УДК 517.5

В. Ф. Бабенко
(Днепропетр. нац. ун-т; Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк),
В. В. Бабенко (Днепропетр. нац. ун-т)

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ, МОНОТОННЫХ ПО ВКЛЮЧЕНИЮ

The best quadrature formula is found for the class of convex-valued functions defined on the interval [0, 1] and monotone with respect to an inclusion.

Знайдено найкращу квадратурну формулу на класі заданих на відрізку [0, 1] опуклозначних функцій, монотонних відносно включення.

Введение. Теория многозначных отображений активно развивается в течение последних десятилетий в связи с потребностями теории оптимизации, теории игр, математической экономики и других областей математики. Обзор достижений в этом направлении и дальнейшие ссылки можно найти в [1 – 3]. В последнее время интерес математиков вызывают задачи аппроксимации многозначных отображений (см., например, [4 – 8]). Важным направлением теории аппроксимации и численного анализа является теория квадратурных формул (см., например, [9]). Вместе с тем авторам неизвестны работы, касающиеся оптимизации приближенного интегрирования многозначных функций. Данная работа посвящена именно этой проблематике.

Существует много различных подходов к определению интегралов от многозначных функций (см. [10]). Одним из наиболее элементарных является подход Хукухары [11], который предложил рассматривать обобщение интеграла Римана для функций со значениями в пространстве $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ компактных выпуклых подмножеств пространства $\mathbb{R}^d$ (ниже для полноты изложения будут приведены определение и элементарные свойства этого интеграла).

Мы будем рассматривать задачу оптимизации приближенного вычисления интегралов в смысле Хукухары на классе монотонных по включению функций $f : [0,1] \to \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$, которые на концах отрезка [0, 1] принимают заданные значения: $f(0) = A$, $f(1) = B$. Полученные для этого класса результаты обобщают известные для числовых функций результаты Кифера [12].

Кратко опишем структуру статьи.

В первом пункте приведены необходимые определения и факты, касающиеся пространства компактных выпуклых множеств, во втором — необходимые определения и факты, касающиеся интегрирования многозначных (выпуклозначных) функций. В третьем пункте решается задача о наилучшей квадратурной формуле на классе монотонных (относительно включения) функций $f:[0,1]\to\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$.

1. Пространство выпуклых множеств в $\mathbb{R}^d$. Через $\mathcal{K}=\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ будем обозначать совокупность непустых компактных выпуклых подмножеств пространства $\mathbb{R}^d$. В совокупности $\mathcal{K}$ вводятся следующие операции.

Пусть A, $B\in\mathcal{K}$, $\alpha\ge 0$. Тогда

$$A+B\ =:\ \{x+y:\ x\in A,\ y\in B\},\quad \alpha A\ =:\ \{\alpha x:\ x\in A\}.$$

Множество $A+B$ называется суммой Минковского множеств A и B.

В исследованиях по аппроксимации выпуклых тел многогранниками используются различные метрики в $\mathcal{K}=\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ (см., например, [13]). Мы будем использовать метрику Хаусдорфа $\delta^H(A,B)$, которая определяется следующим образом:

$$\delta^H(A,B)\ =\ \max\left\{\sup_{x\in A}\inf_{y\in B}|x-y|,\ \sup_{x\in B}\inf_{y\in A}|x-y|\right\},$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^d$.

Опорной функцией выпуклого множества $A\in\mathcal{K}$ называется определенная на единичной сфере S^{d-1} пространства $\mathbb{R}^d$ функция

$$h_A(u)\ =\ \sup_{x\in A}\langle x,u\rangle,\qquad u\in S^{d-1}.$$

В терминах опорной функции метрику δ^H можно представить в виде

$$\delta^H(C,D)\ =\ \sup_{u\in S^{d-1}}\left|h_C(u)-h_D(u)\right|. \tag{1}$$

Отметим, что по отношению к метрике δ^H сумма Минковского и операция умножения на неотрицательные числа непрерывны, а метрическое пространство $\langle\mathcal{K},\delta^H\rangle$ является полным.

Для нас важными будут два следующих свойства метрики δ^H:

1) для любых A, B, C, $D\in\mathcal{K}$

$$\delta^H(A+B,\ C+D)\ \le\ \delta^H(A,C)+\delta^H(B,D); \tag{2}$$

2) для любых A, $B\in\mathcal{K}$ и любого $\alpha\ge 0$

$$\delta^H(\alpha A,\alpha B)\ =\ \alpha\delta^H(A,B). \tag{3}$$

Свойство (3) является очевидным. Проверим выполнение свойства (2). Для произвольных выпуклых множеств A, B, C, D, используя представление (1), получаем

$$\delta^H(A+B,\ C+D)\ =$$

$$=\ \max\left\{\sup_{u\in S^{d-1}}\big(h_{A+B}(u)-h_{C+D}(u)\big),\ \sup_{u\in S^{d-1}}\big(h_{C+D}(u)-h_{A+B}(u)\big)\right\}\ =$$

$$= \max\left\{ \sup_{u\in S^{d-1}} \big(h_A(u) - h_C(u) + h_B(u) - h_D(u) \big), \right.$$

$$\left. \sup_{u\in S^{d-1}} \big(h_C(u) - h_A(u) + h_D(u) - h_B(u) \big) \right\}.$$

Учитывая, что

$$\sup_{u\in S^{d-1}} \big(h_A(u) - h_C(u) + h_B(u) - h_D(u) \big) \le$$

$$\le \sup_{u\in S^{d-1}} \big(h_A(u) - h_C(u) \big) + \sup_{u\in S^{d-1}} \big(h_B(u) - h_D(u) \big)$$

и

$$\sup_{u\in S^{d-1}} \big(h_C(u) - h_A(u) + h_D(u) - h_B(u) \big) \le$$

$$\le \sup_{u\in S^{d-1}} \big(h_C(u) - h_A(u) \big) + \sup_{u\in S^{d-1}} \big(h_D(u) - h_B(u) \big),$$

находим

$$\delta^H(A+B,\, C+D) \le$$

$$\le \max\left\{ \sup_{u\in S^{d-1}} \big(h_A(u) - h_C(u) \big) + \sup_{u\in S^{d-1}} \big(h_B(u) - h_D(u) \big), \right.$$

$$\left. \sup_{u\in S^{d-1}} \big(h_C(u) - h_A(u) \big) + \sup_{u\in S^{d-1}} \big(h_D(u) - h_B(u) \big) \right\} \le$$

$$\le \max\left\{ \sup_{u\in S^{d-1}} \big(h_A(u) - h_C(u) \big),\ \sup_{u\in S^{d-1}} \big(h_C(u) - h_A(u) \big) \right\} +$$

$$+ \max\left\{ \sup_{u\in S^{d-1}} \big(h_B(u) - h_D(u) \big),\ \sup_{u\in S^{d-1}} \big(h_D(u) - h_B(u) \big) \right\} =$$

$$= \delta^H(A, C) + \delta^H(B, D).$$

В заключение пункта отметим следующее. Если мы сумму Минковского распространим на произвольное конечное число множеств A_k, $k = 1, \ldots, n$, положив

$$\sum_{k=1}^{n} A_k := \sum_{k=1}^{n-1} A_k + A_n,$$

то по индукции из свойства (2) метрики δ^H получим

$$\delta^H\left(\sum_{k=1}^{n} A_k, \sum_{k=1}^{n} B_k \right) \le \sum_{k=1}^{n} \delta^H(A_k, B_k). \tag{4}$$

2. Интегрирование многозначных функций. Напомним, что разбиением P отрезка $[a, b]$, $a < b$, называется конечная система точек $x_0, \ldots, x_n$ этого отрезка, такая, что $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Параметром разбиения P называется число

$$\lambda(P) \ := \ \max_{i = \overline{1, n}} \left| x_i - x_{i-1} \right|.$$

Если в каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения P выбрано по точке $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, то получаем разбиение (P, ξ) отрезка $[a, b]$ с отмеченными точками $\left(\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \right)$.

Пусть задана функция $f : [a, b] \to \mathcal{K}$. Каждому разбиению (P, ξ) с отмеченными точками поставим в соответствие интегральную сумму

$$\sigma\left(f; (P, \xi) \right) \ = \ \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \, ,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Определение. *Если существует элемент* $I \in \mathcal{K}$ *такой, что для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta > 0$ *такое, что для любого разбиения* (P, ξ) *с отмеченными точками, параметр которого* $\lambda(P) < \delta$, *имеет место соотношение*

$$\delta^H \left(I, \ \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \right) \ < \ \varepsilon,$$

то говорят, что функция $f : [a, b] \to \mathcal{K}$ *интегрируема на отрезке* $[a, b]$, *а элемент* I *называется ее интегралом. При этом пишут*

$$I \ = \ \int_a^b f(x) dx \, .$$

Совокупность всех интегрируемых функций $f : [a, b] \to \mathcal{K}$ будем обозначать через $\mathcal{R}\left([a, b], \mathcal{K} \right)$.

Аналогично случаю числовых функций устанавливаются следующие утверждения.

Утверждение 1. *Любая непрерывная на* $[a, b]$ *функция* $f : [a, b] \to \mathcal{K}$ *является интегрируемой на* $[a, b]$.

Утверждение 2. *Любая функция* $f : [a, b] \to \mathcal{K}$, *монотонная в том смысле, что*

$$a \le x_1 < x_2 \le b \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \subset f(x_2), \tag{5}$$

является интегрируемой на $[a, b]$.

Утверждение 3. *Если* f, g *принадлежат* $\mathcal{R}\left([a, b], \mathcal{K} \right)$, *то их линейная комбинация* $\alpha f + \beta g$ *с неотрицательными коэффициентами также интегрируема на* $[a, b]$, *причем*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx \;=\; \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx.$$

Утверждение 4. *Если* $a < b < c$ *и* $f \in \mathcal{R}\big([a,c],\,\mathcal{K}\big)$, *то* $f\,\big|_{[a,b]} \in \mathcal{R}\big([a,b],\,\mathcal{K}\big)$, $f\,\big|_{[b,c]} \in \mathcal{R}\big([b,c],\,\mathcal{K}\big)$ *и имеет место равенство*

$$\int_a^c f(x)\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Утверждение 5. *Если функция* f *монотонна на* $[a,b]$ *в смысле* (5), *то справедливы включения*

$$f(a)(b-a) \;\subset\; \int_a^b f(x)\,dx \;\subset\; f(b)(b-a).$$

Используя определение интеграла и свойство (4) метрики Хаусдорфа, нетрудно установить следующее утверждение.

Утверждение 6. *Если* $f,\ g$ *принадлежат* $\mathcal{R}\big([a,b],\,\mathcal{K}\big)$, *то*

$$\delta^H\left(\int_a^b f(x)\,dx,\ \int_a^b g(x)\,dx\right) \;\le\; \int_a^b \delta^H\big(f(x), g(x)\big)\,dx.$$

3. Оптимизация квадратурных формул на классах монотонных многозначных функций. Пусть $M_{A,B}$ $(A \subset B)$ — класс функций $f:[0;1] \to \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$, монотонных в смысле (5) и таких, что $f(0) = A$, $f(1) = B$, где A, B — заданные множества.

Рассмотрим задачу о наилучшей на классе $M_{A,B}$ квадратурной формуле вида

$$q(f) \;=\; C + \sum_{k=1}^{n-1} c_k f(x_k), \tag{6}$$

где $C \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$, $c_1,\ldots,c_{n-1} \ge 0$, $0 \le x_1 < \ldots < x_{n-1} \le 1$. Совокупность всех таких формул обозначим через Q. Задача формулируется следующим образом.

Положим

$$R_{n-1}(M_{A,B}) \;=\; \inf_{q\in Q}\ \sup_{f\in M_{A,B}} \delta^H\left(\int_0^1 f(x)dx,\ q(f)\right). \tag{7}$$

Требуется найти величину (7) и квадратурную формулу вида (6), реализующую точную нижнюю грань в правой части (7). Именно такая формула называется наилучшей на классе $M_{A,B}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Среди всех квадратурных формул вида* (6) *наилучшей на классе* $M_{A,B}$ *является формула*

$$q_{n-1}(f) \;=\; \frac{A+B}{2n} \;+\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

при этом

$$R_{n-1}(M_{A,B}) \;=\; \sup_{f \in M_{A,B}} \delta^H\left(\int_0^1 f(x)dx,\ q_{n-1}(f)\right) \;=\; \frac{1}{2n}\,\delta^H(A,B).$$

Доказательство. Учитывая аддитивность интеграла (утверждение 4), монотонность функции f и монотонность интеграла (утверждение 5), имеем

$$\int_0^1 f(x)dx \;=\; \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)dx \;\subset\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \;+\; \frac{B}{n}.$$

Аналогично

$$\frac{A}{n} \;+\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \;\subset\; \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)dx \;=\; \int_0^1 f(x)dx\,.$$

Таким образом,

$$\frac{A}{n} \;+\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \;\subset\; \int_0^1 f(x)dx \;\subset\; \frac{B}{n} \;+\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right). \tag{8}$$

Имеют место следующие включения:

$$\frac{A}{n} \;+\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \;\subset\; \frac{A+B}{2n} \;+\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \;\subset\; \frac{B}{n} \;+\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right). \tag{9}$$

Оценим

$$\delta^H\left(\int_0^1 f(x)dx,\ \frac{A+B}{2n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

Докажем, что если

$$X \subset Y \subset Z, \tag{10}$$

то

$$\delta^H\left(Y,\ \frac{X+Z}{2}\right) \;\le\; \frac{1}{2}\,\delta^H(X,Z). \tag{11}$$

Отсюда с учетом (8) и (9) получим

$$\delta^H\left(\int_0^1 f(x)dx,\ \frac{A+B}{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \;\le\; \frac{1}{2n}\,\delta^H(A,B). \tag{12}$$

Итак, докажем (11).

Для $X, Y \in \mathcal{K}$ будем использовать обозначение

$$e(X,Y) = \sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}|x-y|.$$

Рассмотрим

$$\delta^H\left(Y,\ \frac{X+Z}{2}\right) = \max\left(e\left(Y,\ \frac{X+Z}{2}\right),\ e\left(\frac{X+Z}{2},\ Y\right)\right).$$

В силу (10) и свойства (2) метрики Хаусдорфа имеем

$$e\left(Y,\ \frac{X+Z}{2}\right) \le e\left(Z,\ \frac{X+Z}{2}\right) \le \delta^H\left(Z,\ \frac{X+Z}{2}\right) \le \frac{1}{2}\delta^H(X,Z).$$

Далее

$$e\left(\frac{X+Z}{2},\ Y\right) \le e\left(\frac{X+Z}{2},\ X\right) \le \delta^H\left(\frac{X+Z}{2},\ X\right) \le \frac{1}{2}\delta^H(X,Z).$$

Таким образом,

$$\delta^H\left(Y,\ \frac{X+Z}{2}\right) = \max\left(e\left(Y,\ \frac{X+Z}{2}\right), e\left(\frac{X+Z}{2},\ Y\right)\right) \le \frac{1}{2}\delta^H(X,Z).$$

Соотношение (11), а с ним и соотношение (12) доказаны.

Теперь покажем, что для любой квадратурной формулы вида (6)

$$\sup_{f\in M_{A,B}}\delta^H\left(\int_0^1 f(x)dx,\ q(f)\right) \ge \frac{1}{2n}\delta^H(A,B).$$

Отсюда и будет следовать утверждение теоремы.

Для произвольного набора точек $0 = x_0 \le x_1 < \ldots < x_{n-1} \le x_n = 1$ найдется $k = 0,1,\ldots,n-1$ такое, что $x_{k+1} - x_k \ge 1/n$. Положим

$$f_1(x) = \begin{cases} A, & x \le x_k, \\ B, & x > x_k, \end{cases}$$

и

$$f_2(x) = \begin{cases} A, & x < x_{k+1}, \\ B, & x \ge x_{k+1}. \end{cases}$$

Тогда

$$\int_0^1 f_1(x)dx = Ax_k + B(1-x_k),$$

$$\int_0^1 f_2(x)dx = Ax_{k+1} + B(1-x_{k+1})$$

и

$$q(f_1) = q(f_2).$$

Следовательно,

$$\sup_{f \in M_{A,B}} \delta^H \left(\int_0^1 f(x)dx,\ q(f) \right) \geq$$

$$\geq \max \left\{ \delta^H \left(\int_0^1 f_1(x)dx,\ q(f_1) \right),\ \delta^H \left(\int_0^1 f_2(x)dx,\ q(f_2) \right) \right\} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \left\{ \delta^H \left(\int_0^1 f_1(x)dx,\ q(f_1) \right) + \delta^H \left(\int_0^1 f_2(x)dx,\ q(f_2) \right) \right\} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \delta^H \left(\int_0^1 f_1(x)dx,\ \int_0^1 f_2(x)dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \delta^H \big(Ax_k + B(1 - x_k),\ Ax_{k+1} + B(1 - x_{k+1}) \big).$$

Рассмотрим $e(Ax_k + B(1 - x_k),\ Ax_{k+1} + B(1 - x_{k+1}))$. Используя теорему двойственности (см., например, [14], § 2.3), имеем

$$e(Ax_k + B(1 - x_k),\ Ax_{k+1} + B(1 - x_{k+1})) =$$

$$= \sup_{z \in Ax_k + B(1 - x_k)} \sup_{\|f\| \leq 1} \left\{ f(z) - \sup_{\omega \in Ax_{k+1} + B(1 - x_{k+1})} f(\omega) \right\} =$$

$$= \sup_{\|f\| \leq 1} \left\{ \sup_{x \in A,\, y \in B} \big(x_k f(x) + (1 - x_k) f(y)\big) - \sup_{u \in A,\, v \in B} \big(x_{k+1} f(u) + (1 - x_{k+1}) f(v)\big) \right\} =$$

$$= \sup_{\|f\| \leq 1} \big(x_k h_A(f) + (1 - x_k) h_B(f) - x_{k+1} h_A(f) - (1 - x_{k+1}) h_B(f) \big) =$$

$$= \sup_{\|f\| \leq 1} \big((x_k - x_{k+1}) h_A(f) + (x_{k+1} - x_k) h_B(f) \big) =$$

$$= (x_{k+1} - x_k) \sup_{\|f\| \leq 1} \big(h_B(f) - h_A(f) \big) = (x_{k+1} - x_k)\, e(B, A).$$

Аналогично

$$e\big(Ax_{k+1} + B(1 - x_{k+1}),\ Ax_k + B(1 - x_k) \big) =$$

$$= \sup_{z \in Ax_{k+1} + B(1 - x_{k+1})} \sup_{\|f\| \leq 1} \left\{ f(z) - \sup_{\omega \in Ax_k + B(1 - x_k)} f(\omega) \right\} =$$

$$= \sup_{\|f\| \leq 1} \left\{ \sup_{x \in A,\, y \in B} \big(x_{k+1} f(x) + (1 - x_{k+1}) f(y)\big) - \sup_{u \in A,\, v \in B} \big(x_k f(u) + (1 - x_k) f(v)\big) \right\} =$$

$$= \sup_{\|f\| \leq 1} \big(x_{k+1} h_A(f) + (1 - x_{k+1}) h_B(f) - x_k h_A(f) - (1 - x_k) h_B(f) \big) =$$

$$= \sup_{\|f\|\le 1} \big((x_{k+1} - x_k) h_A(f) - (x_{k+1} - x_k) h_B(f) \big) =$$

$$= (x_{k+1} - x_k) \sup_{\|f\|\le 1} \big(h_A(f) - h_B(f) \big) = (x_{k+1} - x_k)\, e(A, B).$$

Поскольку B шире A, то $e(A, B) = 0$.

Таким образом, для любой квадратурной формулы $q \in Q$

$$\sup_{f \in M_{A,B}} \delta^H \left(\int_0^1 f(x)dx,\ q(f) \right) \ge \frac{1}{2}(x_{k+1} - x_k)\,\delta^H(A, B) \ge \frac{1}{2n}\delta^H(A, B).$$

Теорема доказана.

1. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Многозначные отображения // Итоги науки и техники. Мат. анализ. – 1982. – **19**. – С. 127 – 230.
2. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* О новых результатах в теории многозначных отображений. I. Топологические характеристики и разрешимость операторных соотношений // Там же. – 1987. – **25**. – С. 123 – 197.
3. *Гельман Б. Д., Обуховский В. В.* О новых результатах в теории многозначных отображений. II. Анализ и приложения // Там же. – 1987. – **25**. – С. 107 – 159.
4. *Vitale R. A.* Approximations of convex set-valued functions // J. Approxim. Theory. – 1979. – **26**. – P. 301 – 316.
5. *Zvi Artstein.* Piecewise linear approximations of set-valued maps // Ibid. – 1989. – **56**. – P. 41 – 47.
6. *Nira Dyn, Alona Mokhov.* Approximations of set-valued functions based on the metric average // Rend. mat. Ser. VII. – 2006. – **26**. – P. 249 – 266.
7. *Nira Dyn, Elza Farkhi.* Approximations of set-valued functions with compact images – an overview, approximation and probability. – Warszawa: Banach Center Publ., 2006. – Vol. 72. – P. 1 – 14.
8. *Nira Dyn, Elza Farkhi, Alona Mokhov.* Approximations of set-valued functions by metric linear operators // Constr. Approxim. – 2007. – **25**. – P. 193 – 209.
9. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы. – 4-е изд., доп. с добавлением Н. П. Корнейчука. – М.: Наука, 1988. – 256 с.
10. *Zvi Artstein, John A. Burns.* Integration of compact set-valued functions // Pacif. J. Math. – 1975. – **58**, № 2. – P. 297 – 306.
11. *Hukuhara M.* Integration des applications mesurables dont la Valeur est un compact convexe // Funkc. ekvacioj. – 1967. – **10**. – P. 205 – 223.
12. *Kiefer J.* Optimum sequential search and approximation methods under minimum regularity assumptions // J. Soc. Indust. Appl. Math. – 1957. – **5**, № 3. – P. 105 – 136.
13. *Gruber P. M.* Aspects of approximation of convex bodies // Handb. Convex Geometry / Eds P. M. Gruber, J. M. Wills. – 1993. – P. 319 – 345.
14. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.

Получено 06.08.10