УДК 517.938

В. Л. Кулик (Ін-т математики НАН України, Київ; Сілез. техн. ун-т, Глівіце, Польща),
Н. В. Степаненко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ВЛАСТИВІСТЬ РЕГУЛЯРНОСТІ ДЕЯКИХ ЛІНІЙНИХ РОЗШИРЕНЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ТОРІ

We investigate the problem of existence of the Green – Samoilenko function for linear expansions of dynamical systems on a torus of the form

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad C(\varphi)\frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}\dot{C}(\varphi)x = A(\varphi)x,$$

where a matrix $C(\varphi) \in C'(T_m; a)$ is symmetric and nonsingular.

Досліджується питання існування функції Гріна – Самойленка для лінійних розширень динамічних систем на торі вигляду

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad C(\varphi)\frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}\dot{C}(\varphi)x = A(\varphi)x$$

з невиродженою симетричною матрицею $C(\varphi) \in C'(T_m; a)$.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \tag{1}$$

де вектор-функція $a(\varphi)$ і матрична функція $A(\varphi)$ неперервні за всією сукупністю змінних $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ і 2π-періодичні за кожною змінною φ_j, $j = \overline{1, m}$, тобто задані на m-вимірному торі T_m.

Нагадаємо деякі означення [1]. Система рівнянь (1) називається *регулярною*, якщо існує функція Гріна – Самойленка

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi)C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \le 0; \\ \Omega_\tau^0(\varphi)[\,C(\varphi_\tau(\varphi)) - I\,], & \tau > 0, \end{cases} \tag{2}$$

з експоненціальною оцінкою $\|G_0(\tau, \varphi)\| \le Ke^{-\gamma|\tau|}$, $K, \gamma = \text{const} > 0$. Система рівнянь вигляду (1) називається *слабкорегулярною*, якщо існує хоча б одна функція Гріна – Самойленка (2) з експоненціальною оцінкою.

Нехай система (1) є слабкорегулярною. Відомо [2], що до такої системи завжди можна дописати нові рівняння, а саме

$$\begin{gathered} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \\ \frac{dy}{dt} = x - A^*(\varphi)y, \qquad y \in R^n, \end{gathered} \tag{3}$$

і система (3) є регулярною, тобто має єдину функцію Гріна – Самойленка.

Якщо розглянути систему рівнянь

$$\begin{gathered} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + B_1(\varphi)y, \\ \frac{dy}{dt} = B_2(\varphi)x - A^*(\varphi)y \end{gathered} \tag{4}$$

і припустити, що обидві $(n \times n)$-вимірні симетричні матриці $B_i(\varphi) \in C^0(T_m)$, $i = 1, 2$, є одночасно додатно визначеними

$$\langle B_i(\varphi)x, x \rangle \geq \beta_i \|x\|^2 \qquad \forall x \in R^n, \qquad \beta_i = \text{const} > 0, \tag{5}$$

то без будь-яких умов на матрицю $A(\varphi) \in C^0(T_m)$ система (4) буде регулярною. В цьому легко переконатись, записуючи похідну квадратичної форми $\langle x, y \rangle$ в силу системи (4). Якщо ж умови (5) послабити, а саме припустити, що

$$\langle B_i(\varphi)x, x \rangle \geq 0, \tag{6}$$

то для регулярності системи (4), очевидно, на матрицю $A(\varphi)$ потрібно накласти додаткові умови.

Систему рівнянь (4) можна записати у вигляді

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi),$$

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \left[\begin{pmatrix} B_1(\varphi) & 0 \\ 0 & B_2(\varphi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -A^*(\varphi) \\ A(\varphi) & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Отже, систему рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad C\frac{dx}{dt} = [\, B(\varphi) + M(\varphi) \,]x, \tag{8}$$

де C — стала невироджена симетрична матриця, а матриці $B(\varphi), M(\varphi) \in C^0(T_m)$ задовольняють умови

$$B(\varphi) \equiv B^*(\varphi), \tag{9}$$

$$\langle B(\varphi)x, x \rangle \geq 0, \tag{10}$$

$$M^*(\varphi) \equiv -M(\varphi), \tag{11}$$

очевидно, можна вважати деяким узагальненням системи (7).

Слід зауважити, що похідна невиродженої квадратичної форми із сталими коефіцієнтами $V = \langle Cx, x \rangle$ в силу системи (8) має вигляд

$$\dot{V} = 2\langle B(\varphi)x, x \rangle. \tag{12}$$

Тому цікаво узагальнити систему (8) таким чином, щоб похідна невиродженої квадратичної форми із змінними коефіцієнтами

$$V = \langle C(\varphi)x, x \rangle \tag{13}$$

була такою, як (12). Безпосередньо переконуємось, що шукана система має вигляд

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad C(\varphi)\frac{dx}{dt} + \frac{1}{2}\dot{C}(\varphi)x = [\, B(\varphi) + M(\varphi) \,]x, \qquad x \in R^n, \tag{14}$$

де $C(\varphi)$ — деяка невироджена симетрична матриця, $C(\varphi) \in C'(T_m; a)$, а матриці $B(\varphi), M(\varphi)$ задовольняють умови (9) – (11). Очевидно, якщо матриця $B(\varphi)$ є додатно визначеною, то для будь-якої кососиметричної матриці $M(\varphi)$ система (14) буде регулярною. Доведемо регулярність системи (14) при виконанні нерівності (10), очевидно, додаючи при цьому ще деякі умови.

Розглянемо допоміжне твердження.

Лема. *Нехай деяка* $(n \times n)$*-вимірна симетрична матриця* $B(\varphi) \in C^0(T_m)$ *задовольняє нерівність* (10). *Тоді для будь-якої фіксованої* $(n \times n)$*-вимірної матриці* $H(\varphi) \in C^0(T_m)$ *завжди існує достатньо велике фіксоване значення параметра* $p = p_0 > 0$, *при якому квадратична форма*

$$\Phi_p = \|x\|^2 + p\langle B(\varphi)x, x\rangle + 2\langle B(\varphi)x, H(\varphi)y\rangle + \|y\|^2, \quad x, y \in R^n, \tag{15}$$

буде додатно визначеною.

Доведення. Запишемо квадратичну форму (14) у вигляді

$$\Phi_p = \langle (I_n + pB(\varphi))x, x\rangle + 2\langle H^*(\varphi)B(\varphi)x, y\rangle + \|y\|^2 =$$

$$= \langle \Gamma_p(x + Ky), (x + Ky)\rangle + \|y\|^2 - \langle \Gamma_p Ky, Ky\rangle, \tag{16}$$

де

$$\Gamma_p = I_n + pB(\varphi), \qquad K = \Gamma_p^{-1}B(\varphi)H(\varphi). \tag{17}$$

Із рівності (16) видно, що для додатної визначеності квадратичної форми (15) потрібно виконання оцінки

$$\|K^*\Gamma_p K\| < 1. \tag{18}$$

З урахуванням позначень (17) маємо

$$K^*\Gamma_p K = H^*B\Gamma_p^{-1}BH. \tag{19}$$

Покажемо, що при довільних значеннях параметра $p > 0$ має місце оцінка

$$\|\Gamma_p^{-1}B\| \le \frac{1}{p}. \tag{20}$$

З цією метою зафіксуємо довільне значення $\varphi = \varphi_0 \in T_m$ і за допомогою ортогональної матриці Θ $(\Theta^* = \Theta^{-1})$ зведемо симетричну матрицю $B = B(\varphi_0)$ до діагонального вигляду

$$\Theta^{-1}B\Theta = \operatorname{diag}\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}. \tag{21}$$

Із умови (10), очевидно, випливають нерівності

$$\beta_j \ge 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{22}$$

Тепер на основі зображення (21) добуток матриць $\Gamma_p^{-1}B$ запишемо у вигляді

$$\Gamma_p^{-1}B = \frac{1}{p}\Gamma_p^{-1}[\,pB\,] = \frac{1}{p}\Theta \operatorname{diag}\left\{\frac{p\beta_1}{1 + p\beta_1}, \ldots, \frac{p\beta_n}{1 + p\beta_n}\right\}\Theta^*. \tag{23}$$

Оскільки матриця Θ є ортогональною, то $\|\Theta\| = 1$. Очевидно, при виконанні нерівностей (22) будемо мати $\left\|\operatorname{diag}\left\{\frac{p\beta_1}{1 + p\beta_1}, \ldots, \frac{p\beta_n}{1 + p\beta_n}\right\}\right\| < 1$ при довільних значеннях $p > 0$, а тому із рівності (23) і випливає оцінка (20) при будь-яких $\varphi \in T_m$.

На основі (2) із зображення (19) отримуємо $\|K^*\Gamma_p K\| \le \frac{1}{p}\|H\|_0^2\|B\|_0$. Звідси видно, що, вибираючи $p = p_0 = 2\|H\|_0^2\|B\|_0$, одержуємо, очевидно, нерівність (18), а це означає, що квадратична форма (15) при цьому значенні параметра буде додатно визначеною.

***Зауваження* 1.** Якщо в квадратичній формі (15) матриця $B(\varphi)$ не є симетричною, то, взагалі кажучи, не можна стверджувати додатну визначеність її при кожній фіксованій матриці $H(\varphi)$ і деяких $p > 0$.

Це видно з такого прикладу:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Легко переконуємося в тому, що $\langle Bx, x \rangle = x_2^2 \geq 0$ і відповідна квадратична форма (15)

$$\Phi_p = x_1^2 + x_2^2 + px_2^2 - 2x_1y_1 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 + y_1^2 + y_2^2$$

ні при якому значенні параметра $p > 0$ не буде додатно визначеною.

***Зауваження* 2.** Наведена вище лема еквівалентна такій:

Нехай симетрична матриця $B(\varphi) \in C^0(T_m)$ задовольняє умову (10), *тоді при довільній фіксованій матриці $H(\varphi) \in C^0(T_m)$ завжди знайдеться таке додатне значення параметра $p > 0$, при якому квадратична форма*

$$\overline{\Phi}_p = \|x\|^2 + p\langle B(\varphi)x, x \rangle + \langle B(\varphi)x, H(\varphi)x \rangle \tag{24}$$

буде додатно визначеною.

Дійсно, якщо квадратична форма (15) є додатно визначеною:

$$\|x\|^2 + p\langle B(\varphi)x, x \rangle + 2\langle B(\varphi)x, H(\varphi)y \rangle + \|y\|^2 \geq \varepsilon_0\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right),$$

то, покладаючи $y = x$ і перепозначаючи $B/2 \to B$, $2H \to H$, одержуємо додатну визначеність квадратичної форми (24). Якщо ж тепер припустити, що квадратична форма (24) є додатно визначеною:

$$\|x\|^2 + p\langle B(\varphi)x, x \rangle + \langle B(\varphi)x, H(\varphi)x \rangle \geq \varepsilon_0 \|x\|^2,$$

то, покладаючи

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 2H_1(\varphi) \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

отримуємо нерівність

$$\|x_1\|^2 + \|y\|^2 + p\langle B_1(\varphi)x_1, x_1 \rangle + 2\langle B_1(\varphi)x_1, H_1(\varphi)y \rangle \geq \varepsilon_0\left(\|x_1\|^2 + \|y\|^2\right),$$

яка і вказує на додатну визначеність квадратичної форми (15).

Справедлива така теорема.

Теорема 1. *Нахай система рівнянь*

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad C(\varphi)\frac{dx}{dt} + \frac{1}{2}\dot{C}(\varphi)x = M(\varphi)x, \qquad x \in R^n, \tag{25}$$

при деякій невиродженій симетричній матриці $C(\varphi) \in C'(T_m; a)$ і кососиметричній матриці $M(\varphi) \in C^0(T_m)$ є слабкорегулярною. Тоді обов'язково ця система буде регулярною (розмірність $n = 2n_1$ — парна) і система рівнянь (14) *при довільній матриці $B(\varphi)$, яка задовольняє умови* (9), (10), *буде регулярною.*

Доведення. Позначимо

$$N(\varphi) = C^{-1}(\varphi)\left[M(\varphi) - \frac{1}{2}\dot{C}(\varphi)\right]. \tag{26}$$

Оскільки система (25) є слабкорегулярною, то існує квадратична форма $\langle S(\varphi)y, y \rangle$, похідна від якої в силу спряженої системи

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dy}{dt} = -N^*(\varphi)y \tag{25'}$$

є додатно визначеною, тобто

$$\left\langle \left[\dot{S}(\varphi) - S(\varphi)N^*(\varphi) - N(\varphi)S(\varphi) \right] y, y \right\rangle \geq \|y\|^2. \tag{27}$$

Тепер переконаємось, що похідна квадратичної форми

$$\langle C(\varphi)S(\varphi)C(\varphi)x, x \rangle = W \tag{28}$$

в силу системи (25) також буде додатно визначеною. З цією метою в нерівності (27) виконаємо заміну змінних $y = C(\varphi)x$. Враховуючи позначення (26), запишемо рівності

$$C\left\{\dot{S} - SN^* - NS\right\}C = C\left\{\dot{S} + S\left[M + \frac{1}{2}\dot{C}\right]C^{-1} + C^{-1}\left[-M + \frac{1}{2}\dot{C}\right]S\right\}C =$$

$$= C\dot{S}C + \frac{1}{2}CS\dot{C} + \frac{1}{2}\dot{C}SC + CSM - MSC =$$

$$= C\dot{S}C + \dot{C}SC + CS\dot{C} - \frac{1}{2}CS\dot{C} - \frac{1}{2}\dot{C}SC + CSM - MSC =$$

$$= \dot{C}SC + C\dot{S}C + CS\dot{C} + CSC\left\{C^{-1}\left[M - \frac{1}{2}\dot{C}\right]\right\} + \left\{C^{-1}\left[M - \frac{1}{2}\dot{C}\right]\right\}^* CSC.$$

Звідси видно, що похідна квадратичної форми (28) в силу системи (25) є додатно визначеною:

$$\dot{W} \geq \|C(\varphi)x\|^2 \geq \frac{1}{\left\|C^{-1}\right\|_0^2}\|x\|^2 = \varepsilon_0\|x\|^2. \tag{29}$$

Таким чином, існування двох таких квадратичних форм приводить до того, що $\det S(\varphi) \neq 0$ і обидві системи (25) і (25′) є регулярними (див. [2]).

Тепер покажемо, що в регулярній системі (25) розмірність n обов'язково повинна бути парною. Якщо система (25) є регулярною, то відповідна лінійна система

$$\frac{dx}{dt} = N(\varphi_t(\varphi))x \tag{30}$$

є експоненціально дихотомічною на R. Припустимо, що система (30) має r лінійно незалежних розв'язків, які прямують до нуля при $t \to +\infty$, і $n - r$ лінійно незалежних розв'язків, які прямують до нуля при $t \to -\infty$. Тоді спряжена система

$$\frac{dy}{dt} = -N^*(\varphi_t(\varphi))y \tag{30'}$$

повинна мати r лінійно незалежних розв'язків, що прямують до нуля при $t \to -\infty$, і $n - r$ лінійно незалежних розв'язків, що прямують до нуля при $t \to +\infty$. З іншого боку, як випливає з позначень (26) та властивості (11) матриці $M(\varphi)$, розв'язки систем (30), (30′) пов'язані тотожністю $C(\varphi_t(\varphi)) \cdot x(t) \equiv y(t)$. Це означає, що обидві системи (30), (30′) мають однакову кількість лінійно незалежних розв'язків, що прямують до нуля при $t \to +\infty$. Таким чином, $n - r = r$, а отже, $n = 2r$ — парне.

З метою доведення регулярності системи (14) при довільних фіксованих симетричних матрицях $B(\varphi) \in C^0(T_m)$, які задовольняють умову (10), розглянемо квадратичну форму з додатним параметром p

$$V_p = p\langle C(\varphi)x, x\rangle + \langle C(\varphi)S(\varphi)C(\varphi)x, x\rangle$$

і, використовуючи позначення (26), $S_1(\varphi) = C(\varphi)S(\varphi)C(\varphi)$ і нерівність (29), запишемо її похідну в силу системи (14):

$$\dot{V}_p = 2p\langle B(\varphi)x, x\rangle +$$

$$+ \left\langle \left\{ \dot{S}_1(\varphi) + S_1(\varphi)[\,C^{-1}(\varphi)B(\varphi) + N(\varphi)\,] + [\,B(\varphi)C^{-1}(\varphi) + N^*(\varphi)\,]S_1(\varphi) \right\} x, x \right\rangle =$$

$$= \left\langle [\,\dot{S}_1 + S_1 N + N^* S_1\,]x, x \right\rangle + 2p\langle Bx, x\rangle + 2\left\langle Bx, C^{-1}S_1 x\right\rangle \geq$$

$$\geq \varepsilon_0 \|x\|^2 + 2p\langle Bx, x\rangle + 2\left\langle Bx, C^{-1}S_1 x\right\rangle.$$

Враховуючи виконання нерівності (10) для симетричної матриці $B(\varphi)$, на основі доведеної раніше леми, очевидно, можна стверджувати додатну визначеність похідної $\dot{V}_p$ при достатньо великих фіксованих значеннях параметра $p > 0$. Це і означає, що система (14) є регулярною.

Зауваження 3. Очевидно, теорема 1 залишається справедливою і в тому випадку, якщо умову (10) замінити протилежною: $\langle B(\varphi)x, x\rangle \leq 0 \quad \forall x \in R^n$, $\varphi \in T_m$.

Розглянемо приклад, який ілюструє застосування теореми 1:

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi),$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \beta_1 \cos^2\varphi & 0 \\ 0 & \beta_2 \cos^4\varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \tag{31}$$

де $a(\varphi) \in C_{\mathrm{Lip}}(T_1)$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$. Очевидно, система (25) в даному випадку буде регулярною при довільних фіксованих $a(\varphi) \in C_{\mathrm{Lip}}(T_1)$; при цьому легко переконатись, що завжди знайдеться достатньо велике фіксоване значення параметра p таке, що похідна квадратичної форми $px_1x_2 + x_1^2 - x_2^2$ в силу системи (31) буде додатно визначеною.

Якщо тепер систему (31) змінити таким чином:

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi),$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \beta_1 \cos^2\varphi & 0 \\ 0 & \beta_2 \cos^4\varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \tag{32}$$

то відповідна система (25) не буде регулярною (наприклад, при $a \equiv 1$). При цьому виявляється, що похідна квадратичної форми

$$V = px_1x_2 + \left(x_1^2 - x_2^2\right)\sin\varphi$$

буде додатно визначеною при достатньо великому фіксованому значенні параметра $p > 0$. Таким чином, незважаючи на те, що умови теореми 1 не виконуються, система (32) є регулярною при кожному фіксованому значенні функції $a(\varphi) \in C_{\mathrm{Lip}}(T_1)$.

Справедлива така теорема.

Теорема 2. *Нехай симетрична матриця* $B(\varphi) \in C^0(T_m)$ *задовольняє умову* (10) *і існує симетрична матриця* $C(\varphi) \in C'(T_m; a)$ *така, що при достатньо великому фіксованому значенні параметра* $\lambda > 0$ *виконується нерівність*

$$\Big\langle [\,\dot{Y}(\varphi) + Y(\varphi)N(\varphi) + N^*(\varphi)Y(\varphi)\,]x, x\Big\rangle + \lambda\langle B(\varphi)x, x\rangle \geq \|x\|^2 \quad \forall x \in R^n,$$

де матриця $N(\varphi)$ *визначена рівністю* (26). *Тоді система рівнянь* (14) *буде регулярною.*

Доведення. Запишемо похідну квадратичної форми

$$V = \frac{1}{2}(p+\lambda)\langle C(\varphi)x, x\rangle + \langle Y(\varphi)x, x\rangle \tag{33}$$

з деяким додатним значенням параметра p в силу системи (14):

$$\dot{V} = (p+\lambda)\langle Bx, x\rangle + \Big\langle \Big[\dot{Y} + Y\big[C^{-1}B + N\big] + \big[B^*C^{-1} + N^*\big]Y\Big]x, x\Big\rangle =$$

$$= p\langle Bx, x\rangle + 2\Big\langle Bx, C^{-1}Yx\Big\rangle +$$

$$+ \Big\langle\Big[\dot{Y} + YN + N^*Y + \lambda B\Big]x, x\Big\rangle \geq \|x\|^2 + p\langle Bx, x\rangle + 2\Big\langle Bx, C^{-1}Yx\Big\rangle.$$

Таким чином, на основі доведеної раніше леми можна стверджувати, що похідна невиродженої квадратичної форми (33) в силу системи (14) при достатньо великому фіксованому значенні параметра $p > 0$ буде додатно визначеною, що і вказує на регулярність системи (14).

1. *Грод І. М., Кулик В. Л.* Про локальні збурення лінійних розширень динамічних систем на торі // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 2. – С. 282 – 287.
2. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 302 с.

Одержано 04.01.2001