f)) \ge \Phi(E_2(f) \ln 2),$$

т. е.

$$E_2(f) \le (\ln 2)^{-1} \Psi\left(C \frac{\ln 2}{2}\right),$$

где $C = \max\left\{\dfrac{2M}{\ln 2}, 2AK_1\right\}$, постоянная A удовлетворяет неравенству $\Psi(2u) \le$ $\le A\,\Psi(u)$.

Вследствие (13)

$$E_{2^{k+1}}(f) \le K_1 \frac{\ln 2^k E_{2^k}(f)}{2^k \Phi\left(\ln 2^k E_{2^k}(f)\right)} \le \frac{K_1 \Psi\left(C \dfrac{\ln 2^k}{2^k}\right)}{2^k \Phi\left(\Psi\left(2^{-k} C \ln 2^k\right)\right)} = \frac{K_1 \Psi\left(C \cdot 2^{-k} \ln 2^k\right)}{C \ln 2^k} \le$$

$$\le \frac{2A K_1 \Psi\left(C \cdot 2^{-k-1} \ln 2^{k+1}\right)}{C \ln 2^{k+1}} \le \frac{\Psi\left(C \cdot 2^{-k-1} \ln 2^{k+1}\right)}{\ln 2^{k+1}}.$$

Отсюда следует выполнение (14) при любом $k \in \mathbb{N}$.

Подберем $k \in \mathbb{N}$ так, чтобы $2^k \le n < 2^{k+1}$. Тогда из (14), (11) следует

$$E_n(f) \le E_{2^k}(f) \le \frac{\Psi\left(C \cdot 2^{-k} \ln 2^k\right)}{\ln 2^k} \le \frac{A_1}{\ln n} \Psi\left(\frac{2C \ln n}{n}\right) \le \frac{A_2 \Psi((\ln n)/n)}{\ln n}. \tag{15}$$

Согласно (9) и (15) имеем

$$\omega(f; 1/n) \le K n^{-2} \sum_{k=1}^{n} k E_k(f) \le K_1 n^{-2} \sum_{k=2}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{k \Psi((\ln k)/k)}{\ln k} dx \le$$

$$\le K_2 n^{-2} \sum_{k=2}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{x \Psi((\ln x)/x)}{\ln x} dx = K_2 n^{-2} \sum_{k=2}^{n-1} \int_{1/k+1}^{1/k} \frac{\Psi(u|\ln u|)}{u^3 |\ln u|} du =$$

$$= K_2 n^{-2} \int\limits_{1/n}^{1/2} \frac{\Psi(u|\ln u|)}{u^3 |\ln u|} du.$$

Подбирая $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\frac{1}{n+1} \le h < \frac{1}{n}$, $h > 0$, находим (12):

$$\omega(f; h) \le \omega(f; 1/n) \le K_3 h^2 \int\limits_{h}^{1/2} \frac{\Psi(u|\ln u|)}{u^3 |\ln u|} du.$$

Теорема 2 доказана.

Следствие 2. *Пусть* $\Phi(u) = u^p$, $p \in (0, 1/2]$. *Если для* $f(x)$, *заданной на сфере* S^2,

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \left|\rho_k^{(1/2)}(f; x)\right|^p \right\|_{C(S^2)} = M < +\infty,$$

то

$$\omega(f; h) \le \begin{cases} K h^2, & p \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ K h^2 \ln^2 \frac{1}{h}, & p = \frac{1}{2}, \ 0 < h \le \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Теорема 3. *Пусть функция* $\Phi(\cdot)$ *непрерывная строго возрастающая выпуклая вверх на* $[0, +\infty)$ *и равная нулю в нуле, а* $\Psi(\cdot)$ — *обратная к ней функция, причем*

$$\Psi(t_1 + t_2) \le A[\Psi(t_1) + \Psi(t_2)] \qquad \forall t_1, t_2 > 0.$$

Пусть, далее, при некотором $\delta \in (0, 1)$ *существует*

$$\int\limits_0^{\delta} \frac{\Psi(u|\ln u|)}{u^{2r-1} |\ln u|} du.$$

Если для $f(x) = f(\theta, \varphi)$, *заданной на* S^2,

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \Phi\left(\left|\rho_k^{(1/2)}(f; x)\right|\right) \right\|_{C(S^2)} = M < +\infty,$$

то

$$\omega_k\left(D^{r-1} f; h\right) \le K(r, k) \left\{ h^{2k} \int\limits_h^{1/2} \frac{\Psi(u|\ln u|)}{u^{2(k+r)-1} |\ln u|} du + \int\limits_0^h \frac{\Psi(u|\ln u|)}{u^{2r-1} |\ln u|} du \right\}, \quad 0 < h \le \frac{1}{2}, \tag{16}$$

где $D^{r-1} f$ — *результат применения* $r - 1$ $(r \ge 2)$ *раз оператора Лапласа* D,

$$E_n\left(D^{r-1} f\right) \le K(r) \left\{ \frac{n^{2(r-1)} \Psi((\ln n)/n)}{\ln n} + \int\limits_0^{1/(n+1)} \frac{\Psi(u|\ln u|)}{u^{2r-1} |\ln u|} du \right\}. \tag{17}$$

Доказательство. Ар. С. Джафаровым [9] установлено неравенство

$$\omega_k\left(D^r f; 1/n\right) \le K(r) \left\{ n^{-2k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{2(k+r)-1} E_\nu(f) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{2r-1} E_\nu(f) \right\} \tag{18}$$

при условии конечности правой части.

На основании (15) и (18) получаем

$$\omega_k\left(D^{r-1}f;\, 1/n\right) \le$$

$$\le K(r,k)\left\{\frac{1}{n^{2k}}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{2(k+r)-3}E_\nu(f) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{2(k-1)-1}E_\nu(f)\right\} \le$$

$$\le K_1(r,k)\left\{\frac{1}{n^{2k}}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{2(k+r)-3}\frac{\Psi((\ln\nu)/\nu)}{\ln(\nu e)} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{2r-3}\frac{\Psi((\ln\nu)/\nu)}{\ln\nu}\right\} \le$$

$$\le K_2(r,k)\left\{\frac{1}{n^{2k}}\sum_{\nu=2}^{n-1}\int_{\nu}^{\nu+1}\frac{\Psi((\ln x)/x)\,x^{2(k+r)-3}}{\ln x}dx + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\int_{\nu}^{\nu+1}\frac{x^{2r-3}\,\Psi((\ln x)/x)}{\ln x}dx\right\} =$$

$$= K_2(r,k)\left\{\frac{1}{n^{2k}}\sum_{\nu=2}^{n-1}\int_{1/\nu+1}^{1/\nu}\frac{\Psi(u|\ln u|)}{u^{2(k+r)-3}|\ln u|\,u^2}du + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\int_{1/\nu+1}^{1/\nu}\frac{\Psi(u|\ln u|)}{u^{2r-1}|\ln u|}du\right\} =$$

$$= K_2(r,k)\left\{\frac{1}{n^{2k}}\int_{1/n}^{1/2}\frac{\Psi(u|\ln u|)}{u^{2(k+r)-1}|\ln u|}du + \int_{0}^{1/(n+1)}\frac{\Psi(u|\ln u|)}{u^{2r-1}|\ln u|}du\right\}.$$

Подбирая n так, чтобы $\dfrac{1}{n+1} \le h < \dfrac{1}{n}$, находим

$$\omega_k\left(D^{r-1}f;\, h\right) \le \omega_k\left(D^{r-1}f;\, 1/n\right) \le$$

$$\le K(r,k)\left\{h^{2k}\int_{h}^{1/2}\frac{\Psi(u|\ln u|)}{u^{2(k+r)-1}|\ln u|}du + \int_{0}^{h}\frac{\Psi(u|\ln u|)}{u^{2r-1}|\ln u|}du\right\}, \quad 0 < h \le \frac{1}{2},$$

и неравенство (16) установлено.

Для установления неравенства (17) вновь воспользуемся результатом Ар. С. Джафарова [9]:

$$E_n\left(D^r f\right) \le K(r)\left\{h^{2r}E_n(f) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{2r-1}E_\nu(f)\right\}.$$

Отсюда с учетом (15) имеем

$$E_n\left(D^{r-1}f\right) \le K(r)\left\{h^{2(r-1)}E_n(f) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{2(r-1)-1}E_\nu(f)\right\} \le$$

$$\le K_1(r)\left\{\frac{n^{2(r-1)}\Psi((\ln n)/n)}{\ln n} + \int_{0}^{1/(n+1)}\frac{\Psi(u|\ln u|)}{u^{2r-1}|\ln u|}du\right\}.$$

1. *Freud G.* Über die Sättigungsklasse der starken Approximation durch Teilsummen der Fouriershen Reihe // Acta math. Acad. sci. hung. – 1969. – **20**. – P. 275 – 279.
2. *Leindler L.* Strong approximation of Fourier series and structural properties of functions // Ibid. – 1979. – **33**, № 1 – 2. – P. 105 – 125.
3. *Leindler L., Nikišin E.* Note on strong approximation by Fourier series // Ibid. – 1973. – **24**. – P. 223 – 227.
4. *Szabados J.* On a problem of Leindler concerning strong approximation by Fourier series // Anal. math. – 1976. – **2**. – P. 155 – 161.
5. *Totik V.* On the modules continuity connection with a problem of Szabados concerning strong approximation // Ibid. – 1978. – **4**. – P. 145 – 152.
6. *Totik V.* On structural properties of functions arising from strong approximation of Fourier series // Acta sci. math. – 1979. – **41**. – P. 227 – 251.
7. *Топурия С. Б.* Ряды Фурье – Лапласа на сфере. – Тбилиси: Тбилис. ун-т, 1987. – 356 с.
8. *Харди Г., Литтльвуд Д., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
9. *Джафаров Ар. С.* О порядке наилучших приближений непрерывных на единичной сфере функций посредством конечных сферических сумм // Исслед. по совр. пробл. констр. теории функций. – Баку: Изд-во АН АзССР, 1965. – С. 46 – 52.

Получено 17.09. 2003,
после доработки — 14.03. 2005