УДК 517.9

О. О. Струк, В. І. Ткаченко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО СИСТЕМИ ЛОТКИ – ВОЛЬТЕРРИ З ДИФУЗІЄЮ ТА ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

We study a two-dimensional Lotka–Volterra system with diffusion and pulse action at fixed times. We obtain conditions of the permanence of the system. In the case where coefficients of the system are periodic in t and independent of x, we obtain conditions for the existence and uniqueness of periodic solutions of the system.

Вивчається двовимірна система Лотки – Вольтерри з дифузією та імпульсною дією у фіксовані моменти часу. Отримано умови перманентності системи. У випадку періодичності по t та незалежності коефіцієнтів системи від просторової змінної x отримано умови існування та єдиності періодичних розв'язків системи.

1. Вступ. Розглянемо двовимірну систему Лотки – Вольтерри з дифузією

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mu_1 \Delta u(t,x) + u(t,x)\big(a_1(t,x) - b_1(t,x)u(t,x) - c_1(t,x)v(t,x)\big), \tag{1}$$

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = \mu_2 \Delta v(t,x) + v(t,x)\big(a_2(t,x) - b_2(t,x)u(t,x) - c_2(t,x)v(t,x)\big), \tag{2}$$

$x \in \Omega$, $t \neq t_k$, імпульсною дією вигляду

$$u(t_k+0,x) = u(t_k,x) f_{k1}(x, u(t_k,x), v(t_k,x)), \tag{3}$$

$$v(t_k+0,x) = v(t_k,x) f_{k2}(x, u(t_k,x), v(t_k,x)), \tag{4}$$

крайовими умовами Неймана

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{5}$$

та початковими умовами

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad v(0,x) = v_0(x), \qquad x \in \overline{\Omega}, \tag{6}$$

де $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область з гладкою межею $\partial\Omega$, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, $\partial/\partial n$ — похідна вздовж зовнішньої нормалі, $\Delta u = \partial^2 u/\partial x_1^2 + \ldots + \partial^2 u/\partial x_n^2$ — оператор Лапласа, t_k — строго зростаюча послідовність дійсних чисел, $t_{k+p} - t_k = T$, $k \in \mathbb{Z}$, $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, $a_i(t,x)$, $b_i(t,x)$, $c_i(t,x)$, $i = 1, 2$, — обмежені гладкі по x, t та T-періодичні по t додатнозначні функції. Гладкі додатнозначні функції $f_{ki}(x,u,v)$ задовольняють умови

$$f_{k+p,i}(x,u,v) = f_{ki}(x,u,v), \qquad k \in \mathbb{Z},$$

$$f_{ki}(x,u,v) \le \exp(A_i + B_i u + C_i v), \qquad i = 1, 2, \tag{7}$$

з дійсними сталими A_i, B_i, C_i.

Система (1) – (6) описує взаємодію двох біологічних видів, які нерівномірно розподілені в просторі і зазнають короткочасного зовнішнього впливу у фіксовані моменти часу. Функції $u(t,x)$ і $v(t,x)$ визначають кількість індивідів даного виду на одиницю площі в момент часу t, μ_1, μ_2 є коефіцієнтами дифузії відповідно першого і другого виду. Функції a_1 та a_2 показують швидкість відтворення видів u та v. Члени $-b_1 u$ та $-c_2 v$ показують гальмівний вплив, який здійснюють види u і v відносно свого відтворення. Член $-c_1 v$ є виміром перешкоджаючої дії виду v на відтворення виду u, а $-b_2 u$ — виміром перешкоджаючої дії u на відтворення виду v. Якщо види неодноразово зазнають короткотривалих змін у фіксовані моменти часу (наприклад, збирання врожаю), тоді ці події виражаються у формі імпульсів (3), (4).

Дослідженню неперервних систем Лотки – Вольтерри з дифузією, а також більш глобальних систем реакції – дифузії присвячено багато робіт. Вивчається асимптотична поведінка розв'язків таких систем, отримано умови перманентності [1 – 9]. У роботах [10 – 12] знайдено умови перманентності та існування і єдиності періодичного розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією.

У даній статті доведено обмеженість розв'язків системи Лотки – Вольтерри з дифузією та імпульсною дією при довільних імпульсах, які задовольняють умови (7). У пункті 2 отримано умови перманентності системи (1) – (6): система називається перманентною, якщо існують додатні сталі m_1, m_2, N_1 та N_2 такі, що для розв'язку системи (1) – (6) з невід'ємними початковими функціями $u_0(x) \not\equiv 0$, $v_0(x) \not\equiv 0$ існує $t_0 = t_0(u_0, v_0)$ таке, що

$$m_1 \le u(t,x) \le N_1, \quad m_2 \le v(t,x) \le N_2$$

для $x \in \overline{\Omega}$, $t \ge t_0$. У пункті 3 доведено існування додатнозначної компактної інваріантної множини системи (1) – (6). У пункті 4 знайдено умови існування і єдиності періодичних розв'язків системи у випадку, коли її коефіцієнти не залежать від просторової змінної x. Відмітимо, що частинні випадки системи (1) – (6) розглядалися в [13 – 15].

2. Перманентність. Для обмеженої функції $g(t,x)$ позначимо

$$g^L = \inf_{(t,x)} g(t,x), \qquad g^M = \sup_{(t,x)} g(t,x).$$

Для послідовності моментів імпульсів t_k позначимо $\theta = \min_k(t_{k+1} - t_k)$. На підставі періодичності $\theta > 0$.

Позначимо через $\|\cdot\|_C$ норму простору $C(\overline{\Omega})$ неперервних функцій на $\overline{\Omega}$. Позначимо через $C_+(\overline{\Omega})$ множину неперервних невід'ємних функцій на $\overline{\Omega}$.

Припускаємо, що для початкових функцій $u_0(x)$, $v_0(x) \in C_+(\overline{\Omega})$ існує класичний розв'язок $u(t,x,u_0,v_0)$, $v(t,x,u_0,v_0)$ задачі без імпульсів (1), (2), (5), (6), який продовжується на піввісь $t > 0$. Це завжди виконується при досить гладких правих частинах рівнянь (1), (2), наприклад при тричі неперервно диференційовних по t, x функціях a_i, b_i, c_i, $i = 1, 2$ [1, 9, 16]. Якщо ж розглядати гладкі початкові функції $u_0(x)$, $v_0(x)$, то вимоги на гладкість правих частин можна послабити, зокрема, для початкових функцій $u_0(x)$, $v_0(x) \in C_+^2(\overline{\Omega})$ класичний розв'язок задачі без імпульсів (1), (2), (5), (6), який продовжується на піввісь $t > 0$, існує при неперервних, локально ліпшицевих правих частинах рівнянь (1), (2) [17].

Нам буде потрібна наступна теорема порівняння (див., наприклад, [18, 19]).

Теорема 1. *Нехай в обмеженій області* $x \in \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$, $t \in [a,b]$ *виконуються умови*:

1) $v_t - \mu\Delta v - g(t,x,v) \le w_t - \mu\Delta w - g(t,x,w)$, *де* $v = (v_1(t,x), \ldots, v_m(t,x))$, $w = (w_1(t,x), \ldots, w_m(t,x))$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m) > 0$ *(нерівності між векторами виконуються покоординатно)*;

2) *вектор-функція* $g(t,x,u) = (g_1(t,x,u), \ldots, g_m(t,x,u))$ *квазімонотонно зростаюча по* $u = (u_1, \ldots, u_m)$:

$$u_i^1 = u_i^2, \quad u_j^1 \le u_j^2, \quad j \ne i \Rightarrow g_i(t,x,u^1) \le g_i(t,x,u^2), \quad i = 1, \ldots, m.$$

Тоді $v(t,x) \le w(t,x)$ *при* $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [a,b]$.

Для системи (1), (2), яка задовольняє теорему 1 при заміні $u \to u$, $v \to -v$, справедливі наступні твердження [9].

Теорема 2. 1. *Якщо* $u_0(x) \in C_+(\overline{\Omega})$, $v_0(x) \in C_+(\overline{\Omega})$ *і* $u_0(x) \not\equiv 0$, $v_0(x) \not\equiv \not\equiv 0$, *то* $u(t, x, u_0, v_0) > 0$, $v(t, x, u_0, v_0) > 0$ *для всіх* $x \in \overline{\Omega}$, $t > 0$. 2. *Якщо* $u_0^1, v_0^1, u_0^2, v_0^2 \in C_+(\overline{\Omega})$ *та* $u_0^1(x) < u_0^2(x)$ *і* $v_0^1(x) > v_0^2(x)$, *то*

$$u\left(t, x, u_0^1, v_0^1\right) < u\left(t, x, u_0^2, v_0^2\right), \qquad v\left(t, x, u_0^1, v_0^1\right) > v\left(t, x, u_0^2, v_0^2\right), \quad t \geq 0.$$

Ці твердження залишаються справедливими, якщо нерівності в п. 2 теореми нестрогі.

Виходячи з біологічної інтерпретації, розв'язки $u(t, x)$ і $v(t, x)$ повинні бути невід'ємними. Теорема 2 разом з припущенням про додатність функцій $f_{ki}(x, u, v)$ гарантують додатність розв'язків $u(t, x)$, $v(t, x)$ імпульсної системи (1) – (6) при невід'ємних тотожно нерівних нулю початкових функціях (6). Вважаємо всі функції неперервними зліва по t.

Далі в роботі потрібна наступна лема.

Лема 1 [12]. *Нехай для додатнозначної неперервно диференційовної функції* $s(t)$ *виконується умова* $s'(t) \leq \xi s(t)$, $\xi < 0$, $t \in [0, T]$. *Тоді*

$$s(T) \leq \left(T - \frac{1}{2}T^2\xi\right)^{-1} \int_0^T s(t)\,dt.$$

Теорема 3. *Нехай* $b_i^L > 0$, $c_i^L > 0$, $i = 1, 2$. *Тоді існують додатні сталі* N_1, N_2 *такі, що для довільного розв'язку системи* (1) – (6) *з невід'ємними початковими функціями* $u_0(x)$, $v_0(x)$ *починаючи з деякого моменту часу* $u(t, x) \leq \leq N_1$, $u(t, x) \leq N_2$.

Доведення. Нехай

$$m_u = \inf_{x \in \overline{\Omega}} u_0(x), \qquad m_v = \inf_{x \in \overline{\Omega}} v_0(x),$$

$$M_u = \max_{x \in \overline{\Omega}} u_0(x), \qquad M_v = \max_{x \in \overline{\Omega}} v_0(x).$$

Позначимо через $(\overline{u}(t, x, u_0, v_0), \overline{v}(t, x, u_0, v_0))$ розв'язок системи рівнянь

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \mu_1 \Delta u(t, x) + u(t, x)\left(a_1^M - b_1^L u(t, x) - c_1^L v(t, x)\right), \tag{8}$$

$$\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} = \mu_2 \Delta v(t, x) + v(t, x)\left(a_2^M - b_2^L u(t, x) - c_2^L v(t, x)\right) \tag{9}$$

з крайовими умовами (5) та початковими функціями (6).

Розв'язок $(u(t, x, u_0, v_0), v(t, x, u_0, v_0))$ системи (1), (2) задовольняє нерівності

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t} - \mu_1 \Delta u - u\left(a_1(t,x) - b_1(t,x)u - c_1(t,x)v\right) \geq$$

$$\geq \frac{\partial u}{\partial t} - \mu_1 \Delta u - u\left(a_1^M - b_1^L u - c_1^L v\right),$$

$$0 = \frac{\partial v}{\partial t} - \mu_2 \Delta v - v\left(a_2(t,x) - b_2(t,x)u - c_2(t,x)v\right) \geq$$

$$\geq \frac{\partial v}{\partial t} - \mu_1 \Delta v - v\left(a_2^M - b_2^L u - c_2^L v\right).$$

З теорем 1 і 2 випливає

$$u(t,x,u_0,v_0) \le \overline{u}(t,x,u_0,v_0) \le \overline{u}(t,M_u,m_v),$$

$$v(t,x,u_0,v_0) \le \overline{v}(t,x,u_0,v_0) \le \overline{v}(t,m_u,M_v).$$

Відмітимо, що за теоремою про єдиність розв'язки системи (8), (9) з не залежними від x початковими даними не залежать від x і при $t>0$, тому вектор-функції $(u(t,M_u,m_v),v(t,M_u,m_v))$ і $(u(t,m_u,M_v),v(t,m_u,M_v))$ задовольняють систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} u'(t) &= u(t)\left(a_1^M - b_1^L u(t) - c_1^L v(t)\right), \\ v'(t) &= v(t)\left(a_2^M - b_2^L u(t) - c_2^L v(t)\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Звідси отримуємо

$$u(t_{j+1}) = u(t_j+0)\exp\left(\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left[a_1^M - b_1^L u(t) - c_1^L v(t)\right]dt\right), \quad j\in\mathbb{Z},$$

$$v(t_{j+1}) = v(t_j+0)\exp\left(\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left[a_2^M - b_2^L u(t) - c_2^L v(t)\right]dt\right), \quad j\in\mathbb{Z}.$$

Якщо виконується одна з нерівностей

$$u(t) \ge \max\left(\frac{a_1^M+K}{b_1^L}, \frac{a_2^M+K}{b_2^L}\right) = K_1, \quad t\in\left[t_j, t_{j+1}\right], \tag{11}$$

або

$$v(t) \ge \max\left(\frac{a_1^M+K}{c_1^L}, \frac{a_2^M+K}{c_2^L}\right) = K_2, \quad t\in\left[t_j, t_{j+1}\right], \tag{12}$$

де K — деяка константа, то з (10) випливає $u'(t)\le -Ku(t)$, $v'(t)\le -Kv(t)$, $t\in\left[t_j, t_{j+1}\right]$.

За лемою 1 отримуємо

$$u(t_{j+1}) \le \eta\int_{t_j}^{t_{j+1}} u(t)\,dt, \quad v(t_{j+1}) \le \eta\int_{t_j}^{t_{j+1}} v(t)\,dt, \tag{13}$$

де $\eta = \left(\theta+\theta^2 K/2\right)^{-1}$.

Нехай $a=\max\left(a_1^M, a_2^M\right)$, $b=\min\left(b_1^L, c_2^L\right)$. Тоді

$$u'(t) \le u(t)(a-bu(t)), \quad v'(t) \le v(t)(a-bv(t)).$$

Позначимо $M=(M_u,M_v)$. Нехай $z(t,M)$ — розв'язок рівняння

$$z'(t) = z(t)(a-bz(t)) \tag{14}$$

з початковим значенням $z(0,M)=M$. За теоремою порівняння отримуємо

$$u(t,x,u_0,v_0) \le u(t,M_u,m_v) \le z(t,M), \tag{15}$$

$$v(t,x,u_0,v_0) \le v(t,m_u,M_v) \le z(t,M). \tag{16}$$

Тому

$$\left\|u(t_{j+1},x,u_0,v_0)\right\|_C \le z(t_{j+1},M) \le z(t_j,M)\exp\left(\int_{t_j}^{t_{j+1}}(a-bz(t,M))\,dt\right), \tag{17}$$

$$\left\| v(t_{j+1}, x, u_0, v_0) \right\|_C \leq z(t_{j+1}, M) \leq z(t_j, M) \exp\left(\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} (a - bz(t, M))\, dt \right). \quad (18)$$

Оцінимо розв'язки при $t = t_{j+1} + 0$. З формул (7) випливає

$$\left\| u(t_{j+1} + 0, x, u_0, v_0) \right\|_C \leq$$

$$\leq \left\| u(t_{j+1}, x, u_0, v_0) \right\|_C \exp\left(A_1 + B_1 \left\| u(t_{j+1}, x, u_0, v_0) \right\|_C + C_1 \left\| v(t_{j+1}, x, u_0, v_0) \right\|_C \right).$$

За допомогою формул (15) – (18), враховуючи оцінки (13), отримуємо

$$\left\| u(t_{j+1} + 0, x, u_0, v_0) \right\|_C \leq$$

$$\leq \left\| u(t_j + 0, x, u_0, v_0) \right\|_C \exp\left[\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} (a - (b - \eta B_1 - \eta C_1) z(t, M))\, dt + A_1 \right]. \quad (19)$$

При $M > a / b$ розв'язки рівняння (14) монотонно спадають, тому при

$$z(t_{j+1}, M) \geq \frac{A_1 / \theta + a + \ln q}{b - \eta B_1 - \eta C_1}$$

виконується нерівність

$$\left\| u(t_{j+1} + 0, x, u_0, v_0) \right\|_C \leq q \left\| u(t_j + 0, x, u_0, v_0) \right\|_C.$$

Отже, для довільних невід'ємних початкових функцій $u_0(x)$, $v_0(x)$ існує таке натуральне k_0, що

$$\left\| u(t_{k_0} + 0, x, u_0, v_0) \right\|_C \leq q^{k_0} \left\| u(t_0 + 0, x, u_0, v_0) \right\|_C \leq q^{k_0} \left\| z(t_0, M) \right\|_C \leq$$

$$\leq e^{Ta + A_1} \max\left(\frac{a + A_1 / \theta}{b - (B_1 + C_1)\left(\theta + \theta^2 K / 2\right)^{-1}}, K_1 \exp(B_1 K_1 + C_1 K_2) \right) = N_1.$$

Аналогічно отримуємо

$$\left\| v(t_{k_0} + 0, x, u_0, v_0) \right\|_C \leq$$

$$\leq e^{Ta + A_2} \max\left(\frac{a + A_2 / \theta}{b - (B_2 + C_2)\left(\theta + \theta^2 K / 2\right)^{-1}}, K_2 \exp(B_2 K_1 + C_2 K_2) \right) = N_2.$$

Переконаємося, що $\left\| u(t, x, u_0, v_0) \right\|_C \leq N_1$, $\left\| v(t, x, u_0, v_0) \right\|_C \leq N_2$ при $t > t_{k_0}$. Дійсно, якщо $\left\| u(t_{k_0} + 0, x, u_0, v_0) \right\|_C \leq K_1$, $\left\| v(t_{k_0} + 0, x, u_0, v_0) \right\|_C \leq K_2$, то за формулою (19) одержуємо

$$\left\| u(t_{k_0+1} + 0, x, u_0, v_0) \right\|_C \leq K_1 \exp(Ta + A_1 + B_1 K_1 + C_1 K_2).$$

Якщо принаймні для однієї із змінних виконується (11) чи (12), то для $\left\| u(t, x, u_0, v_0) \right\|_C$ виконується (19). Тому якщо

$$\left\| u(t_{k_0} + 0, x, u_0, v_0) \right\|_C \leq \frac{a + A_1 / \theta}{b - (B_1 + C_1)\left(\theta + \theta^2 K / 2\right)^{-1}} = N_1^0,$$

то з (19) для $t \in \left(t_{k_0}, t_{k_0+1} + 0 \right]$ отримуємо

$$\left\| u(t, x, u_0, v_0) \right\|_C \leq z(t, N_0) \leq N_1^0 \exp\left(a(t - t_{k_0}) + A_1 \right).$$

При $\|u(t_{k_0}+0, x, u_0, v_0)\|_C \in [N_1^0, N_1]$ похідна $z'(t, N_0) < 0$, тому $\|u(t, x, u_0, v_0)\|_C \le \|z(t, N_0)\| \le \|z(t_{k_0}+0, N_0)\| \le N_1$, $t > t_k$. Аналогічно доводимо, що $\|v(t, x, u_0, v_0)\|_C \le N_2$. Теорему доведено.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови:*

1) *існують додатні сталі* N_1, N_2 *такі, що для довільного розв'язку системи* (1) – (6) *з невід'ємними, не рівними тотожно нулю початковими функціями починаючи з деякого моменту часу виконуються оцінки* $u(t, x) \le N_1$, $v(t, x) \le N_2$;

2) *мають місце нерівності*

$$\frac{1}{Tb_1^M}\left(\sum_{j=1}^{p} \ln \inf_{\substack{(u,v)\in S_1\\ x\in\overline{\Omega}}} f_{j1}(x, u, v) + Ta_1^L - Tc_1^M N_2\right) > \alpha_1 > 0, \tag{20}$$

$$\frac{1}{Tc_2^M}\left(\sum_{j=1}^{p} \ln \inf_{\substack{(u,v)\in S_2\\ x\in\overline{\Omega}}} f_{j2}(x, u, v) + Ta_2^L - Tb_2^M N_1\right) > \alpha_2 > 0, \tag{21}$$

де $S_1 = \{(u, v): 0 < u \le \alpha_1,\ 0 < v \le N_2\}$, $S_2 = \{(u, v): 0 < u \le N_1,\ 0 < v \le \alpha_2\}$.

Тоді існують додатні сталі α_1^*, α_2^* *такі, що для довільного розв'язку системи* (1) – (6) *з невід'ємними початковими функціями, не рівними тотожно нулю, починаючи з деякого моменту часу*

$$(u(t,x), v(t,x)) \in E = \left\{(u,v): \alpha_1^* \le u(t,x) \le N_1,\ \alpha_2^* \le v(t,x) \le N_2\right\}.$$

Доведення. За теоремою 2, якщо $u_0(x) \not\equiv 0$, $v_0(x) \not\equiv 0$, то $u(t, x, u_0, v_0) > 0$, $v(t, x, u_0, v_0) > 0$ при всіх $x \in \overline{\Omega}$, $t > 0$. Тому можна вважати, що $\min u_0(x) = m_u > 0$, $\min v_0(x) = m_v > 0$. Інакше, за початковий момент часу візьмемо $t = t_1 + 0$, де $\min u(t_1 + 0, x, u_0, v_0) > 0$. Для розв'язку $u(t, x, u_0, v_0)$ виконується оцінка

$$u(t, x, u_0, v_0) \ge u(t, m_u, M_v).$$

Розв'язки $u(t, x, u_0, v_0)$, $v(t, x, u_0, v_0)$ задовольняють нерівності

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu_1 \Delta u - u\left(a_1^L - b_1^M u - c_1^M v\right) \le 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \mu_2 \Delta v - v\left(a_2^L - b_2^M u - c_2^M v\right) \le 0,$$

тому за теоремою 2

$$u(t, x, u_0, v_0) \ge u(t, m_u, M_v),$$

$$v(t, x, u_0, v_0) \ge v(t, M_u, m_v),$$

де $(u(t, m_u, M_v), v(t, m_u, M_v))$ і $(u(t, M_u, m_v), v(t, M_u, m_v))$ — розв'язки системи рівнянь

$$\begin{aligned} u'(t) &= u(t)\left(a_1^L - b_1^M u(t) - c_1^M v(t)\right), \\ v'(t) &= v(t)\left(a_2^L - b_2^M u(t) - c_2^M v(t)\right). \end{aligned} \tag{22}$$

При $u(t, m_u, M_v) \le \alpha_1$ справедлива нерівність

$$u'(t) \geq u(t)\left(a_1^L - b_1^M \alpha_1 - c_1^M N_2\right), \tag{23}$$

з якої, враховуючи (3), отримуємо оцінки

$$u(t_1, x, u_0, v_0) \geq u(t_1, m_u, M_v) \geq m_u \exp\left((t_1 - t_0)\left(a_1^L - b_1^M \alpha_1 - c_1^M N_2\right)\right),$$

$$u(t_1 + 0, x, u_0, v_0) = u(t_1, x_0, u_0, v_0) f_{11}(x, u, v) \geq$$

$$\geq u(t_0 + 0, m_u, M_v) \inf_{\substack{(u,v)\in S_1 \\ x\in\overline{\Omega}}} f_{11}(x, u, v) \exp\left((t_1 - t_0)\left(a_1^L - b_1^M \alpha_1 - c_1^M N_2\right)\right).$$

Послідовно оцінюючи $u(t, x, u_0, v_0)$ на інтервалах $[t_1, t_2], \ldots, [t_{p-1}, t_p]$, отримуємо

$$u(t_p + 0, x, u_0, v_0) \geq$$

$$\geq \prod_{j=1}^{p} \inf_{\substack{(u,v)\in S_1 \\ x\in\overline{\Omega}}} f_{j1}(x, u, v) \exp\left((t_j - t_{j-1})\left(a_1^L - b_1^M \alpha_1 - c_1^M N_2\right)\right) u(t_0 + 0, m_u, M_v) =$$

$$= \exp\left(\sum_{j=1}^{p} \ln \inf_{\substack{(u,v)\in S_1 \\ x\in\overline{\Omega}}} f_{j1}(x, u, v) + T a_1^L - T\left(b_1^M \alpha_1 + c_1^M N_2\right)\right) u(t_0 + 0, m_u, M_v). \tag{24}$$

З (20) і (24) випливає нерівність

$$u(t_p + 0, x, u_0, v_0) \geq h_1 u(t_0 + 0, m_u, M_v)$$

зі сталою $h_1 > 1$, яка визначається з умови (20). Тому існує k_1 таке, що

$$u(t_0 + k_1 T + 0, x, u_0, v_0) \geq h_1^{k_1} u(t_0 + 0, m_u, M_v) > \alpha_1^0$$

для додатного $\alpha_1^0 < \alpha_1$ (за умови $u(t, x, u_0, v_0) \leq \alpha_1$ при $t \in [t_0, t_0 + k_1 T]$).

Розглянемо множину початкових функцій $u_0(x)$, $v_0(x)$, які задовольняють умови

$$\alpha_1 \leq u_0(x) \leq N_1, \quad 0 < v_0(x) \leq N_2. \tag{25}$$

Розв'язок $(u(t, \tau, x, u_0, v_0), v(t, \tau, x, u_0, v_0))$ системи (1) – (6) з початковими функціями $u(\tau, \tau, x, u_0, v_0) = u_0$, $v(\tau, \tau, x, u_0, v_0) = v_0$, які належать множині (25), задовольняє при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [\tau, \tau + T]$, $\tau \in [0, T]$ умови

$$0 < \alpha_1^0 \leq u(t, \tau, x, u_0, v_0) \leq N_1, \quad 0 < v(t, \tau, x, u_0, v_0) \leq N_2.$$

Існування ненульового α_1^0 випливає з нерівностей типу (23) і додатності розв'язків системи (22).

Під дією оператора $\Sigma\colon C(\Omega \times \Omega, \mathbb{R}^2) \to C(\Omega \times \Omega, \mathbb{R}^2)$:

$$\Sigma(u_0(x), v_0(x)) = (u(T, x, u_0, v_0), v(T, x, u_0, v_0)) \tag{26}$$

множина

$$\{\alpha_1^0 \leq u(x) \leq N_1, \quad 0 \leq v(x) \leq N_2\} \tag{27}$$

перейде в себе. Дійсно, якщо $u_0(x) \geq \alpha_1^0$ і $u\left(t, \alpha_1^0, M_v\right) \leq \alpha_1$ при $t \in [0, T]$, то з (24) отримуємо

$$u(T, x, u_0, v_0) \geq u\left(T, \alpha_1^0, M_v\right) \geq \alpha_1^0.$$

Якщо ж при деякому $t < T$ виконується $u\left(t, \alpha_1^0, M_v\right) \geq \alpha_1$, то $\Sigma(u_0(x), v_0(x))$ належить множині (27) за побудовою.

Отже, за α_1^* досить вибрати

$$\inf_{\substack{t\in[0,T]\\ x\in\overline{\Omega}}}\left\{u(t,x,u_0,v_0)\colon \alpha_1^0\le u_0\le\alpha_1\right\}.$$

Аналогічно доводимо, що $v(t,x,u_0,v_0)\ge\alpha_2^*>0$. Отже, довільний розв'язок системи (1) – (6) з невід'ємними, не рівними тотожно нулю початковими значеннями в деякий момент попадає в множину E і залишається в ній. Теорему доведено.

3. Компактність розв'язків. Позначимо $w=(u,v)\in L_p(\Omega)\times L_p(\Omega)=X$, де p — досить велике натуральне число, і запишемо систему (1) – (6) у вигляді

$$\begin{gathered}\frac{dw}{dt}-A_1w=F(t,w),\qquad t\ne t_i,\\ w(t_i+0)=g_i(w(t_i)),\\ w(0)=w_0,\end{gathered}\tag{28}$$

де

$$A_1=\begin{pmatrix}\mu_1\Delta-\delta & 0\\ 0 & \mu_2\Delta-\delta\end{pmatrix},\qquad \delta>0,$$

$$F(t,w)=\begin{pmatrix}u(a_1(t,x)-b_1(t,x)u-c_1(t,x)v)+\delta u\\ v(a_2(t,x)-b_2(t,x)u-c_2(t,x)v)+\delta v\end{pmatrix},$$

$$g_i(w(t_i))=\begin{pmatrix}u(t_i,x)f_{i1}(x,u(t_i,x),v(t_i,x))\\ v(t_i,x)f_{i2}(x,u(t_i,x),v(t_i,x))\end{pmatrix}.$$

Оператор A_1 має область визначення

$$D(A_1)=\left\{\xi\colon \xi\in W^{2,p}(\Omega),\ \left.\frac{\partial\xi}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0\right\},$$

де $W^{2,p}(\Omega)$ — простір Соболєва функцій з $L_p(\Omega)$, які мають дві узагальнені похідні. Відомо [17], що оператор A_1 — секторіальний з $\operatorname{Re}\sigma(A_1)\le\delta$, де $\sigma(A_1)$ — спектр оператора A_1. Для оператора A_1 означаються степені за допомогою формули

$$A_1^{-\alpha}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-sA_1}s^{\alpha-1}ds,$$

де Γ — гамма-функція, $\alpha>0$.

Оператори $A_1^{-\alpha}$ — обмежені і взаємно однозначні. A_1^{α} з $\alpha>0$ означається як обернений до $A_1^{-\alpha}$, $D(A_1^{\alpha})=R(A_1^{-\alpha})$. A_1^0 — тотожний оператор в X.

Для аналітичної напівгрупи e^{-A_1t}, $t\ge0$, справедливі оцінки

$$\left\|A_1^{\alpha}e^{-A_1t}\right\|\le C_\alpha t^{-\alpha}e^{-at},\qquad t>0,\qquad \alpha\ge0,\tag{29}$$

де $\|\cdot\|$ — норма простору $X=L_p\times L_p$. Для $0\le\alpha\le1$ введемо простір $X^{\alpha}=$ $=D(A_1^{\alpha})$ з нормою $\|x\|_\alpha=\|A_1^{\alpha}x\|$.

Нехай $w_0\in X^{\alpha}$, $2\alpha>n/p$. Тоді при $t\in(t_0,t_1]$ існує класичний розв'язок $w(t,w_0)$ рівняння (28) [2, 17]. Якщо функція g_1 двічі неперервно диференційовна, то і функція $w(t_1+0,w_0)$ двічі неперервно диференційовна, а тому $w(t_1+0,w_0)\in D(A_1)\subseteq X^{\alpha}$, $\alpha\le1$. Отже, на інтервалі $(t_1,t_2]$ існує класичний розв'язок рівняння (28). Аналогічно доводимо існування класичного розв'язку при $t > t_2$.

Теорема 5. *Припустимо, що функції* g_i *двічі неперервно диференційовні. Нехай* $w(t, w_0) = (u(t, x, u_0, v_0), v(t, x, u_0, v_0))$ *— обмежений розв'язок системи* (1) – (6):

$$\|w(t, w_0)\|_C \le N, \quad t > 0, \tag{30}$$

з $w_0 \in X^\alpha$. *Тоді множина*

$$\bigcup \{ w(t, w_0) \colon t_i + \varepsilon \le t \le t_{i+1},\ i = 0, 1, \ldots \} \tag{31}$$

відносно компактна в $C^{1+\nu}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ *для* $0 < \nu \le 2\alpha - 1 - n/p$ *і* $0 < \varepsilon < \theta$.

Доведення. Розв'язок системи (28) можна записати у вигляді

$$w(t, w_0) = e^{-A_1 t} w_0 + \int_0^t e^{-A_1(t-s)} F(s, w(s)) ds + \\ + \sum_{0 < t_i < t} e^{-A_1(t-t_i)} g_i(w(t_i)). \tag{32}$$

За означенням норми в просторі X^α з (32) маємо

$$\|w(t)\|_\alpha = \left\|A_1^\alpha w(t)\right\| \le \left\|A_1^\alpha e^{-A_1 t} w_0\right\| + \int_0^t \left\|A_1^\alpha e^{-A_1(t-s)}\right\| \|F(s, w(s))\| ds + \\ + \sum_{0 < t_i < t} \left\|A_1^\alpha e^{-A_1(t-t_i)} g_i(w(t_i))\right\|.$$

Оцінимо кожен з доданків у правій частині. За допомогою нерівності (29) отримуємо

$$\left\|A_1^\alpha e^{-A_1 t} w_0\right\| \le \left\|e^{-A_1 t}\right\| \left\|A_1^\alpha w_0\right\| \le C e^{-\delta t} \|w_0\|_\alpha \le C'. \tag{33}$$

Для другого доданка отримуємо нерівність

$$\int_0^t \left\|A_1^\alpha e^{-A_1(t-s)} F(s, w(s))\right\| ds \le \int_0^t C_\alpha (t-s)^{-\alpha} e^{-\delta(t-s)} \|F(s, w(s))\| ds \le \\ \le C_\alpha M_F \int_0^\infty m^{-\alpha} e^{-\delta m} dm = C_\alpha M_F \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\delta^{1-\alpha}}, \tag{34}$$

де $M_F = \|F(s, w(s))\|$. З (30) випливає $M_F < \infty$. Оцінимо третій доданок:

$$\sum_{0 < t_i < t} \left\|A_1^\alpha e^{-A_1(t-t_i)} g_i(w(t_i))\right\| \le \sum_{0 < t_i < t} C_\alpha (t - t_i)^{-\alpha} e^{-\delta(t-t_i)} \|g_k(w(t_i))\|. \tag{35}$$

Розглядаємо ті значення t, які віддалені справа від точок імпульсів не менше, ніж на $\varepsilon > 0$. Тоді в формулі (35) $(t - t_i)^{-\alpha} \le \varepsilon^{-\alpha}$. В результаті отримуємо

$$\sum_{0 < t_k < t_i} C_\alpha (t - t_k)^{-\alpha} e^{-\delta(t-t_k)} \|g_k(w(t_k))\| \le \\ \le C_\alpha M_g (\varepsilon)^{-\alpha} \sum_{k=1}^\infty e^{-\delta\theta k} \le C_\alpha M_g \frac{e^{-\alpha} e^{-\delta\theta}}{1 - e^{-\delta\theta}}, \tag{36}$$

де $M_g \ge \| g_k(w(t_k))\|$, $k = 1, 2, \ldots$. З урахуванням (30) $M_g < \infty$.

З (33), (34) і (36) отримуємо $\| w(t, w_0)\|_\alpha \le C_X < \infty$ при $t \in \bigcup_i [t_i + \varepsilon, t_{i+1}]$.

З обмеженості множини функцій у просторі X^α випливає компактність цієї множини у просторі X^β при $\beta < \alpha$. При $2\beta - n/p \ge 1 + \nu$ простір X^β неперервно вкладений у простір $C^{1+\nu}$. Тому множина (31) відносно компактна у просторі $C^{1+\nu}$. Теорему доведено.

З теореми випливає, що послідовність функцій $w(t_0 + kT, w_0)$, $k = 1, 2, \ldots$, компактна у просторі $C^{1+\nu}$. Вона має непорожню ω-граничну множину, яка компактна і інваріантна відносно відображення $\Sigma\colon C(\Omega \times \Omega, \mathbb{R}^2) \to$ $\to C(\Omega \times \Omega, \mathbb{R}^2)$:

$$\Sigma(u_0(x), v_0(x)) = (u(T, x, u_0, v_0), v(T, x, u_0, v_0)).$$

Отже, відображення Σ має непорожню компактну строго додатну інваріантну множину. Їй відповідає строго додатна інваріантна множина системи (1) – (6), причому множина її значень при $t \in \bigcup_i [t_i + \varepsilon, t_{i+1}]$ та довільних малих ε компактна.

4. Існування та єдиність періодичного розв'язку. Розглянемо систему з не залежними від просторової змінної коефіцієнтами

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mu_1 \Delta u(t,x) + u(t,x)(a_1(t) - b_1(t)u(t,x) - c_1(t)v(t,x)), \tag{37}$$

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = \mu_2 \Delta v(t,x) + v(t,x)(a_2(t) - b_2(t)u(t,x) - c_2(t)v(t,x)), \tag{38}$$

$x \in \Omega$, $t \ne t_i$, з імпульсною дією вигляду

$$u(t_i + 0, x) = u(t_i, x) f_{i1}(u(t_i, x), v(t_i, x)), \tag{39}$$

$$v(t_i + 0, x) = u(t_i, x) f_{i2}(u(t_i, x), v(t_i, x)), \tag{40}$$

для якої виконуються крайові умови (5) та початкові умови (6). З перманентності системи (37) – (40) випливає перманентність системи

$$u'(t) = u(t)(a_1(t) - b_1(t)u(t) - c_1(t)v(t)), \qquad t \ne t_k, \tag{41}$$

$$v'(t) = v(t)(a_2(t) - b_2(t)u(t) - c_2(t)v(t)), \qquad t \ne t_k, \tag{42}$$

з імпульсною дією (39), (40).

За принципом Брауера перманентна система (41), (42), (39), (40) має принаймні один строго додатний кусково-неперервний T-періодичний розв'язок $(u_0(t), v_0(t))$ [11, 12], який, очевидно, буде розв'язком системи (37) – (40).

Теорема 6. *Нехай для системи* (37) – (40) *виконуються умови*:

1) *система перманентна*: *існують додатні сталі* β *і* N *такі*, *що кожний її розв'язок з невід'ємними*, *не рівними тотожно нулю початковими функціями починаючи з деякого моменту часу залишається в множині* $E = \{(u, v)\colon \beta \le u \le$ $\le N,\ \beta \le v \le N\}$;

2) *має місце нерівність*

$$K = \prod_{j=1}^{p} K_j \exp\left[(a + c^M N - (2b + c^L)\beta) T \right] < 1, \tag{43}$$

де

$$K_j = \max_{\substack{u,v \in E \\ x \in \Omega}} \left(2f_{j,1}^2 + 2\left(N\frac{\partial f_{j1}}{\partial u}\right)^2 + 2\left(N\frac{\partial f_{j1}}{\partial v}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2f_{j,2}^2 + 2\left(N\frac{\partial f_{j2}}{\partial v}\right)^2 + 2\left(N\frac{\partial f_{j2}}{\partial u}\right)^2 \right),$$

$$a = \max\left(a_1^M, a_2^M\right), \quad b = \min\left(b_1^L, c_2^L\right),$$

$$c^L = \min\left(c_1^L, b_2^L\right), \quad c^M = \max\left(c_1^M, b_2^M\right).$$

Тоді система (37) – (40) *має єдиний глобально асимптотично стійкий строго додатний кусково-неперервний T-періодичний розв'язок* $(u_0(t), v_0(t))$.

Доведення. Нехай $(u_0(t), v_0(t))$ — періодичний розв'язок системи (37) – (40), а $(u(t,x), v(t,x))$ — інший розв'язок цієї системи, значення якого належать множині E.

Розглянемо функцію

$$L(t) = \int_\Omega \left[(u(t,x) - u_0(t))^2 + (v(t,x) - v_0(t))^2 \right] dx.$$

Її похідна має вигляд

$$\frac{dL}{dt} = 2\int_\Omega (u - u_0)\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{du_0}{dt}\right)dx + 2\int_\Omega (v - v_0)\left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{dv_0}{dt}\right)dx =$$

$$= 2\mu_1 \int_\Omega (u-u_0)\Delta(u-u_0)\,dx + 2a_1(t)\int_\Omega (u-u_0)^2\,dx -$$

$$- 2\int_\Omega b_1(t)(u-u_0)^2(u+u_0) + c_1(t)(u-u_0)(uv - u_0v_0)\,dx +$$

$$+ 2\mu_2 \int_\Omega (v-v_0)\Delta(v-v_0)\,dx + 2a_2(t)\int_\Omega (v-v_0)^2\,dx -$$

$$- 2\int_\Omega b_2(t)(v-v_0)(uv - u_0v_0) + c_2(t)(v-v_0)^2(v+v_0)\,dx.$$

Виконуючи перетворення, отримуємо

$$\frac{dL}{dt} \le -2\mu_1 \int_\Omega |\nabla(u-u_0)|^2\,dx - 2\mu_2 \int_\Omega |\nabla(v-v_0)|^2\,dx +$$

$$+ \int_\Omega (a_1(t) - b_1(t)(u+u_0) - c_1(t)v)(u-u_0)^2\,dx +$$

$$+ \int_\Omega (-c_1(t)u_0 - b_2(t)v_0)(u-u_0)(v-v_0)\,dx +$$

$$+ \int_\Omega (a_2(t) - b_2(t)u - c_2(t)(v+v_0))(v-v_0)^2\,dx \le$$

$$\le \int_\Omega \left(a - (2b + c^L)\beta\right)(u-u_0)^2\,dx +$$

$$+ \int_\Omega \left[2c^M N |(u-u_0)(v-v_0)| + \left(a - (2b+c^L)\beta\right)(v-v_0)^2 \right] dx.$$

Розглянемо квадратичну форму

$$\left(a-(2b+c^L)\beta\right)x^2 + 2c^M Nxy + \left(a-(2b+c^L)\beta\right)y^2.$$

Відомо, що $(Ax,x)\le\lambda_M(x,x)$, де λ_M — найбільше власне значення матриці

$$A = \begin{pmatrix} a-(2b+c^L)\beta & c^M N \\ c^M N & a-(2b+c^L)\beta \end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що

$$\lambda_M = a + c^M N - (2b+c^L)\beta.$$

Звідси отримуємо

$$\frac{dL}{dt} \le \left(a + c^M N - (2b+c^L)\beta\right)\int_\Omega \left[(u-u_0)^2+(v-v_0)^2\right]dx.$$

При $t\in\left[t_j,t_{j+1}\right]$ справедлива нерівність

$$L(t_{j+1}) \le L(t_j+0)\exp\left[\left(a + c^M N - \beta(2b+c^L)\right)(t_{j+1}-t_j)\right].$$

За допомогою формул (39), (40) запишемо $L(t_{j+1}+0)$ у вигляді

$$L(t_{j+1}+0) = \int_\Omega \left[u(t_{j+1},x)f_{j+1,1}(u,v)-u_0(t_{j+1})f_{j+1,1}(u_0,v_0)\right]^2 dx +$$

$$+\int_\Omega \left[v(t_{j+1},x)f_{j+1,2}(u,v)-v_0(t_{j+1})f_{j+1,2}(u_0,v_0)\right]^2 dx. \tag{44}$$

Оцінимо підінтегральні вирази в (44):

$$\left|uf_{j+1,1}(u,v)-u_0f_{j+1,1}(u_0,v_0)\right| = \left|uf_{j+1,1}(u,v)-u_0f_{j+1,1}(u,v) +\right.$$

$$\left. + u_0\left(f_{j+1,1}(u,v)-f_{j+1,1}(u_0,v)\right)+u_0\left(f_{j+1,1}(u_0,v)-f_{j+1,1}(u_0,v_0)\right)\right| \le$$

$$\le \left|f_{j+1,1}+u_0\frac{\partial f_{j+1,1}}{\partial u}\right||u-u_0| + \left|u_0\frac{\partial f_{j+1,1}}{\partial v}\right||v-v_0|.$$

В результаті за нерівністю Коші – Буняковського отримуємо

$$\int_\Omega \left[u(t_{j+1},x)f_{j+1,1}(u,v)-u_0(t_{j+1})f_{j+1,1}(u_0,v_0)\right]^2 dx \le$$

$$\le \left(2\left[\max_{\substack{u,v\in E\\ x\in\overline\Omega}} f^2_{j+1,1}(u,v) + \max_{\substack{u,u_0,v\in E\\ x\in\overline\Omega}}\left(u_0\frac{\partial f_{j+1,1}}{\partial u}\right)^2\right] + \max_{\substack{u,u_0,v\in E\\ x\in\overline\Omega}}\left(u_0\frac{\partial f_{j+1,1}}{\partial v}\right)^2\right)\times$$

$$\times\int_\Omega\left[\left(u(t_{j+1},x)-u_0(t_{j+1})\right)^2+\left(v(t_{j+1},x)-v_0(t_{j+1})\right)^2\right]dx.$$

Аналогічно оцінюємо

$$\int_\Omega \left[v(t_{j+1},x)f_{j+1,2}(u,v)-v_0(t_{j+1})f_{j+1,2}(u_0,v_0)\right]^2 dx \le$$

$$\le \left(2\left[\max_{\substack{u,v\in E\\ x\in\overline\Omega}} f^2_{j+1,2}(u,v) + \max_{\substack{u,v_0,v\in E\\ x\in\overline\Omega}}\left(v_0\frac{\partial f_{j+1,2}}{\partial v}\right)^2\right] + \max_{\substack{u,v_0,v\in E\\ x\in\overline\Omega}}\left(v_0\frac{\partial f_{j+1,2}}{\partial u}\right)^2\right)\times$$

$$\times \int_{\Omega} \left[\left(u(t_{j+1}, x) - u_0(t_{j+1}) \right)^2 + \left(v(t_{j+1}, x) - v_0(t_{j+1}) \right)^2 \right] dx .$$

В результаті маємо

$$L(t_{j+1} + 0) \leq K_{j+1} \exp\left(\left(a + c^M N - (2b + c^L)\beta \right)(t_{j+1} - t_j) \right) L(t_j + 0).$$

Оцінимо зміну функції $L(t)$ за період:

$$L(t+T) \leq \prod_{i=1}^{p} K_i \exp\left(\left(a + c^M N - (2b + c^L)\beta \right) T \right) L(t) = KL(t).$$

За умовою теореми $K < 1$, тому

$$L(t + mT) \leq K^m L(t) \to 0, \quad m \to \infty.$$

Звідси випливає $\|u(t,x) - u_0(t)\| \to 0$, $\|v(t,x) - v_0(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$, а враховуючи обмеженість функцій, і

$$|u(t,x) - u_0(t)| \to 0, \quad |v(t,x) - v_0(t)| \to 0.$$

Теорему доведено.

1. *Акрамов Т. А., Вишневский М. П.* Некоторые качественные свойства системы реакция-диффузия // Сиб. мат. журн. – 1995. – **36**, № 1. – С. 3 – 19.
2. *Alikakos N. D.* An application of the invariance principle to reaction-diffusion equations // J. Different. Equat. – 1979. – **33**. – P. 201 – 225.
3. *Alvarez C., Lazer A.* Application of topological degree to the periodic competing species problem // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. – 1986. – **28**. – P. 202 – 219.
4. *Dunbar S. R., Rubakowski K. P., Schmitt K.* Persistence in models of predator-prey populations with diffusion // J. Different. Equat. – 1986. – **65**. – P. 117 – 138.
5. *Dung L.*. Global attractors and steady state solutions for a class of reaction-diffusion systems // Ibid. – 1998. – **147**. – P. 1 – 29.
6. *Hutson V., Schmitt K.* Permanence and dynamics of biological systems // Math. Biosci. – 1992. – **111**. – P. 1 – 71.
7. *Mazuda K.* On global existence and asymptotic behavior of solutions of reaction-diffusion equations // Hokkaido Math. J. – 1983. – **12**. – P. 360 – 370.
8. *Redlinger R.*. Compactness results for time-dependent parabolic systems // J. Different. Equat. – 1986. – **64**. – P. 133 – 153.
9. *Smith L. H.* Dynamics of competition // Lect. Notes Math. – 1999. – **1714**. – P. 192 – 240.
10. *Liu X.* Boundedness in terms of two measures and permanence of population growth models // Nonlinear Analysis TMA: Proc. 2nd World Congress of Nonlinear Analysis. – 1997. – **30**, Pt 5. – P. 2711 – 2723.
11. *Струк О. О., Ткаченко В. І.* Про двовимірні періодичні системи Лотки – Вольтерри з імпульсною дією // Нелінійні коливання. – 2000. – **3**, № 4. – С. 554 – 561.
12. *Struk O. O., Tkachenko V. I.* On periodic solutions of Lotka – Volterra systems with impulses // Nonlinear Oscillations. – 2001. – **4**, № 1. – P. 129 – 144.
13. *Bainov D. D., Minchev E., Nakagawa K.* Asymptotic behaviour of solutions of impulsive semilinear parabolic equations // Nonlinear Anal. and Appl. – 1997. – **30**. – P. 2725 – 2734.
14. *Chan C. Y., Ke L., Vatsala A. S.* Impulsive quenching for reaction-diffusion equations // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Appl. – 1994. – **22**, № 11. – P. 1323 – 1328.
15. *Роговченко Ю. В., Трофимчук С. И.* Периодические решения слабо нелинейных уравнений в частных производных параболического типа с импульсным воздействием. – Киев, 1986. – 44 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.65).
16. *Соболевский П. Е.* Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1961. – **10**. – С. 297 – 350..
17. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985. – 376 с.
18. *Walter W.* Differential inequalities // Lect. Notes Pure and Appl. Math. – 1991. – **129**. – P. 249 – 283.
19. *Walter W.* Differential inequalities and maximum principles; theory, new methods and applications // Nonlinear Anal. and Appl. – 1997. – **30**. – P. 4695 – 4711.

Одержано 10.04.2001