УДК 517.929

І. І. Клевчук (Чернів. ун-т)

ГОМОКЛІНІЧНІ ТОЧКИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

We obtain a representation of an integral manifold of singularly perturbed difference-differential equations with periodic right-hand side. We show that, under certain conditions on the right-hand side, the Poincare map for a perturbed system possesses a transversal homoclinic point.

Одержано зображення інтегрального многовиду системи сингулярно збурених диференціально-різницевих рівнянь з періодичною правою частиною. Показано, що при відповідних умовах на праву частину відображення Пуанкаре для збуреної системи має трансверсальну гомоклінічну точку.

Розглянемо систему

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)) + \varepsilon h(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)),\\ \varepsilon\frac{dy}{dt} &= G_1(x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)) + \varepsilon P(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)),\end{aligned} \tag{1}$$

де ε — малий додатний параметр, $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$, функції $h(t, x, y, z)$ та $P(t, x, y, z)$ періодичні відносно t з періодом 2π.

Припустимо, що виконуються умови:

1) $f(0,0,0) = G_1(0,0,0) = 0$;

2) для всіх $x \in \mathbb{R}^m$ рівняння $G_1(x, y, y) = 0$ має ізольований розв'язок $y = \varphi(x)$, причому $\varphi(0) = 0$, а функція $\varphi(x)$ та її похідні відносно x до третього порядку включно рівномірно неперервні і обмежені;

3) функції $f(x, y, z)$, $h(t, x, y, z)$, $G_1(x, y, z)$, $P(t, x, y, z)$ та їхні частинні похідні відносно t, x, y, z до третього порядку включно рівномірно неперервні і обмежені при $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^m$, $|y - \varphi(x)| \le \rho$, $|z - \varphi(x)| \le \rho$.

Лінеаризуючи функцію $G_1(x, y, z)$ у точці $y = \varphi(x)$, $z = \varphi(x)$ відносно y, z систему (1) можна записати у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)) + \varepsilon h(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)),$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = B_1(x(t))y(t) + B_2(x(t))y(t-\varepsilon\Delta) + G(x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)) + \\ + \varepsilon P(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)),$$

причому при досить малому ρ для $|y| \le \rho$, $|z| \le \rho$ виконується нерівність

$$|G(x, y+\varphi(x), z+\varphi(x)) - G(x, \varphi(x), \varphi(x))| \le K(|y|^2 + |z|^2), \quad K > 0. \tag{2}$$

Нехай виконується умова

4) всі корені характеристичного рівняння

$$\det(B_1(x) + B_2(x)\exp(-\lambda\Delta) - \lambda E) = 0$$

належать півплощині $\operatorname{Re}\lambda \le -2\alpha < 0$.

Система (1) еквівалентна такій системі рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)) + \varepsilon h(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)),$$
$$y_t = T(t,\sigma)y_\sigma + \frac{1}{\varepsilon}\int_\sigma^t T(t,s)X_0[G(x(s), y(s), y(s-\varepsilon\Delta)) + \tag{3}$$
$$+ \varepsilon P(s, x(s), y(s), y(s-\varepsilon\Delta))]ds,$$

де y_t — елемент простору $C = C[-\varepsilon\Delta, 0]$, заданий функцією $y_t(\theta) = y(t+\theta)$, $-\varepsilon\Delta \le \theta \le 0$; $X_0(\theta) = 0$, $-\varepsilon\Delta \le \theta < 0$; $X_0(0) = E$, E — одинична матриця; $T(t,s)$ — оператор зсуву за розв'язками рівняння $\varepsilon dy/dt = B_1(x(t))y(t) + B_2(x(t))y(t-\varepsilon\Delta)$.

Для регулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь існування інтегральних многовидів доведено в [1], а для сингулярно збурених — в [2] та ін. Згідно з [2] при деякому $\varepsilon_0 > 0$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, існує інтегральний многовид системи (1), що може бути поданий у вигляді $y_t = \varphi(x) + \xi(t, x, \varepsilon)$, де $\xi(t, x, 0) = 0$. У праці [3] одержано зображення інтегрального многовиду лінійної системи. У даній статті одержано наближене зображення інтегрального многовиду нелінійної сингулярно збуреної системи. Це дає можливість використати результати В. К. Мельникова [4] для рівняння на многовиді і дослідити умови існування гомоклінічної точки.

Теорема 1. *Нехай для системи* (1) *виконуються умови* 1 – 4. *Тоді інтегральний многовид системи* (1) *можна зобразити у вигляді* $y_t = \varphi(x) + g(t, x, \varepsilon) + O(\varepsilon^2)$, *де*

$$g(t,x,\varepsilon) = \varepsilon[B_1(x) + B_2(x)]^{-1}\left[(E + \Delta B_2(x))\frac{\partial\varphi}{\partial x} f(x, \varphi(x), \varphi(x)) - \right.$$
$$\left. - P(t, x, \varphi(x), \varphi(x))\right] + \theta\frac{\partial\varphi}{\partial x} f(x, \varphi(x), \varphi(x)), \qquad -\varepsilon\Delta \le \theta \le 0.$$

Доведення. Систему (3) перепишемо у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)) + \varepsilon h(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)),$$
$$\frac{dy_t}{dt} = A(t)y_t + \frac{1}{\varepsilon}X_0 G(x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)) + X_0 P(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)), \tag{4}$$

де $A(t)$ — необмежений оператор,

$$A(t)\psi(\theta) = \begin{cases} d\psi/d\theta, & -\varepsilon\Delta \le \theta < 0; \\ (B_1(x(t))\psi(0) + B_2(x(t))\psi(-\varepsilon\Delta))/\varepsilon, & \theta = 0. \end{cases}$$

Виконавши в системі (4) заміну $y_t = \varphi(x) + z_t$, одержимо систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \varphi(x) + z, \varphi(x) + z_\Delta) + \varepsilon h(t, x, \varphi(x) + z, \varphi(x) + z_\Delta),$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} f(x, \varphi(x) + z, \varphi(x) + z_\Delta) + \varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x} h(t, x, \varphi(x) + z, \varphi(x) + z_\Delta) + \frac{dz_t}{dt} = \tag{5}$$
$$= A(t)\varphi(x) + A(t)z_t + \frac{1}{\varepsilon}X_0 G(x, \varphi(x) + z, \varphi(x) + z_\Delta) + X_0 P(t, x, \varphi(x) + z, \varphi(x) + z_\Delta),$$

де $z = z(t)$, $z_\Delta = z(t-\varepsilon\Delta)$, $\partial\varphi/\partial x$ — матриця Якобі з елементами $\partial\varphi_i/\partial x_j$.

Оскільки

$$A(t)\varphi(x) = \frac{1}{\varepsilon} X_0 B_1(x)\varphi(x) + \frac{1}{\varepsilon} X_0 B_2(x)\varphi(x) = -\frac{1}{\varepsilon} X_0 G(x, \varphi(x), \varphi(x)),$$

то з нерівності (2) випливає оцінка

$$\left| A(t)\varphi(x) + \frac{1}{\varepsilon} X_0 G(x, \varphi(x) + z, \varphi(x) + z_\Delta) \right| \le \frac{K}{\varepsilon}\left(|z|^2 + |z_\Delta|^2 \right).$$

Знайдемо зображення інтегрального многовиду $z_t = g(t, x, \varepsilon) + O(\varepsilon^2)$ системи (5) з точністю до членів порядку ε. Тоді для функції $g(t, x, \varepsilon)$ одержимо рівняння

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} f(x, \varphi(x), \varphi(x)) = A(t) g(t, x, \varepsilon) + X_0 P(t, x, \varphi(x), \varphi(x)). \tag{6}$$

У цьому рівнянні збережено члени порядку $O(1)$. Із рівняння (6) при $-\varepsilon\Delta \le \theta < < 0$ знаходимо

$$g(t, x, \varepsilon) = g(t, x, \varepsilon)|_{\theta=0} + \theta \frac{\partial\varphi}{\partial x} f(x, \varphi(x), \varphi(x)).$$

При $\theta = 0$ маємо

$$\frac{1}{\varepsilon} B_1(x) g(t, x, \varepsilon)|_{\theta=0} + \frac{1}{\varepsilon} B_2(x) g(t, x, \varepsilon)|_{\theta=-\varepsilon\Delta} + P(t, x, \varphi(x), \varphi(x)) =$$
$$= \frac{\partial\varphi}{\partial x} f(x, \varphi(x), \varphi(x)),$$

або

$$[B_1(x) + B_2(x)]\, g(t, x, \varepsilon)|_{\theta=0} = \varepsilon(E + \Delta B_2(x)) \frac{\partial\varphi}{\partial x} f(x, \varphi(x), \varphi(x)) -$$
$$- \varepsilon P(t, x, \varphi(x), \varphi(x)).$$

Звідси знаходимо шуканий вираз

$$g(t, x, \varepsilon) = \varepsilon [B_1(x) + B_2(x)]^{-1} \left[(E + \Delta B_2(x)) \frac{\partial\varphi}{\partial x} f(x, \varphi(x), \varphi(x)) - \right.$$
$$\left. - P(t, x, \varphi(x), \varphi(x)) \right] + \theta \frac{\partial\varphi}{\partial x} f(x, \varphi(x), \varphi(x)).$$

Тому інтегральний многовид системи (1) можна зобразити у вигляді

$$y_t = \varphi(x) + g(t, x, \varepsilon) + O(\varepsilon^2).$$

Теорему доведено.

Позначимо

$$\mu(t, x) = \frac{1}{\varepsilon} g(t, x, \varepsilon)|_{\theta=0} = [B_1(x) + B_2(x)]^{-1} \left[(E + \Delta B_2(x)) \frac{\partial\varphi}{\partial x} f(x, \varphi(x), \varphi(x)) - \right.$$
$$\left. - P(t, x, \varphi(x), \varphi(x)) \right], \quad \eta(t, x) = \frac{1}{\varepsilon} g(t, x, \varepsilon)|_{\theta=-\varepsilon\Delta} = [B_1(x) + B_2(x)]^{-1} \times$$
$$\times \left[(E - \Delta B_1(x)) \frac{\partial\varphi}{\partial x} f(x, \varphi(x), \varphi(x)) - P(t, x, \varphi(x), \varphi(x)) \right].$$

Тоді рівняння на многовиді системи (1) набере вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \varphi(x) + \varepsilon\mu(t, x), \varphi(x) + \varepsilon\eta(t, x)) + \varepsilon h(t, x, \varphi(x), \varphi(x)) + O(\varepsilon^2).$$

Це рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \varphi(x), \varphi(x)) + \varepsilon\left[\frac{\partial f}{\partial y}\mu(t,x) + \frac{\partial f}{\partial z}\eta(t,x) + h(t,x,\varphi(x),\varphi(x))\right] + O(\varepsilon^2),$$

або

$$\frac{dx}{dt} = F(x) + \varepsilon H(t,x) + O(\varepsilon^2), \tag{7}$$

де

$$F(x) = f(x, \varphi(x), \varphi(x)), \quad H(t,x) = f_y(x, \varphi(x), \varphi(x))\mu(t,x) +$$
$$+ f_z(x, \varphi(x), \varphi(x))\eta(t,x) + h(t,x,\varphi(x),\varphi(x)).$$

Для кожного розв'язку $(x(t), y(t))$ системи (1) існує розв'язок $\chi(t)$ рівняння (7) такий, що справедлива оцінка

$$|x(t) - \chi(t)| + |y_t - \varphi(\chi(t)) - \xi(t, \chi(t), \varepsilon)| \le K_1 \exp(-\alpha(t-\sigma)/(2\varepsilon)),$$

де $t \ge \sigma$, $K_1 > 0$.

Нехай виконуються умови:

5) матриця $F_x(0)$ не має власних чисел на уявній осі;

6) система $dx/dt = F(x)$ має обмежений розв'язок $x = \zeta(t)$, причому $\lim_{t\to-\infty}\zeta(t) = \lim_{t\to+\infty}\zeta(t) = 0$;

7) рівняння у варіаціях

$$\frac{dx}{dt} = F_x(\zeta(t))x \tag{8}$$

є експоненціально дихотомічним на півосях $(-\infty, 0]$ та $[0, \infty)$;

8) існує $t_0 \in \mathbb{R}$ таке, що $\Delta(t_0) = 0$, $\Delta'(t_0) \ne 0$, де

$$\Delta(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(t) H(t + t_0, \zeta(t))\,dt,$$

$\psi(t)$ — обмежений на $(-\infty, \infty)$ розв'язок системи, спряженої до (8).

Тоді згідно з [4–6] існує єдиний обмежений розв'язок $x(t, \varepsilon)$ системи (7) такий, що $|x(t,\varepsilon) - \zeta(t)| \le C\varepsilon$, $C > 0$, причому рівняння у варіаціях

$$\frac{dx}{dt} = [F_x(x(t,\varepsilon)) + \varepsilon H_x(t, x(t,\varepsilon))]x$$

є експоненціально дихотомічним на $(-\infty, \infty)$.

Позначимо через $Q(t)$ матрицю Гріна системи $dx/dt = F_x(0)x$ і розглянемо інтегральне рівняння

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(t-s)\left[F(x(s)) - F_x(0)x(s) + \varepsilon H(s, x(s)) + O(\varepsilon^2)\right]ds. \tag{9}$$

За допомогою методу послідовних наближень можна показати, що рівняння (9) має обмежений розв'язок $\bar{x}(t,\varepsilon)$, який є періодичним розв'язком системи (7), причому $\sup_{-\infty<t<\infty}|\bar{x}(t,\varepsilon)| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Крім того, виконуються рівності

$$\lim_{t\to+\infty}|x(t,\varepsilon) - \bar{x}(t,\varepsilon)| = \lim_{t\to-\infty}|x(t,\varepsilon) - \bar{x}(t,\varepsilon)| = 0.$$

Замкненій сепаратрисі $x = \zeta(t)$ сідла системи $dx/dt = F(x)$ відповідає замкнена сепаратриса $x = \zeta(t)$, $y_t = \varphi(\zeta(t))$ сідла системи (1) при $\varepsilon = 0$. Періодичному розв'язку $\bar{x}(t,\varepsilon)$ системи (7) відповідає періодичний розв'язок

$x = \bar{x}(t, \varepsilon)$, $y_t = \bar{y}_t(\varepsilon) \equiv \varphi(\bar{x}(t, \varepsilon)) + g(t, \bar{x}(t, \varepsilon), \varepsilon) + O(\varepsilon^2)$ системи (1). Обмеженому розв'язку $x(t, \varepsilon)$ системи (7), близькому до $\zeta(t)$, відповідає обмежений розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, $y_t = y_t(\varepsilon) \equiv \varphi(x(t, \varepsilon)) + g(t, x(t, \varepsilon), \varepsilon) + O(\varepsilon^2)$ системи (1), причому

$$|x(t,\varepsilon) - \zeta(t)| + |y_t(\varepsilon) - \varphi(\zeta(t))| \le |x(t,\varepsilon) - \zeta(t)| + L|x(t,\varepsilon) - \zeta(t)| + \varepsilon M + M_1\varepsilon^2 \le [(1+L)C + M]\varepsilon + M_1\varepsilon^2, \tag{10}$$

$$\lim_{t \to \pm\infty} (|x(t,\varepsilon) - \bar{x}(t,\varepsilon)| + |y_t(\varepsilon) - \bar{y}_t(\varepsilon)|) = 0,$$

де L — стала Ліпшиця для функції φ, M — стала, що обмежує зверху функцію

$$\left| [B_1(x) + B_2(x)]^{-1} \left[(E + \Delta B_2(x)) \frac{\partial \varphi}{\partial x} f(x, \varphi(x), \varphi(x)) - P(t, x, \varphi(x), \varphi(x)) \right] \right| + \left| \Delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} f(x, \varphi(x), \varphi(x)) \right|.$$

Розглянемо відображення Пуанкаре $x \to \Phi(x)$ для системи (7), тобто відображення, що ставить у відповідність початковому значенню $x \in \mathbb{R}^m$ при $t = 0$ розв'язку системи (7) значення цього розв'язку в момент $t = 2\pi$. Згідно з [5] існує трансверсальна гомоклінічна точка відображення Φ. Тому згідно з теоремою Смейла – Біркгофа [7, с. 143] існує канторова множина $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$, на якій деяка ітерація відображення Φ є інваріантною і топологічно спряженою зсуву Бернуллі над скінченною множиною символів.

Розглянемо множину $\Lambda_1 = \{ (x, q) \mid x \in \Lambda, q = \varphi(x) + \xi(0, x, \varepsilon), q \in C \}$. Ця множина є канторовою. На множині Λ_1 деяка ітерація відображення Пуанкаре для системи (1) є інваріантною і топологічно спряженою зсуву Бернуллі над скінченною множиною символів.

Отже, справедливе таке твердження.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* 1 – 8. *Тоді існують замкнена сепаратриса сідла, періодичний* $(\bar{x}(t, \varepsilon), \bar{y}_t(\varepsilon))$ *і обмежений* $(x(t, \varepsilon), y_t(\varepsilon))$ *розв'язки системи* (1). *При цьому справджуються співвідношення* (10). *Існує канторова множина* Λ_1 *така, що на цій множині деяка ітерація відображення Пуанкаре для системи* (1) *є інваріантною і топологічно спряженою зсуву Бернуллі над скінченною множиною символів.*

1. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.
2. *Митропольский Ю. А., Фодчук В. И., Клевчук И. И.* Интегральные многообразия, устойчивость и бифуркация решений сингулярно возмущенных дифференциально-функциональных уравнений // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 3. – С. 335 – 340.
3. *Клевчук І. І.* Біфуркація стану рівноваги сингулярно збуреної системи із загаюванням // Там же. – 1995. – **47**, № 8. – С. 1022 – 1028.
4. *Мельников В. К.* Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1963. – **12**. – С. 3 – 52.
5. *Palmer K. J.* Exponential dichotomies and transversal homoclinic points // J. Different. Equat. – 1984. – **55**, № 2. – P. 225 – 256.
6. *Самойленко А. М., Тимчишин О. Я., Прикарпатський А. К.* Геометричний аналіз Пуанкаре – Мельникова трансверсального розщеплення многовидів повільно збурених нелінійних динамічних систем. I // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 12. – С. 1668 – 1681.
7. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. – М.: Мир, 1975. – 304 с.

Одержано 26.01.2001