УДК 517.9

**М. Є. Дудкін** (Нац. тех ун-т України „КПІ", Київ)

# АНАЛОГ ФОРМУЛИ М. Г. КРЕЙНА ДЛЯ РЕЗОЛЬВЕНТ НОРМАЛЬНИХ РОЗШИРЕНЬ ПЕРЕДНОРМАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА*

We prove a formula connecting resolvents of normal operators that are extensions of some prenormal operator. This formula is an analog of the M. G. Krein formula for resolvents of self-adjoint extensions of a symmetric operator. We describe properties of defect subspaces of the prenormal operator.

Доведено формулу, яка пов'язує резольвенти нормальних операторів, що є розширеннями деякого передпормального оператора. Ця формула є аналогом формули М. Г. Крейна для резольвент самоспряжених розширень симетричного оператора. Описано властивості дефектних підпросторів передпормального оператора.

**Вступ.** Формула М. Г. Крейна для резольвент самоспряжених розширень симетричного оператора відома завдяки численним застосуванням. Цей факт є підставою для різних узагальнень, в яких можна використати зазначену формулу, або аналогічні формули. Найбільш повна бібліографія з цієї тематики міститься в огляді [1] та монографії [2].

Дана робота є спробою узагальнити теорію самоспряжених розширень симетричного оператора на випадок нормальних розширень переднормального оператора.

Нехай $H$ — сепарабельний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$ і нормою $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$. Розглянемо необмежений оператор $N$, заданий на щільній в $H$ області визначення $D(N)$: $\overline{D(N)} = H$.

Нагадаємо, що оператор $N$ називається нормальним, якщо він комутує зі спряженим оператором, тобто $NN^* - N^*N = 0$, де комутування розуміється в сенсі спектральних проекторів з розкладів цих операторів, або резольвент за умови, що вони існують. Далі будемо припускати, що резольвентна множина $\rho(N)$ оператора $N$ не порожня: $\rho(N) \neq \varnothing$.

Розглянемо звуження $\dot{N} := N \upharpoonright D(\dot{N})$ оператора $N$ на деяку щільну в $H$ підмножину $D(\dot{N}) \subset D(N)$; $\overline{D(\dot{N})} = H$. Цей факт позначимо $\dot{N} \subset N$. Очевидно, $N^* \subset \dot{N}^*$. Позначимо звуження $\hat{N} := \dot{N}^* \upharpoonright D(\dot{N})$, тоді $\hat{N} \subset N^*$ і відповідно $N \subset \hat{N}^*$. Область визначення оператора $\hat{N}$ позначимо через $D(\hat{N})$, хоча $D(\dot{N}) \equiv D(\hat{N})$.

Згідно з Коддінгтоном [3] оператор $T$ називається формально нормальним, якщо $D(T) \subset D(T^*)$ та $\|Tf\| = \|T^*f\|$ $\forall f \in D(T)$. Очевидно, оператори $\dot{N}$ і $\hat{N}$ є формально нормальними.

* Підтримана INTAS (проекти № 00-257 і DFG 436 UKR 113/43).

Будемо називати $\dot{N}$ переднормальним звуженням нормального оператора $N$. Очевидно, таким є і $\hat{N}$ по відношенню до $N^*$. Таким чином, за побудовою утворено ланцюги операторів:

$$\dot{N} \subset N \subset \hat{N}^*, \quad \hat{N} \subset N^* \subset \dot{N}^*. \tag{1}$$

Зауважимо, що така конструкція використовувалась у роботах [4, 5] у випадку, коли $\dot{N}$ і $\hat{N}$ були довільними щільно визначеними лінійними операторами. Випадок, коли $\dot{N} = \hat{N} = \dot{A}$ — симетричний оператор, а $N$ — довільне розширення (не обов'язково нормальний оператор, але $N \subset \dot{A}^*$ та $N^* \subset \dot{A}^*$), розглядався в [6, 7].

**Властивості дефектних підпросторів.** Нехай $z \in \rho(N)$, тоді оператор $R_z = (N-z)^{-1}$ обмежений і визначений скрізь в $N$. Ланцюги (1) набирають вигляду

$$\begin{gathered}(\dot{N}-z) \subset (N-z) \subset (\hat{N}^*-z), \\ (\dot{N}-\bar{z}) \subset (N-z)^* \subset (\dot{N}-z)^*.\end{gathered} \tag{2}$$

Нагадаємо, що підпростори $\mathfrak{N}_z := \ker(\dot{N}-z)^*$ та $\hat{\mathfrak{N}}_z := \ker(\hat{N}-z)^*$ називаються дефектними підпросторами операторів відповідно $\dot{N}$ та $\hat{N}$. Позначимо через $\mathfrak{M}_z = H \ominus \mathfrak{N}_z$ ($\hat{\mathfrak{M}}_z = H \ominus \hat{\mathfrak{N}}_z$) області значень операторів $\dot{N}$ (відповідно $\hat{N}$). Властивості дефектних підпросторів $\mathfrak{N}_z(\hat{\mathfrak{N}}_z)$ розкриває така теорема, яка є частинним випадком теореми з [8].

**Теорема 1.** *Нехай в сепарабельному гільбертовому просторі $H$ задано необмежений нормальний оператор $N$ з щільною в $H$ областю визначення $D(N)$. Припустимо, що резольвентна множина оператора $N$ не є порожньою ($\rho(N) \neq \varnothing$). Тоді для довільного підпростору $\mathfrak{N} \subset H$ такого, що $\mathfrak{N} \cap D(N^*) = \{0\}$, та для будь-якого $z \in \rho(N)$ знайдеться звуження $\dot{N}$ оператора $N$ таке, що підпростір $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{N}_z$ є дефектним підпростором звуженого оператора, тобто $(\dot{N}-z)^*\mathfrak{N}_z = 0$.*

Доведення теореми див. у [8].

Припустимо, що існують $\mu, \lambda \in \rho(N) \cap \rho(N^*)$. Позначимо $\hat{T}_{\mu\lambda} := (N-\mu)(N-\lambda)^{-1}$ і $T_{\mu\lambda} := (N^*-\mu)(N^*-\lambda)^{-1}$. Використовуючи техніку, розвинену в [6, 7], доведемо ряд допоміжних тверджень.

**Твердження 1.** *Оператор $\hat{T}_{\mu\lambda}$ відображає $\hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\mu}}$ в $\hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\lambda}}$.*

***Доведення.*** Запишемо $\hat{T}_{\mu\lambda}$ у вигляді

$$\hat{T}_{\mu\lambda} = I + (\lambda-\mu)(N-\lambda)^{-1}. \tag{3}$$

За означенням $(\hat{N}-\bar{\lambda})^*\hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\lambda}} = 0$, або $((\hat{N}-\bar{\lambda})D(\hat{N}), \hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\lambda}}) = 0$. Покажемо, що

$$((\hat{N}-\bar{\lambda})D(\hat{N}), \hat{T}_{\mu\lambda}\hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\mu}}) = 0. \tag{4}$$

Підставляючи (3) в ліву частину (4), маємо

$$\begin{aligned}&((\hat{N}-\bar{\lambda})D(\hat{N}), \hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\mu}}) + (\bar{\lambda}-\bar{\mu})((\hat{N}-\bar{\lambda})D(\hat{N}), (N-\lambda)^{-1}\hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\mu}}) = \\ &= (D(\hat{N}), (\hat{N}-\bar{\lambda})^*\hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\mu}}) + (\bar{\lambda}-\bar{\mu})((\hat{N}-\bar{\lambda})(N^*-\bar{\lambda})^{-1}D(\hat{N}), \hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\mu}}).\end{aligned} \tag{5}$$

Оскільки $(\hat{N}-\bar{\lambda})^*\hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\mu}} = \hat{N}\hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\mu}} - \lambda\hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\mu}} = (\mu-\lambda)\hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\mu}}$, то

$$(D(\hat{N}), (\hat{N}-\bar{\lambda})\hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\mu}}) = (\bar{\mu}-\bar{\lambda})(D(\hat{N}), \hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\mu}}). \tag{6}$$

Оскільки $(\hat{N}-\bar{\lambda})(N^*-\bar{\lambda})^{-1}f = f \quad \forall f \in D(\hat{N})$, то

$$((\hat{N}-\bar{\lambda})(N^*-\bar{\lambda})^{-1}D(\hat{N}), \hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\mu}}) = (D(\hat{N}), \hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\mu}}). \tag{7}$$

Підставляючи (6) і (7) в (5), переконуємося в істинності (4).

Аналогічним твердженню 1 є таке твердження.

**Твердження 2.** *Оператор* $T_{\mu\lambda}$ *відображає* $\mathfrak{N}_{\bar{\mu}}$ *в* $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$.

***Доведення*** аналогічне доведенню твердження 1.

Позначимо $U_{\lambda\lambda} = (N-\lambda)^*(N-\lambda)^{-1}$, $\lambda \in \rho(N)$.

**Твердження 3.** *Оператор* $U_{\lambda\lambda}$ *відображає* $\mathfrak{N}_{\lambda}$ *в* $\hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\lambda}}$.

***Доведення.*** Покажемо, що $(\hat{N}-\bar{\lambda})^* U_{\lambda\lambda}\mathfrak{N}_{\lambda} = 0$. Дійсно,

$$(\hat{N}-\bar{\lambda})^* U_{\lambda\lambda}\mathfrak{N}_{\lambda} = (\hat{N}-\bar{\lambda})^*(N-\lambda)^*(N-\lambda)^{-1}\mathfrak{N}_{\lambda} =$$

$$= (N-\lambda)^*(\hat{N}-\bar{\lambda})^*(N-\lambda)^{-1}\mathfrak{N}_{\lambda} =$$

$$= (\dot{N}-\lambda)^*(\hat{N}-\bar{\lambda})^*(N-\lambda)^{-1}\mathfrak{N}_{\lambda} =$$

$$= (\dot{N}-\lambda)^*(N-\lambda)^*(N-\lambda)^{-1}\mathfrak{N}_{\lambda} = (\dot{N}-\lambda)^*\mathfrak{N}_{\lambda}.$$

Позначимо $U_{\bar{\lambda}\lambda} = (N-\bar{\lambda})^*(N-\lambda)^{-1}$, $\lambda \in \rho(N)$. Аналогічним твердженню 3 є таке твердження.

**Твердження 4.** *Оператор* $U_{\bar{\lambda}\lambda}$ *відображає* $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ *в* $\hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\lambda}}$.

***Доведення*** аналогічне доведенню твердження 3.

***Зауваження*** **1.** Твердження 1 і 2 можна узагальнити на випадок, коли $\dot{N}$ (відповідно $\hat{N}$) — довільний лінійний оператор.

Твердження 3 і 4 не можна узагальнити на випадок, коли оператор $\dot{N}$ (відповідно $\hat{N}$) не є переднормальним, тобто не має переставної властивості.

З тверджень 1–4 випливають такі наслідки.

***Наслідок*** **1.** *Оператор* $\hat{T}_{\lambda\mu} = \hat{T}_{\lambda\mu}^{-1}$ *відображає* $\hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\lambda}}$ *в* $\hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\mu}}$.

***Наслідок*** **2.** $\dim \hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\lambda}} = \dim \hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\mu}}$.

***Наслідок*** **3.** *Оператор* $T_{\lambda\mu} = T_{\mu\lambda}^{-1}$ *відображає* $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ *в* $\mathfrak{N}_{\bar{\mu}}$.

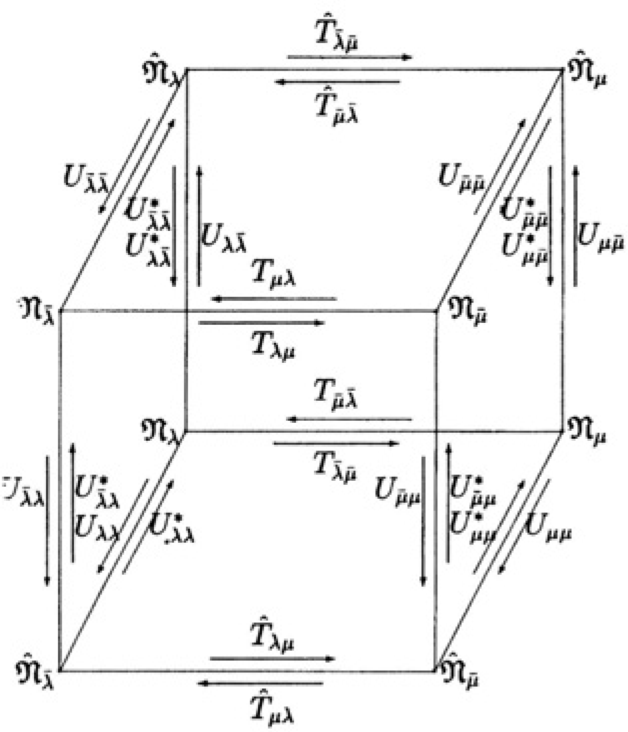
***Наслідок*** **4.** $\dim \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}} = \dim \mathfrak{N}_{\bar{\mu}}$.

***Наслідок*** **5.** *Оператор* $U_{\lambda\lambda}^{-1} = U_{\lambda\lambda}^* = (N-\lambda)(N^*-\bar{\lambda})^{-1}$ *відображає* $\hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\lambda}}$ *в* $\mathfrak{N}_{\lambda}$.

***Наслідок*** **6.** *Оператор* $U_{\bar{\lambda}\lambda}^{-1} = U_{\bar{\lambda}\lambda}^* = (N-\bar{\lambda})(N^*-\bar{\lambda})^{-1}$ *відображає* $\hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\lambda}}$ *в* $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$.

***Наслідок*** **7.** $\dim \mathfrak{N}_{\lambda} = \dim \hat{\mathfrak{N}}_{\lambda}$.

Міняючи $\lambda$, $\bar{\lambda}$, $\mu$, $\bar{\mu}$ місцями у твердженнях 1–4 і наслідках 1–7 та враховуючи рівності $\hat{T}_{\bar{\lambda}\bar{\mu}} = T_{\lambda\mu}^*$, $\hat{T}_{\bar{\mu}\bar{\lambda}} = T_{\mu\lambda}^*$, $T_{\bar{\lambda}\bar{\mu}} = \hat{T}_{\lambda\mu}^*$, $T_{\bar{\mu}\bar{\lambda}} = \hat{T}_{\mu\lambda}^*$, можна скласти повну тривимірну діаграму, подібну до двовимірної в [9] у випадку опису дефектних підпросторів симетричних операторів.




**Нормальні розширення переднормального оператора.** Нехай в $H$ задано переднормальний оператор $\dot{N}$. Розглянемо два різних нормальних розширення $N$ і $\tilde{N}$ оператора $\dot{N}$. Два нормальних розширення $N$ і $\tilde{N}$ оператора $\dot{N}$ будемо називати взаємно простими, якщо $D(N)\cap D(\tilde{N}) = D(\dot{N})$. Основним результатом роботи є така теорема.

**Теорема 2.** *Нехай в сепарабельному гільбертовому просторі $H$ задано переднормальний оператор $\dot{N}$ з дефектними підпросторами однакової скінченної розмірності $\dim \mathfrak{N}_\lambda = \dim \hat{\mathfrak{N}}_{\bar\lambda} = r$ та два його взаємно простих розширення $N$ і $\tilde{N}$, які є нормальними операторами в $H$. Тоді:*

1) *для резольвент $R_\lambda := (N-\lambda)^{-1}$ і $R_\lambda := (\tilde{N}-\lambda)^{-1}$ $\forall\, \lambda \in \rho(N)\cap\rho(\tilde{N})$ виконується співвідношення*

$$\tilde{R}_\lambda = R_\lambda + \sum_{k,m=1}^{r} p_{mk}(\lambda)(\cdot, g_m(\lambda))\, \hat{g}_k(\bar\lambda), \tag{8}$$

*де $g_m(\lambda)$, $\hat{g}_k(\bar\lambda)$, $m, k = \overline{1,r}$, — базисні вектори дефектних підпросторів відповідно $\mathfrak{N}_\lambda$ і $\hat{\mathfrak{N}}_{\bar\lambda}$, $P(\lambda) := \{p_{mk}(\lambda)\}_{m,k=1}^{r}$ — матриця, яка визначає оператор в $\hat{\mathfrak{N}}_{\bar\lambda}$;*

2) *для двох різних $\lambda, \mu \in \rho(N)\cap(\tilde{N})$ матриці $P(\lambda)$ і $P(\mu)$ пов'язані співвідношенням*

$$P^{-1}(\lambda) = P^{-1}(\mu)G^{-1}(g(\mu), g(\mu))G(g(\mu), \hat{g}(\mu)) - (\lambda-\mu)G(\hat{g}(\bar\mu), g(\lambda)), \tag{9}$$

*де $G(\cdot,\cdot)$ — матриця Грама відповідних базисних векторів.*

***Доведення.*** Використаємо техніку, започатковану в [10, 11] та розвинену в [6, 7, 9]. Будемо притримуватись методики, викладеної в [6, 7]. Покажемо, що

$$((\tilde{N}-\lambda)^{-1}-(N-\lambda)^{-1})f \begin{cases} =0, & \text{якщо } f\in\mathfrak{M}_{\lambda}; \\ \in\hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\mu}}, & \text{якщо } f\in\hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\mu}},\ \mu\neq\lambda. \end{cases}$$

Дійсно, нехай $\varphi = (N-\lambda)^{-1}f$, $f\in\mathfrak{M}_{\lambda}$. Тоді $f = (N-\lambda)\varphi$ і $\varphi\in D(\dot{N})$. Оскільки $N = \tilde{N}$ на $D(\dot{N})$, тобто $f = (N-\lambda)\varphi = (\dot{N}-\lambda)\varphi = (\tilde{N}-\lambda)\varphi$, то

$$((\tilde{N}-\lambda)^{-1}-(N-\lambda)^{-1})f = 0 \quad \forall f\in\mathfrak{M}_{\lambda}.$$

З твердження 1 маємо $\hat{T}_{\mu\lambda}\hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\mu}} = \hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\lambda}}$, або $(N-\mu)(N-\lambda)^{-1}\hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\mu}} = \hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\lambda}}$. З (3) випливає, що для будь-якого $f\in\hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\mu}}$ існує $\hat{g}(\bar{\lambda})\in\hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\lambda}}$ такий, що

$$\hat{g}(\bar{\lambda}) = f + (\lambda-\mu)(N-\lambda)^{-1}f.$$

З останньої рівності одержуємо

$$(N-\lambda)^{-1}f = \frac{\hat{g}(\bar{\lambda})-f}{\lambda-\mu} \quad \forall f\in\hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\mu}}.$$

Аналогічно, використовуючи оператор $\tilde{N}$, отримуємо

$$(\tilde{N}-\lambda)^{-1}f = \frac{\tilde{\hat{g}}(\bar{\lambda})-f}{\lambda-\mu} \quad \forall f\in\hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\mu}}.$$

Оскільки $\tilde{\hat{g}}(\bar{\lambda})\in\hat{\mathfrak{N}}(\bar{\lambda})$, то $((\tilde{N}-\lambda)^{-1}-(N-\lambda)^{-1})f\in\hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\lambda}}$, якщо $f\in\hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\mu}}$.

Аналогічно можна показати, що

$$((\tilde{N}^*-\bar{\lambda})^{-1}-(N^*-\bar{\lambda})^{-1})f \begin{cases} =0, & \text{якщо } f\in\mathfrak{M}_{\bar{\lambda}}; \\ \in\mathfrak{N}_{\mu}, & \text{якщо } f\in\mathfrak{N}_{\mu},\ \mu\neq\lambda. \end{cases}$$

Позначимо, як у [9], $B_z = (\tilde{N}-z)^{-1}-(N-z)^{-1}$, $z\in\rho(\tilde{N})\cap\rho(N)$. Використовуючи тотожність Гільберта $R_{\mu}-R_{\lambda} = (\mu-\lambda)R_{\lambda}R_{\mu}$, $\tilde{R}_{\mu}-\tilde{R}_{\lambda} = (\mu-\lambda)\tilde{R}_{\lambda}\tilde{R}_{\mu}$ та позначення $B_{\lambda} = \tilde{R}_{\lambda}-R_{\lambda}$, $B_{\mu} = \tilde{R}_{\mu}-R_{\mu}$, маємо

$$B_{\lambda}-B_{\mu} = \tilde{R}_{\lambda} - \tilde{R}_{\lambda} - (\tilde{R}_{\mu}-R_{\mu}) = (\tilde{R}_{\lambda}-R_{\mu}) - (R_{\lambda}-R_{\mu}) =$$

$$= (\lambda-\mu)[\tilde{R}_{\lambda}\tilde{R}_{\mu}-R_{\lambda}R_{\mu}] = (\lambda-\mu)[(R_{\lambda}+B_{\lambda})(R_{\mu}+B_{\mu})-R_{\lambda}R_{\mu}] =$$

$$= (\lambda-\mu)[R_{\lambda}B_{\mu}+B_{\lambda}R_{\mu}+B_{\lambda}B_{\mu}].$$

Враховуючи, що $T_{\mu\lambda} = I + (\lambda-\mu)(N^*-\lambda)^{-1}$ та наслідок 3, останню рівність можна записати у вигляді

$$B_{\lambda}T_{\lambda\mu} = T_{\mu\lambda}B_{\mu} + (\lambda-\mu)B_{\lambda}B_{\mu}. \tag{10}$$

Позначимо $\tilde{T}_{\lambda\mu} = (\tilde{N}-\lambda)(\tilde{N}-\mu)^{-1}$. Тоді, враховуючи рівності

$$T_{\lambda\mu} - (\lambda-\mu)B_{\mu} = I - (\mu-\lambda)R_{\mu} - (\lambda-\mu)(\tilde{R}_{\mu}-R_{\mu}) - \tilde{T}_{\lambda\mu},$$

отримуємо

$$B_{\lambda}\tilde{T}_{\lambda\mu} = T_{\mu\lambda}B_{\mu}.$$

З наслідку 3, застосованого до оператора $\tilde{T}_{\lambda\mu}$, випливає, що $\tilde{T}_{\lambda\mu}$ має обернений: $\tilde{T}_{\lambda\mu}^{-1} = \tilde{T}_{\mu\lambda}$. Таким чином,

$$B_\lambda = T_{\mu\lambda} B_\mu \tilde{T}_{\mu\lambda} = T_{\mu\lambda} B_\mu [T_{\lambda\mu} - (\lambda - \mu) B_\mu]^{-1}.$$

Зауважимо, що останній вираз, незалежно від розмірності дефектного підпростору, дозволяє за даним оператором $B_\mu$ обчислити $B_\lambda$ $\forall \lambda \in \rho(N) \cap (\tilde{N})$.

Припустимо надалі, що $\dim(\hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\mu}}) = r < \infty$.

Нехай $\{\hat{g}_k(\bar{\mu})\}_{k=1}^r$ — базис в $\hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\mu}}$. Покладаючи $\hat{g}_k(\bar{\lambda}) = T_{\mu\lambda} \hat{g}_k(\bar{\mu})$, $k = \overline{1, r}$, отримуємо $\{\hat{g}_k(\bar{\lambda})\}_{k=1}^r$ — базис в $\hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\lambda}}$. Тоді оператор $B_\lambda$ можна зобразити у вигляді

$$B_\lambda f = \sum_{k=1}^r c_k(f) \hat{g}_k(\bar{\lambda}),$$

де $c_k(f)$ — обмежені лінійні функціонали на $\hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\lambda}}$, які залежать від $\lambda$. Отже,

$$c_k(f) = (f, h_k(\lambda)), \qquad h_k(\lambda) \in \mathfrak{N}_\lambda.$$

Нехай

$$h_k(\lambda) = \sum_{m=1}^r p_{mk}(\bar{\lambda}) g_m(\lambda),$$

тоді

$$c_k(f) = \sum_{m=1}^r p_{mk}(\lambda) (f, g_m(\lambda)).$$

Таким чином,

$$B_\lambda = \sum_{k,m=1}^r p_{mk}(\lambda) (\cdot, g_m(\lambda)) \hat{g}_k(\bar{\lambda}), \tag{11}$$

звідки отримуємо формулу (8).

Доведемо другу частину теореми. Розглянемо матрицю

$$S = \| (B_\lambda T_{\lambda\mu} g_\alpha(\mu), \hat{g}_\beta(\bar{\lambda})) \|_{\alpha,\beta=1}^r. \tag{12}$$

Підставляючи (10) в (12), отримуємо

$$S = \| (T_{\mu\lambda} B_\mu g_\alpha(\mu), \hat{g}_\beta(\bar{\lambda})) \|_{\alpha,\beta=1}^r +$$

$$+ (\lambda - \mu) \| (B_\lambda B_\mu g_\alpha(\mu), \hat{g}_\beta(\bar{\lambda})) \|_{\alpha,\beta=1}^r. \tag{13}$$

Використовуючи (11) з $\mu$, маємо

$$T_{\mu\lambda} B_\mu g_\alpha(\mu) = \sum_{k,m=1}^r (g_\alpha(\mu), g_m(\mu)) p_{mk}(\bar{\mu}) \hat{T}_{\mu\lambda} \hat{g}_k(\hat{\mu}).$$

Помножимо останню рівність скалярно на $\hat{g}_\beta(\bar{\lambda})$. Враховуючи, що $\hat{T}_{\mu\lambda} \hat{g}_k(\bar{\mu}) = \hat{g}_k(\bar{\lambda})$, $k = \overline{1, r}$, отримуємо спрощений вигляд першого доданка в (13):

$$\| (T_{\mu\lambda} B_\mu g_\alpha(\mu), \hat{g}_\beta(\bar{\lambda})) \|_{\alpha,\beta=1}^r = G(g(\mu), g(\mu)) P(\mu) \hat{G}(g(\bar{\lambda}), g(\bar{\lambda})), \tag{14}$$

де $G(g(\mu), g(\mu)) = \| (g_k(\mu), g_m(\mu)) \|$, $\hat{G}(\hat{g}(\mu)), \hat{g}(\mu) = \| (\hat{g}_k(\mu), \hat{g}_m(\mu)) \|$ — матриці Грама відповідних базисних векторів.

Знову записуючи (11) з $\mu$ та $\lambda$, обчислюємо

$$B_\lambda B_\mu g_\alpha(\mu) = \sum_{k,m=1}^r (g_\alpha(\mu), g_m(\mu)) p_{mk}(\mu) B_\lambda \hat{g}_k(\bar{\mu}) =$$

$$= \sum_{k,m,n,t=1}^r (g_\alpha(\mu), g_m(\mu)) p_{mk}(\mu) (\hat{g}_k(\bar{\mu}), g_t(\lambda)) p_{tn}(\lambda) \hat{g}_n(\bar{\lambda}).$$

Помноживши останню рівність скалярно на $\hat{g}_\beta(\bar{\lambda})$, отримаємо спрощений вигляд частини другого доданка в (13):

$$\| (B_\lambda B_\mu g_\alpha(\mu), \hat{g}_\beta(\bar{\lambda})) \|_{\alpha,\beta=1}^r =$$

$$= G(g(\mu), g(\mu)) P(\mu) G(\hat{g}(\bar{\mu}), g(\lambda)) P(\lambda) \hat{G}(\hat{g}(\bar{\lambda}), \hat{g}(\bar{\lambda})), \tag{15}$$

де $G(\cdot, \cdot)$ — також матриці Грама відповідних базисних векторів.

З іншого боку, підставимо (11) в (12):

$$S = \left\| \left( \sum_{k,m=1}^r (T_{\lambda\mu} g_\alpha(\mu), g_m(\lambda)) p_{mk}(\lambda) \hat{g}_k(\bar{\lambda}), \hat{g}_\beta(\bar{\lambda}) \right) \right\|_{\alpha\beta=1}^r =$$

$$= \| (T_{\lambda\mu} g_\alpha(\mu), g_\mu(\lambda)) \|_{\alpha\beta=1}^r P(\lambda) \hat{G}(\hat{g}(\bar{\lambda}), \hat{g}(\bar{\lambda})) =$$

$$= \| (g_\alpha(\mu), T_{\lambda\mu}^* g_m(\lambda)) \|_{\alpha\beta=1}^r P(\lambda) \hat{G}(\hat{g}(\bar{\lambda}), \hat{g}(\bar{\lambda})) =$$

$$= G(g(\mu), \hat{g}(\mu)) P(\lambda) \hat{G}(\hat{g}(\bar{\lambda}), \hat{g}(\bar{\lambda})), \tag{16}$$

де використано діаграму, а саме $T_{\lambda\mu}^* = \hat{T}_{\bar{\lambda}\bar{\mu}}$, $\hat{T}_{\bar{\lambda}\bar{\mu}} \hat{\mathfrak{N}}_\lambda = \hat{\mathfrak{N}}_\mu$, $\hat{T}_{\bar{\lambda}\bar{\mu}} \hat{g}_m(\lambda) = \hat{g}_m(\mu)$, $m = \overline{1, r}$. Підставляючи (14) і (15) в (13) та далі (13) і (16) в (12), отримуємо

$$G(g(\mu), \hat{g}(\mu)) P(\lambda) \hat{G}(\hat{g}(\bar{\lambda}), \hat{g}(\bar{\lambda})) = G(g(\mu), g(\mu)) P(\mu) \hat{G}(g(\bar{\lambda}), g(\bar{\lambda})) +$$

$$+ (\lambda - \mu) G(g(\mu), g(\mu)) P(\mu) G(\hat{g}(\bar{\mu}), g(\lambda)) P(\lambda) \hat{G}(\hat{g}(\bar{\lambda})).$$

Помноживши останню рівність на $\hat{G}^{-1}(\hat{g}(\bar{\lambda}), \hat{g}(\bar{\lambda}))$ справа та на $G^{-1}(g(\mu), g(\mu))$ зліва, отримаємо

$$G^{-1}(g(\mu), g(\mu)) G(g(\mu), \hat{g}(\mu)) P(\lambda) = P(\mu) + (\lambda - \mu) P(\mu) G(\hat{g}(\bar{\mu}), g(\lambda)) P(\lambda).$$

Помножимо останню рівність на $P^{-1}(\mu)$ зліва та на $P^{-1}(\lambda)$ справа і поміняємо місцями доданки. Отримаємо формулу (9). Теорему доведено.

***Зауваження 2.*** Якщо $\dot{N} = \hat{N}$, що відповідає випадку симетричного оператора, та $N = N^*$, що відповідає самоспряженому розширенню, то $\mathfrak{N}(\mu) = \hat{\mathfrak{N}}(\mu)$, тобто $g_k(\mu) \equiv \hat{g}_k(\mu)$. Тоді в (9) $G^{-1}(g(\mu), g(\mu)) G(g(\mu), \hat{g}(\mu)) \equiv I$ і формула (9) перетворюється у відому [10, 11]

$$P^{-1}(\mu) = P^{-1}(\lambda) + (\lambda - \mu) G(\hat{g}(\bar{\mu}), g(\lambda)).$$

***Зауваження* 3.** Можна сформулювати і довести теорему, аналогічну теоремі 2, у випадку, коли розглядаються довільні (не обов'язково нормальні) розширення передномального оператора.


1. *Горбачук М. Л., Горбачук В. І.* Теорія самоспряжених розширень симетричних операторів, цілі оператори і граничні задачі // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 1–2. – С. 55 – 62.
2. *Горбачук М. Л., Горбачук В. І.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка,.1984. – 284 с.
3. *Coddington E. A.* Normal extension of formally normal operators // Pacif. J. Math. – 1960. – **10**. – P. 1203 – 1209.
4 *Вишик М. И.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1952. – **1**. – С. 187 – 246.
5. *Лянце В. Э., Сторож О. Г.* Методы теории неограниченных операторов. – Киев: Наук. думка, 1983. – 212 с.
6. *Кужель А. В.* Аналог формулы М. Г. Крейна для резольвент несамосопряженных расширений эрмитова оператора // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1981. – Вып. 36. – С. 49 – 55.
7. *Kuzhel A. V., Kuzhel S. A.* Regular extensions of Hermitian operators. – Utrecht, The Netherlands, 1998. – 274 p.
8. *Дудкін М. Є.* Сингулярно збурені нормальні оператори // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 8. – С. 1045 – 1053.
9. *Кошманенко В. Д.* Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самосопряженных операторов – Киев: Наук. думка, 1993. – 176 с.
10. *Крейн М. Г.* Теория самосопряженных расширений положительных эрмитовых операторов и ее приложения // Мат сб. – 1947. – **20**, № 3. – С. 431 – 490.
11. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М: Наука, 1966. – 544 с.


Одержано 26.03.2001