УДК 517.968.72

А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян (Ин-т математики НАН Армении, Ереван)

О ПОСТРОЕНИИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА УРЫСОНА НА ПОЛУОСИ

We investigate a class of Urysohn-type nonlinear integral equations with noncompact operator. We assume that Wiener – Hopf – Hankel-type linear integral operator is local minorant for initial Urysohn operator. We prove alternative theorem on the existence of positive solutions and investigate asymptotic behavior of obtained solutions at infinity.

Досліджено один клас нелінійних інтегральних рівнянь Урисона з некомпактним оператором. Припускається, що лінійний інтегральний оператор типу Вінера – Хопфа – Ханкеля є локальним мінорантом для початкового оператора Урисона. Доведено альтернативну теорему про існування додатних розв'язків та досліджено асимптотичну поведінку отриманих розв'язків на нескінченності.

1. Введение, постановка задачи и формулировка основных теорем. Настоящая работа посвящена исследованию положительных решений для нелинейного интегрального уравнения Урысона

$$\varphi(x) = \int_0^\infty K(x,t,\varphi(t))dt, \quad x \in (0,+\infty), \tag{1.1}$$

где $\varphi(x)$ — искомая вещественная функция уравнения (1.1), а $K(x,t,\tau)$ — определенная на множестве $(0,+\infty)\times(0,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$ вещественная функция.

Исследованию уравнения Урысона посвящено большое количество работ (см., например, [1 – 4]). В этих работах разработан ряд эффективных методов решения нелинейных уравнений, получены теоремы существования положительных решений. Например, в работах [3, 4] при предположениях $K(x,t,0)=0$, монотонности по третьему аргументу, компактности соответствующего нелинейного оператора и некоторых условиях гладкости на функцию K доказаны довольно тонкие теоремы существования положительного решения уравнения Урысона.

Как правило, во всех указанных работах предполагалось, что пределы интегрирования являются конечными, а оператор Урысона удовлетворяет условию полной непрерывности (см. [1]).

В настоящей работе, не предполагая полной непрерывности оператора Урысона и его линейной миноранты и накладывая некоторые условия на функцию $K(x,t,\tau)$, доказываем теоремы существования нетривиального неотрицательного решения уравнения (1.1).

Пусть E — одно из следующих банаховых пространств: $L_p(0,+\infty)$, $p\geq 1$, $M(0,+\infty)$, $C_M(0,+\infty)$, $C_0(0,+\infty)$.

Рассмотрим интегральные операторы Винера – Хопфа и Ганкеля

$$\begin{aligned}(\mathcal{K}f)(x) &= \int_0^\infty \overset{\circ}{K}(x-t)f(t)dt,\\ (\tilde{\mathcal{K}}f)(x) &= \int_0^\infty \overset{\circ}{K}(x+t)f(t)dt,\end{aligned} \qquad x\in(0,+\infty), \quad f\in E,$$

где $\overset{\circ}{K}(x) \geq 0$ — измеримая функция на $(-\infty, +\infty)$, причем

$$\overset{\circ}{K}(-x) = \overset{\circ}{K}(x), \quad x \in (0, +\infty), \quad \overset{\circ}{K}(x) \downarrow \quad \text{по} \quad x \quad \text{на} \quad (0, +\infty), \tag{1.2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overset{\circ}{K}(\tau) d\tau = 1, \qquad \nu_j(\overset{\circ}{K}) \equiv \int_0^\infty x^j \, \overset{\circ}{K}(x) dx < +\infty, \quad j = 0, 1, 2, 3. \tag{1.3}$$

Как известно [5], оператор Винера – Хопфа не является вполне непрерывным в E. Операторы Ганкеля, в отличие от операторов Винера – Хопфа, являются вполне непрерывными в банаховых пространствах E.

В работе [6] показано, что при выполнении условий (1.2), (1.3) оператор $I - \mathcal{K} + \tilde{\mathcal{K}}$ допускает факторизацию

$$I - \mathcal{K} + \tilde{\mathcal{K}} = (I - V_-)(I + \tilde{W})(I - V_+),$$

где I — единичный оператор, V_+ и V_- — соответственно верхние и нижние вольтерровы операторы:

$$(V_+ f)(x) = \int_0^x v_+(x - t) f(t) dt, \quad (V_- f)(x) = \int_x^\infty v_-(t - x) f(t) dt,$$

$$f \in E, \quad 0 \leq v_\pm \in L_1(0, +\infty), \quad \gamma_\pm = \int_0^\infty v_\pm(\tau) d\tau = 1,$$

$\tilde{W}$ — оператор типа Ганкеля с положительным ядром $W(x)$:

$$(\tilde{W} f)(x) = \int_0^\infty W(x + t) f(t) dt, \quad f \in E,$$

$$0 \leq W \in L_1(0, +\infty), \qquad \nu_1(W) \equiv \int_0^\infty x W(x) dx < +\infty.$$

Рассмотрим следующие возможности для вполне непрерывного оператора $\tilde{W}$:

a) $\lambda = -1$ не является собственным значением оператора $\tilde{W}$,

b) $\lambda = -1$ является собственным значением для $\tilde{W}$.

В зависимости от случая a) или b) относительно функции $K(x, t, \tau)$ сделаем следующие предположения.

***Случай* a):** Пусть существует положительное число $\delta > 0$ такое, что

$$\frac{1}{\frac{1}{m_1} x + c} \int_0^\infty K\left(x, t, \delta\left(\frac{1}{m_1} t + c\right)\right) dt \leq \delta, \tag{1.4}$$

где

$$m_1 \equiv \int_0^\infty x v_+(x) dx, \qquad c = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |Q(x)|, \tag{1.5}$$

а $\tilde{\varphi}(x) = \dfrac{1}{m_1}x + Q(x)$, $Q \in M(0,+\infty)$, — нетривиальное решение однородного уравнения

$$\tilde{\varphi}(x) = \int\limits_0^\infty (\overset{\circ}{K}(x-t) - \overset{\circ}{K}(x+t))\tilde{\varphi}(t)dt, \quad x \in (0,+\infty), \tag{1.6}$$

$K \in \mathrm{Carat}_\tau(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$, т. е. функция K удовлетворяет условию Каратеодори по третьему аргументу [7]. Последнее означает, что при каждом фиксированном $\tau \in \mathbb{R}$ $K(x,t,\tau)$ измерима по $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ и почти при всех $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ непрерывна по τ на $\mathbb{R}$.

Для каждой измеримой функции $0 \le \varphi(x) \le \delta\left(\dfrac{1}{m_1}x + c\right)$ функции $K(x,t,\varphi(t))$ и $\int_0^\infty K(x,t,\varphi(t))dt$ измеримы соответственно по t и x.

Существует измеримая функция $\mu(x)$:

$$\begin{gathered} 0 \le \mu(x) \le 1, \quad x \in (0,+\infty), \quad \mu(x)\uparrow \quad \text{по} \quad x \quad \text{на} \quad (0,+\infty), \\ (1-\mu(x))x^j \in L_1(0,+\infty), \quad j = 0,1, \end{gathered} \tag{1.7}$$

такая, что

$$K(x,t,\tau) \ge \mu(x)(\overset{\circ}{K}(x-t) - \overset{\circ}{K}(x+t))\tau \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \tag{1.8}$$

$$0 \le \tau \le \delta\left(\frac{1}{m_1}t + c\right), \tag{1.9}$$

при каждом фиксированном $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

$$K(x,t,\tau)\uparrow \text{по} \quad \tau \quad \text{на} \quad \left[0, \delta\left(\frac{1}{m_1}t + c\right)\right]. \tag{1.10}$$

***Случай* б):** Пусть существует число $\eta > 0$ такое, что

$$\int\limits_0^\infty K(x,t,\eta)dt \le \eta, \quad x \in (0,+\infty), \tag{1.11}$$

$K \in \mathrm{Carat}_\tau(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times [0,\eta])$ и для каждой измеримой функции $0 \le \varphi(x) \le \eta$

$$\text{функции} \quad K(x,t,\varphi(t)) \quad \text{и} \quad \int\limits_0^\infty K(x,t,\varphi(t))dt \quad \text{измеримы} \tag{1.12}$$

соответственно по t и x,

$$K(x,t,\tau) \ge \mu(x)(\overset{\circ}{K}(x-t) - \overset{\circ}{K}(x+t))\tau, \quad (x,t,\tau) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times [0,\eta], \tag{1.13}$$

$$K(x,t,\tau)\uparrow \quad \text{по} \quad \tau \quad \text{на} \quad [0,\eta] \quad \text{при каждом фиксированном} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+. \tag{1.14}$$

Отметим, что свойства решения $\tilde{\varphi}(x)$ однородного уравнения (1.6) здесь не предполагаются, а получаются в ходе доказательства одного из основных результатов.

В статье доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть функция* $K(x,t,\tau)$ *удовлетворяет условиям* (1.4)–(1.10) *для случай* a). *Тогда, если* $\lambda = -1$ *не является собственным значением для оператора* $\tilde{W}$, *уравнение* (1.1) *имеет нетривиальное и неотрицательное решение* $\varphi(x)$ *с асимптотикой* $\varphi(x) \sim \dfrac{\delta}{m_1} x$, $x \to \infty$.

Теорема 2. *Пусть функция* $K(x,t,\tau)$ *удовлетворяет условиям* (1.11)–(1.14). *Тогда, если* $\lambda = -1$ *является собственным значением для оператора* $\tilde{W}$, *уравнение* (1.1) *имеет ненулевое, неотрицательное и ограниченное решение* $\varphi(x)$ *с пределом* $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \eta$.

Теоремы 1 и 2 доказываются согласно следующей схеме.

1. Сначала рассматривается линейное однородное интегральное уравнение с суммарно разностным ядром

$$S(x) = \mu(x) \int\limits_0^\infty [\overset{\circ}{K}(x-t) - \overset{\circ}{K}(x+t)] S(t)dt \tag{1.15}$$

относительно искомой функции $S(x)$ и для этого уравнения с использованием некоторых известных результатов из теории интегральных уравнений типа свертки доказывается существование ненулевого и неотрицательного решения, а также устанавливаются дополнительные свойства построенного решения.

2. Оказывается, что в зависимости от того, является $\lambda \equiv -1$ собственным значением для оператора $\tilde{W}$ или нет, решение уравнения (1.15) может изменять свое асимптотическое поведение в бесконечности.

3. В зависимости от поведения решения уравнения (1.15) с помощью различных специальных последовательных приближений строится решение исходного уравнения (1.1).

2. Вспомогательные факты. Рассмотрим уравнение (1.15) относительно искомой функции $S(x)$.

Из результатов работ [8, 9] следует, что:

a) если $\lambda = -1$ не является собственным значением для оператора $\tilde{W}$, то уравнение (1.15) имеет ненулевое решение $S(x)$, причем

$$S(x) = O(x) \quad \text{при} \quad x \to \infty \quad \text{и} \quad |S(x)| \le \frac{1}{m_1} x + |Q(x)|, \tag{2.1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|S(x)|}{x/m_1 + c} = 1, \qquad c = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} |Q(x)|;$$

b) если же $\lambda = -1$ является собственным значением для $\tilde{W}$, то уравнение (1.15) имеет ненулевое и ограниченное решение $S(x)$.

Ниже докажем, что уравнение (1.15) в обоих случаях имеет ненулевое, неотрицательное и монотонно возрастающее решение $S^*(x) \ge |S(x)|$, причем в случае a) $S^*(x) = O(x)$, $x \to \infty$, $\lim_{x\to\infty} \dfrac{S^*(x)}{x/m_1 + c} = 1$, а в случае b) $S^*(x) = O(1)$, $x \to \infty$, $\lim_{x\to\infty} S^*(x) < +\infty$.

Сначала рассмотрим подробно случай a).

Введем следующие итерации для (1.15):

$$
\begin{gathered}
S^{(n+1)}(x)=\mu(x)\int\limits_0^\infty\Big[\overset{\circ}{K}(x-t)-\overset{\circ}{K}(x+t)\Big]S^{(n)}(t)dt,\\
S^{(0)}(x)\equiv\frac{1}{m_1}x+c,\quad n=0,1,2,\ldots,\quad x>0.
\end{gathered}\tag{2.2}
$$

Убедимся, что последовательность функций $\left\{S^{(n)}(x)\right\}_0^\infty$ монотонно убывает по $n.$

Сначала заметим, что $\overset{\circ}{K}(x-t)\geq\overset{\circ}{K}(x+t)$, $(x,t)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$. Следовательно, с учетом (1.2), (1.3) имеем

$$
S^{(1)}(x)=\mu(x)\int\limits_0^\infty\Big[\overset{\circ}{K}(x-t)-\overset{\circ}{K}(x+t)\Big]\left(\frac{1}{m_1}t+c\right)dt\leq
$$

$$
\leq\int\limits_{-\infty}^{x}\overset{\circ}{K}(\tau)\left(\frac{1}{m_1}(x-\tau)+c\right)d\tau-\int\limits_x^\infty\overset{\circ}{K}(\tau)\left(\frac{1}{m_1}(\tau-x)+c\right)d\tau=
$$

$$
=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\overset{\circ}{K}(\tau)\left(\frac{1}{m_1}(x-\tau)+c\right)d\tau-\int\limits_x^\infty\overset{\circ}{K}(\tau)\left(\frac{1}{m_1}(x-\tau)+c\right)d\tau-
$$

$$
-\int\limits_x^\infty\overset{\circ}{K}(\tau)\left(\frac{1}{m_1}(\tau-x)+c\right)d\tau=
$$

$$
=\frac{1}{m_1}x+c-2c\int\limits_x^\infty\overset{\circ}{K}(\tau)d\tau\leq\frac{1}{m_1}x+c=S^{(0)}(x).
$$

Затем, предполагая $S^{(n)}(x)\leq S^{(n-1)}(x)$, из (2.2) легко получаем $S^{(n+1)}(x)\leq\leq S^{(n)}(x)$.

Итак, монотонность последовательности $\{S^{(n)}(x)\}_0^\infty$ установлена. Теперь докажем следующее неравенство снизу для всех $n=0,1,2,\ldots:$

$$
S^{(n)}(x)\geq|S(x)|.\tag{2.3}
$$

В случае $n=0$ неравенство (2.3) непосредственно следует из (2.1). Предположим, что неравенство (2.3) выполняется при некотором $n\in\mathbb{N}$, и докажем его при $n+1$. Из (2.2) с учетом неравенства $\overset{\circ}{K}(x-t)\geq\overset{\circ}{K}(x+t)$, $(x,t)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$, имеем

$$
S^{(n+1)}(x)\geq\mu(x)\int\limits_0^\infty\Big[\overset{\circ}{K}(x-t)-\overset{\circ}{K}(x+t)\Big]|S(t)|dt\geq
$$

$$
\geq\left|\mu(x)\int\limits_0^\infty\Big[\overset{\circ}{K}(x-t)-\overset{\circ}{K}(x+t)\Big]S(t)dt\right|=|S(x)|.
$$

Таким образом, учитывая неравенство (2.3) и монотонность последовательности $\{S^{(n)}(x)\}_0^\infty$ по n, можем утверждать, что

$$
\lim_{n\to\infty}S^{(n)}(x)=S^*(x)\geq|S(x)|,
$$

причем предельная функция по теореме Б. Леви (см. [10]) удовлетворяет уравнению (1.15). Из (2.2) следует также, что $S^*(x) \leq \dfrac{1}{m_1}x + c$. Поскольку $\dfrac{|S(x)|}{x/m_1 + c} \to$ $\to 1$ при $x \to \infty$ из двойного неравенства непосредственно следует, что $\lim_{x\to\infty} \dfrac{S^*(x)}{x/m_1 + c} = 1$.

Теперь докажем, что $S^*(x) \uparrow$ по x на $(0, +\infty)$. С этой целью итерации (2.2) запишем в виде

$$S^{(n+1)}(x) = \mu(x)\left(\int\limits_{-\infty}^{x} \overset{\circ}{K}(\tau)S^{(n)}(x-\tau)d\tau - \int\limits_{0}^{\infty} \overset{\circ}{K}(x+t)S^{(n)}(t)dt\right),$$
$$S^{(0)}(x) \equiv \frac{1}{m_1}x + c, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x > 0. \tag{2.4}$$

Используя монотонность функций μ и K, по индукции легко можно проверить, что

$$S^{(n)}(x) \uparrow \quad \text{по} \quad x \quad \text{на} \quad (0, +\infty), \quad n = 0, 1, \ldots .$$

Следовательно, $S^*(x) \uparrow$ по x на $(0, +\infty)$.

Итак, доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (1.2), (1.3) *и* (1.7). *Тогда, если* $\lambda = -1$ *не является собственным значением оператора* $\tilde{W}$, *уравнение* (1.15) *имеет ненулевое, неотрицательное и монотонно возрастающее решение* $S^*(x)$, *причем* $S^*(x) \leq$ $\leq \dfrac{1}{m_1}x + c$ *и* $S^*(x) \sim \dfrac{1}{m_1}x$ *при* $x \to \infty$.

Рассматривая следующие итерации для случая б):

$$S^{(n+1)}(x) = \mu(x)\int\limits_{0}^{\infty}\Big[\overset{\circ}{K}(x-t) - \overset{\circ}{K}(x+t)\Big]S^{(n)}(t)dt,$$
$$S^{(0)}(x) \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}^+}|S(x)|, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x > 0, \tag{2.5}$$

аналогично доказываем следующую лемму.

Лемма 2. *Предположим, что выполнены условия* (1.2), (1.3) *и* (1.7). *Тогда, если* $\lambda = -1$ *является собственным значением для оператора* $\tilde{W}$, *уравнение* (1.15) *имеет ненулевое, неотрицательное, монотонно возрастающее и ограниченное решение* $S^*(x) \geq |S(x)|$.

3. Доказательство основных результатов и примеры функции $K(x,t,\tau)$. Рассмотрим случай а). Введем специальные итерации

$$\varphi^{(n+1)}(x) = \int\limits_{0}^{\infty} K(x, t, \varphi^{(n)}(t))dt,$$
$$\varphi^{(0)}(x) \equiv \delta\left(\frac{1}{m_1}x + c\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x > 0. \tag{3.1}$$

Сначала по индукции докажем, что

$$\delta\left(\frac{1}{m_1}x + c\right) \geq \varphi^{(n)}(x) \geq \delta S^*(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{3.2}$$

В случае $n = 0$ неравенство (3.2) непосредственно следует из леммы 1. Предположив выполнение неравенства для $n = p \in \mathbb{N}$ и докажем его для $n = p + 1$. В силу условий (1.4), (1.8), (1.9) и с учетом (1.10) из (3.1) получим

$$\varphi^{(p+1)}(x) \geq \int\limits_0^\infty K(x, t, \delta S^*(t))dt \geq$$

$$\geq \mu(x)\delta \int\limits_0^\infty \left[\overset{\circ}{K}(x-t) - \overset{\circ}{K}(x+t)\right] S^*(t)\,dt = \delta S^*(x),$$

$$\varphi^{(p+1)}(x) \leq \int\limits_0^\infty K\left(x, t, \delta\left(\frac{1}{m_1}t + c\right)\right) dt \leq \delta \frac{1}{m_1}x + c.$$

Следовательно, неравенство (3.2) доказано. Докажем теперь, что $\varphi^{(n)}(x) \downarrow$ по n. Неравенство $\varphi^{(1)}(x) \leq \varphi^{(0)}(x)$ непосредственно следует из (3.2). Предполагая, что $\varphi^{(n)}(x) \leq \varphi^{(n-1)}(x)$, и учитывая (1.10), (3.2), из (3.1) получаем $\varphi^{(n+1)}(x) \leq$ $\leq \varphi^{(n)}(x)$. Таким образом, последовательность функций $\{\varphi^{(n)}(x)\}_0^\infty$ имеет точечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^{(n)}(x) = \varphi(x) \geq \delta S^*(x),$$

причем предельная функция из условия $K \in \mathrm{Carat}_\tau(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ с учетом теоремы Б. Леви удовлетворяет уравнению (1.1). Из (3.2) следует также двойная оценка

$$\delta S^*(x) \leq \varphi(x) \leq \delta\left(\frac{1}{m_1}x + c\right), \quad x > 0.$$

Поскольку $\lim_{x\to\infty} \dfrac{S^*(x)}{x/m_1 + c} = 1$, то $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x/m_1 + c} = 1$.

Таким образом, теорема 1 доказана.

Рассматривая для случая b) итерации

$$\varphi^{(n+1)}(x) = \int\limits_0^\infty K(x, t, \varphi^{(n)}(t))dt, \quad \varphi^{(0)}(x) \equiv \eta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x > 0,$$

аналогичным образом по индукции доказываем следующие факты:

$$\varphi^{(n)}(x) \downarrow \quad \text{по} \quad n, \qquad \varphi^{(n)}(x) \geq \frac{S^*(x)}{\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} |S^*(x)|}\eta.$$

Отсюда следует существование предельной функции $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi^{(n)}(x)$, которая удовлетворяет уравнению (1.1) и двойным оценкам

$$\frac{S^*(x)}{\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} S^*(x)}\eta \leq \varphi(x) \leq \eta, \quad x \in (0, +\infty). \tag{3.3}$$

Поскольку $S^*(x) \uparrow$ по x (см. лемму 2), из (3.3) следует существование предела $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \eta$. Тем самым теорема 2 также доказана.

В заключение работы приведем несколько примеров для функции $K(x, t, \tau)$ в случаях a) и b).

Для случая a):

$a_1)$ $K(x,t,\tau) = \mu(x)\Big[\overset{\circ}{K}(x-t) - \overset{\circ}{K}(x+t)\Big]U(t,\tau)$,

где $U(t,\tau)$ — определенная на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ измеримая функция, причем предполагается, что существует число $\delta > 0$ такое, что:

$U(t,\tau) \geq \tau$, $0 \leq \tau \leq \delta\left(\dfrac{1}{m_1}t + c\right)$, $t > 0$,

$U(t,\tau) \uparrow$ по τ на $\left[0, \delta\left(\dfrac{1}{m_1}t + c\right)\right]$ при каждом фиксированном $t > 0$,

$U \in \mathrm{Carat}_\tau(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ по аргументу τ,

$U\left(t, \delta\left(\dfrac{1}{m_1}t + c\right)\right) = \delta\left(\dfrac{1}{m_1}t + c\right)$.

В качестве $U(t,\tau)$ можно рассматривать следующие функции:

$U(t,\tau) = \sqrt{\delta\left(\dfrac{1}{m_1}t + c\right)\tau}$,

$U(t,\tau) = \sqrt{\delta\left(\dfrac{1}{m_1}t + c\right)\tau e^{\frac{\tau}{\delta((1/m_1)t+c)}-1}}$,

$U(t,\tau) = \tau + \dfrac{1}{2\delta\left((1/m_1)t + c\right)}\left(\tau - \delta\left(\dfrac{1}{m_1}t + c\right)\right)^2(1 - e^{-\tau})$.

$a_2)$ $K(x,t,\tau) = R(x,t,\tau)(\overset{\circ}{K}(x-t) - \overset{\circ}{K}(x+t))U(t,\tau)$,

где $R(x,t,\tau)$ — определенная на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ измеримая функция, причем предполагается, что существует число $\delta > 0$ такое, что:

$R(x,t,\tau)$ $\uparrow$ по τ на $\left[0, \delta\left(\dfrac{1}{m_1}t + c\right)\right]$ при каждом фиксированном $(x,t) \in \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$,

$\mu(x) \leq R(x,t,\tau) \leq 1$, $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $\tau \in \left[0, \delta\left(\dfrac{1}{m_1}t + c\right)\right]$,

$R \in \mathrm{Carat}_\tau(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ по аргументу τ.

Например, свойствами R обладает функция

$$R(x,t,\tau) = \frac{1-\mu(x)}{2}N(t,\tau) + \frac{1+\mu(x)}{2},$$

где

$N(t,\tau) \uparrow$ по τ на $\left[0, \delta\left(\dfrac{1}{m_1}t + c\right)\right]$ при каждом фиксированном $t > 0$,

$0 \leq N(t,\tau) \leq 1$, $t > 0$, $\tau \in \left[0, \delta\left(\dfrac{1}{m_1}t + c\right)\right]$,

$N \in \mathrm{Carat}_\tau(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ по аргументу τ.

Для случая b):

$b_1)$ $K(x,t,\tau) = \mu(x)\Big[\overset{\circ}{K}(x-t) - \overset{\circ}{K}(x+t)\Big]G(\tau)$,

где $G(\tau)$ — определенная на $\mathbb{R}$ измеримая функция, причем существует число $\eta > 0$ такое, что:

$G \in C[0,\eta]$,

$G \uparrow$ по τ на $[0,\eta]$,

$G(\tau) \geq \tau$, $\tau \in [0,\eta]$,

$G(\eta) = \eta$;

в качестве G выберем следующие примеры:
$G(\tau) = \eta e^{\tau/\eta - 1}$,
$G(\tau) = \tau + \sin\tau$, $\eta = \pi$,
$G(\tau) = \eta e^{-(\tau-\eta)^2/2}$, $\eta \in (0, \sqrt{2})$,
$G(\tau) = \eta\sqrt{\dfrac{\tau}{\eta}}$;

$b_2)$ $K(x,t,\tau) = L(x,\tau)\Big[\overset{\circ}{K}(x-t) - \overset{\circ}{K}(x+t)\Big]G(\tau)$,

где $L(x,\tau)$ — измеримая функция на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, причем существует $\eta > 0$ такое, что
$L(x,\tau) \uparrow$ по τ на $[0,\eta]$ при каждом фиксированном $x > 0$,

$$\mu(x) \leq L(x,\tau) \leq \frac{1}{\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \overset{\circ}{K}(\tau)d\tau} \equiv F(x),\ (x,\tau) \in \mathbb{R}^+ \times [0,\eta],$$

$L \in \mathrm{Carat}_\tau(\mathbb{R}^+ \times [0,\eta])$ по аргументу τ.

1. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. – М.: Физматгиз, 1962. – 394 с.
2. *Забрейко П. П.* О непрерывности и полной непрерывности операторов П. С. Урысона // Докл. АН СССР. – 1965. – **161**, №5. – С. 1007 – 1010.
3. *Banas J.* Integhrable solutions of Hammerstein and Urysohn integral equations // J. Austral. Math. Soc. A. – 1989. – **46**. – P. 61 – 68.
4. *Brezis H., Browder F. E.* Existence theorems for nonlinear integral equations of Hammerstein type // Bull. Amer. Math. Soc. – 1975. – **81**, № 1. – P. 73 – 78.
5. *Арабаджян Л. Г., Енгибарян Н. Б.* Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения // Итоги науки и техники. Мат. анализ. – 1984. – **22**. – С. 175 – 242.
6. *Енгибарян Н. Б., Арабаджян Л. Г.* О некоторых задачах факторизации для интегральных операторов типа свертки // Дифференц. уравнения. – 1990. – **26**, № 1. – С. 1442 – 1452.
7. *Куфнер А., Фучик С.* Нелинейные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1988. – 304 с.
8. *Енгибарян Б. Н.* Применение многократной факторизации к однородному уравнению свертки // Изв. НАН Армении. Математика. – 1997. – **32**, № 1. – С. 38 – 48.
9. *Арабаджян Л. Г.* Об одном интегральном уравнении теории переноса в неоднородной среде // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 9. – С. 1618 – 1622.
10. *Колмогоров А. Н., Фомин В. С.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 544 с.

Получено 22.06.10,
после доработки — 18.10.10