УДК 517.9

В. І. Ткаченко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ЗВІДНІСТЬ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З КВАЗІПЕРІОДИЧНИМИ КОСОСПРЯЖЕНИМИ МАТРИЦЯМИ

We prove that there exists an open set of irreducible systems in the space of systems of linear differential equations with quasiperiodic skew-adjoint matrices and fixed frequency module.

Доведено, що існує відкрита множина незвідних систем у просторі лінійних диференціальних рівнянь з квазіперіодичними кососпряженими матрицями та фіксованим частотним модулем.

1. Вступ. Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь з квазіперіодичними коефіцієнтами

$$\frac{dx}{dt} = A(\varphi \cdot t)x, \tag{1}$$

де $x \in \mathbb{C}^n$, $\varphi \in \mathbb{T}_m$, $\mathbb{T}_m = \mathbb{R}^m / 2\pi\mathbb{Z}^m$ — m-вимірний тор, $A(\varphi)$ — неперервна функція, $\mathbb{T}_m \to u(n)$, $u(n)$ — множина n-вимірних кососпряжених матриць, $\varphi \cdot t$ — ірраціональний потік на торі $\mathbb{T}_m$:

$$\varphi \cdot t = \omega t + \varphi, \quad \varphi \in \mathbb{T}_m, \tag{2}$$

$\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ — сталий вектор з раціонально незалежними координатами.

Зафіксуємо потік на торі (2) і розглянемо простір систем (1) з кососпряженими матрицями коефіцієнтів. Відстань між двома системами задається рівномірною на торі нормою матричних функцій $A(\varphi)$.

У роботах [1 – 3] показано, що в деякому околі системи (1) зі сталими коефіцієнтами аналітичні незвідні системи утворюють щільну множину G_δ в аналітичній топології та існує щільна множина звідних систем. У даній роботі покажемо, що це неможливо в глобальній ситуації: існує відкрита множина незвідних систем у просторі $C(\mathbb{T}_m, u(n))$. Тим самим дано негативну відповідь на наступне питання з [1]: чи кожна система (1) може бути апроксимована звідними системами в аналітичній (чи більш слабкій) топології. Відмітимо, що функції $A(\varphi)$: $\mathbb{T}_m \to u(n)$, яким відповідають незвідні системи (1), утворюють щільну множину G_δ в просторі $C(\mathbb{T}_m, u(n))$ [4].

2. Основний результат. Позначимо через $U(n)$ множину n-вимірних унітарних матриць і через $SU(n)$ — множину n-вимірних унітарних матриць з $\det = 1$. Для вектора $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ означимо норму $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^n x_j \bar{x}_j\right)^{1/2}$, де число $\bar{x}$ комплексно спряжене до x. Відповідна норма n-вимірної матриці A визначається формулою $\|A\| = \sup\{\|Ax\|, x \in \mathbb{C}^n, \|x\| = 1\}$. Тоді $\|Ax\| = 1$ для $A \in U(n)$.

Позначимо через $\Phi(t, \varphi)$ фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь (1), $\Phi(0, \varphi) = I$, I — одинична матриця, $\Phi(t, \varphi)$ задовольняє умову коциклу

$$\Phi(t_1 + t_2, \varphi) = \Phi(t_2, \varphi \cdot t_1)\Phi(t_1, \varphi), \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in \mathbb{T}_m. \tag{3}$$

Якщо $A(\varphi) \in u(n)$, то $\Phi(t, \varphi) \in U(n)$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbb{T}_m$. Системі (1) відповідає потік на $\mathbb{T}_m \times U(n)$, який задається формулою

$$(\varphi, X)\cdot t = (\varphi\cdot t, \Phi(t,\varphi)X), \tag{4}$$

де $t\in\mathbb{R}$, $(\varphi, X)\in\mathbb{T}_m\times U(n)$.

Означення 1. *Система* (1) *називається звідною, якщо існує заміна змінних* $x = P(\varphi)y$, *яка переводить* (1) *в систему зі сталою матрицею, де* $P(\varphi)$ — *неперервне відображення* $P\colon \mathbb{T}_m\to U(n)$, *відображення* $t\to P(\varphi\cdot t)\colon \mathbb{R}\to U(n)$ *неперервно диференційовне і відображення* $\varphi\to (d/dt)P(\varphi\cdot t)|_{t=0}\colon \mathbb{T}_m\to u(n)$ *неперервне.*

Теорема 1. *Існує система* (1) *така, що всі системи з деякого її околу в топології* $C(\mathbb{T}_m, u(n))$ *не мають нетривіальних майже періодичних розв'язків і є незвідними.*

Для доведення теореми скористаємося наступною лемою.

Лема 1. *Нехай* 2π*-періодична комплекснозначна неперервна функція* $p(\theta)$ *задовольняє умову*

$$\left|p(\theta+\omega) - e^{2i\theta}p(\theta)\right| \le \varepsilon, \quad \theta\in[0,2\pi], \tag{5}$$

де ω *раціонально незалежне від* π. *Тоді існує стала* $a_0>0$, *яка не залежить від* ε *і така, що* $|p(\theta)|\le a_0\varepsilon$, $\theta\in[0,2\pi]$.

Доведення. Спочатку припустимо, що $p(\theta)\ne 0$ для всіх $\theta\in[0,2\pi]$. За теоремою про аргумент функція $p(\theta)$ має такий вигляд:

$$p(\theta) = r(\theta)e^{ia\theta+i\alpha(\theta)},$$

де $a=\mathrm{const}$, а дійсні функції $\alpha(\theta)$ і $r(\theta)>0$ 2π-періодичні. Тоді нерівність (5) можна переписати у вигляді

$$\left|r(\theta+\omega) - e^{i(\beta(\theta)+2\theta)}r(\theta)\right| \le \varepsilon, \tag{6}$$

де $\beta(\theta) = \alpha(\theta)-\alpha(\theta+\omega)-a\omega$. З останньої нерівності отримуємо

$$-\varepsilon \le r(\theta+\omega) - r(\theta)\cos(\beta(\theta)+2\theta) \le \varepsilon, \tag{7}$$

$$-\varepsilon \le r(\theta)\sin(\beta(\theta)+2\theta) \le \varepsilon. \tag{8}$$

Нехай $m = r(\theta_0) = \max\limits_{\theta\in[0,2\pi]} r(\theta)$. Тоді $|\sin(\beta(\theta_0)+2\theta_0)|\le\varepsilon/m$ і

$$|\cos(\beta(\theta_0)+2\theta_0)| \ge \frac{\sqrt{m^2-\varepsilon^2}}{m} \ge \frac{m-\varepsilon}{m}.$$

Якщо $\cos(\beta(\theta_0)+2\theta_0)<0$, то з формули (7) випливає співвідношення

$$\varepsilon \ge |r(\theta_0)\cos(\beta(\theta_0)+2\theta_0)| \ge m-\varepsilon$$

і $r(\theta_0)=m\le 2\varepsilon$. У випадку $\cos(\beta(\theta_0)+2\theta_0)\ge 0$ справедливі нерівності

$$r(\theta_0+\omega) \ge r(\theta_0)\cos(\beta(\theta_0)+2\theta_0) - \varepsilon \ge m\frac{m-\varepsilon}{m} - \varepsilon = m-2\varepsilon.$$

Використовуючи (7) і (8), отримуємо

$$|\sin(\beta(\theta_0+\omega)+2(\theta_0+\omega))| \le \frac{\varepsilon}{m-2\varepsilon},$$

$$|\cos(\beta(\theta_0+\omega)+2(\theta_0+\omega))| \ge \frac{m-3\varepsilon}{m-2\varepsilon}.$$

Якщо $\cos(\beta(\theta_0+\omega)+2(\theta_0+\omega))<0$, то

$$\varepsilon \ \geq \ r(\theta_0+\omega)\left|\cos\bigl(\beta(\theta_0+\omega) + 2(\theta_0+\omega)\bigr)\right| \ \geq \ (m-2\varepsilon)\frac{m-3\varepsilon}{m-2\varepsilon} \ = \ m - 3\varepsilon.$$

Тому $m \leq 4\varepsilon$. Якщо $\cos\bigl(\beta(\theta_0+\omega) + 2(\theta_0+\omega)\bigr) \geq 0$, то за формулою (7) маємо

$$r(\theta_0+2\omega) \ \geq \ r(\theta_0+\omega)\cos\bigl(\beta(\theta_0+\omega) + 2(\theta_0+\omega)\bigr) - \varepsilon \ \geq$$

$$\geq \ (m-2\varepsilon)\frac{m-3\varepsilon}{m-2\varepsilon} - \varepsilon \ = \ m - 4\varepsilon.$$

Продовжуємо аналогічні оцінки для $r(\theta_0+k\omega)$, $k = 1, 2, \ldots$. Якщо $\cos\bigl(\beta(\theta_0+j\omega)+2(\theta_0+j\omega)\bigr) \geq 0$, $j = 1, \ldots, (k-1)$, то

$$r(\theta_0+k\omega) \ \geq \ r(\theta_0+(k-1)\omega)\cos\bigl(\beta(\theta_0+(k-1)\omega) +$$

$$+ \ 2(\theta_0+(k-1)\omega)\bigr) - \varepsilon \ \geq \ m - 2k\varepsilon.$$

Якщо існує j таке, що $\cos\bigl(\beta(\theta_0+j\omega)+2(\theta_0+j\omega)\bigr) < 0$, то

$$\varepsilon \ \geq \ r(\theta_0+j\omega)\left|\cos\bigl(\beta(\theta_0+j\omega)+2(\theta_0+j\omega)\bigr)\right| - \varepsilon \ \geq \ (m-2j)\left(1-\frac{\varepsilon}{m-2j\varepsilon}\right).$$

З останньої нерівності отримуємо оцінку $m \leq 2(j+1)\varepsilon$.

Оскільки число ω ірраціональне, а неперервна функція $\beta(\theta)$ 2π-періодична, то існує таке $k_0 > 0$, що $\sin\bigl(\beta(\theta_0+k_0\omega)+2\theta_0+2k_0\omega\bigr) \geq 1/2$. Враховуючи (8), отримуємо $r(\theta_0+k_0\omega) \leq 2\varepsilon$. Якщо $\cos\bigl(\beta(\theta_0+j\omega)+2(\theta_0+j\omega)\bigr) \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, (k_0-1)$, то $2\varepsilon \geq r(\theta_0+k_0\omega) \geq m-2k_0\varepsilon$, інакше $m \leq 2(j+1)\varepsilon$ для деякого $j < k_0$. Тому m не може бути більшим, ніж $2(k_0+1)\varepsilon$. Таким чином, $|p(\theta)| \leq$ $\leq 2(k_0+1)\varepsilon$.

Нехай тепер існує точка θ така, що $p(\theta) = 0$. Для неперервної комплекснозначної функції $p(\theta)$ існує неперервна функція $q(\theta)$, $|q(\theta)| \leq \varepsilon/2$, така, що $\bar{p}(\theta) = p(\theta)+q(\theta) \neq 0$ для всіх $\theta \in [0, 2\pi]$. Тоді

$$\left|\bar{p}(\theta+\omega) - e^{2i\theta}\bar{p}(\theta)\right| \ \leq \ 2\varepsilon, \quad \theta \in [0, 2\pi]. \tag{9}$$

За першою частиною доведення леми $|\bar{p}(\theta)| \leq 4(k_0+1)\varepsilon$. Тому $|p(\theta)| \leq 4(k_0 +$ $+ 1)\varepsilon + \varepsilon/2$. Отже, $a_0 = 4(k_0+1)+1/2$. Лему доведено.

***Доведення теореми* 1.** Розглянемо систему (1) в просторі $\mathbb{T}_2 \times \mathbb{C}^2$. Нехай $\varphi = (\theta, \psi) \in \mathbb{T}_2$, $\Phi(t, \theta, \psi)$ — фундаментальна система розв'язків з такими властивостями:

i) $\Phi(t, \theta, 0) = G(g(t), \theta)$ для всіх θ і $t \in [0, 2\pi/\omega_2]$, де $g\colon [0, 2\pi/\omega_2] \to$ $\to [0, 2\pi]$ — неперервно диференційовна функція, яка дорівнює нулю в околі 0 і 2π в околі $2\pi/\omega_2$ і

$$1 \qquad G(\tau, \theta) \ = \ \begin{pmatrix} \left(\sin^2\frac{\tau}{4}\right)(e^{i\theta}-1)+1 & \left(\sin\frac{\tau}{4}\cos\frac{\tau}{4}\right)(e^{i\theta}-1) \\ -\left(\sin\frac{\tau}{4}\cos\frac{\tau}{4}\right)(e^{-i\theta}-1) & \left(\sin^2\frac{\tau}{4}\right)(e^{-i\theta}-1)+1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

(відмітимо, що функцію $G(\tau, \theta)$ побудовано в [5]);

ii) функцію $\Phi(t, \theta, 0)$ для всіх значень t, θ, ψ визначаємо за допомогою формули коциклу (3).

З формули (10) випливає

$$\Phi_0(\theta) \ = \ \Phi\left(\frac{2\pi}{\omega_2}, \theta, 0\right) \ = \ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Функція $\Phi(t, \theta, \psi)$ задовольняє систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_1, \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega_2, \quad \frac{dx}{dt} = B(\theta, \psi)x, \tag{12}$$

де

$$B(\theta, \psi) = \left. \frac{\partial \Phi(t, \theta, \psi)}{\partial t} \right|_{t=0}.$$

Система (12) має два одновимірні інваріантні розшарування γ_1 і γ_2, які задаються проекторами $P_1(\theta, \psi)$ і $P_2(\theta, \psi)$ з такими значеннями на колі $(\theta, 0)$, $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$P_1(\theta, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2(\theta, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

За побудовою розшарування γ_1 і γ_2 нетривіальні.

Припустимо, що система (12) має відмінне γ_1 і γ_2 одновимірне інваріантне розшарування, яке визначається проектором $P(\theta, \psi)$. Тоді

$$\Phi_0(\theta) P_0(\theta) = P_0(\theta + 2\pi\nu)\Phi_0(\theta), \tag{14}$$

де $\nu = \omega_1 / \omega_2$, $P_0(\theta) = \{p_{ij}(\theta)\}_{i,j=1}^2 = P(\theta, 0)$. Рівність (14) перепишемо в координатному вигляді. Тому

$$\begin{pmatrix} p_{11}(\theta + 2\pi\nu) & p_{12}(\theta + 2\pi\nu) \\ p_{21}(\theta + 2\pi\nu) & p_{22}(\theta + 2\pi\nu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}(\theta) & e^{2i\theta} p_{12}(\theta) \\ e^{-2i\theta} p_{21}(\theta) & p_{22}(\theta) \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Функція $P_0(\theta)$ 2π-періодична, тому функції $p_{12}(\theta)$ і $p_{21}(\theta)$ тотожно дорівнюють нулю. У протилежному випадку рівняння

$$p(\theta + 2\pi\nu) = e^{2i\theta} p(\theta)$$

має нетривіальний періодичний розв'язок $p(\theta) = \sum_k p_k e^{ik\theta}$. Тоді

$$\sum_k p_k e^{ik(\theta + 2\pi\nu)} = \sum_k p_{k-2} e^{ik\theta}$$

і $p_k e^{2\pi k\nu i} = p_{k-2}$. Необхідно, щоб $p_k \to 0$ при $k \to \infty$, тому $p_k = 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$. Отже, система (12) має тільки два одновимірні інваріантні розшарування γ_1 і γ_2.

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і розглянемо іншу систему в $\mathbb{T}_2 \times \mathbb{C}^2$:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_1, \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega_2, \quad \frac{dx}{dt} = \bar{B}(\theta, \psi)x, \tag{16}$$

де $\sup \left\| \bar{B}(\theta, \psi) - B(\theta, \psi) \right\| \leq \varepsilon$. Тоді фундаментальна система розв'язків $\bar{\Phi}(t, \theta, \psi)$ системи (16) задовольняє нерівність $\left\| \bar{\Phi}(t, \theta, \psi) - \Phi(t, \theta, \psi) \right\| \leq \varepsilon t$, $t \leq$ $\leq 2\pi/\omega_2$. Враховуючи (11), отримуємо

$$\bar{\Phi}_0(\theta) = \bar{\Phi}\left(\frac{2\pi}{\omega_2}, \theta, 0\right) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} (I + U), \tag{17}$$

де $\|U\| \leq 2\pi\varepsilon / \omega_2$.

Розглянемо проектор $\bar{P}(\theta, \psi)$, який задає одновимірне інваріантне розшарування $\bar{\gamma}$ системи (16). Проектор $\bar{P}_0(\theta) = \{\bar{p}_{ij}\}_{i,j=1}^2 = \bar{P}(\theta, 0)$ задовольняє рівняння

$$\tilde{P}(\theta+2\pi\nu) = \tilde{\Phi}_0(\theta)\tilde{P}(\theta)\tilde{\Phi}_0^{-1}(\theta). \tag{18}$$

З формули (17) випливає оцінка

$$\left\|\tilde{P}(\theta+2\pi\nu) - \Phi_0^{-1}(\theta)\tilde{P}(\theta)\Phi_0(\theta)\right\| \le 4\pi p\varepsilon, \tag{19}$$

де $p = \sup\left\|\tilde{P}(\theta)\right\|/\omega_2$. Тому

$$\left\|\begin{pmatrix}\tilde{p}_{11}(\theta+2\pi\nu) & \tilde{p}_{12}(\theta+2\pi\nu)\\ \tilde{p}_{21}(\theta+2\pi\nu) & \tilde{p}_{22}(\theta+2\pi\nu)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\tilde{p}_{11}(\theta) & e^{-2i\theta}\tilde{p}_{12}(\theta)\\ e^{2i\theta}\tilde{p}_{21}(\theta) & \tilde{p}_{22}(\theta)\end{pmatrix}\right\| \le 4\pi p\varepsilon. \tag{20}$$

Існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що при виконанні умови $\sup\left\|\tilde{P}(\theta) - P_i\right\| \le \varepsilon_0$ розшарування $\tilde{\gamma}$ гомотопне розшаруванню γ_i, $i = 1, 2$.

За лемою 1 з нерівності (19) випливають наступні оцінки:

$$|p_{12}(\theta)| \le 4\pi p a_0\varepsilon, \quad |p_{21}(\theta)| \le 4\pi p a_0\varepsilon. \tag{21}$$

З (21) та умови $\tilde{P}^2 = \tilde{P}$ випливають нерівності

$$\left|p_{11}^2 - p_{11}\right| \le (4\pi p a_0\varepsilon)^2, \quad \left|p_{22}^2 - p_{22}\right| \le (4\pi p a_0\varepsilon)^2.$$

Беручи до уваги умову $\operatorname{rank}\tilde{P} = 1$ та неперервність проектора, при досить малих ε переконуємося у справедливості однієї з двох пар нерівностей:

$$|p_{11}| \le 4\pi p a_0\varepsilon, \quad |p_{22} - 1| \le 4\pi p a_0\varepsilon$$

або

$$|p_{22}| \le 4\pi p a_0\varepsilon, \quad |p_{11} - 1| \le 4\pi p a_0\varepsilon.$$

Тому для $\varepsilon > 0$, яке задовольняє нерівність $4\pi p a_0\varepsilon \le \varepsilon_0$, розшарування $\tilde{\gamma}$ гомотопне розшаруванню γ_1 або розшаруванню γ_2. Оскільки розшарування γ_i, $i = 1, 2$, нетривіальні, то нетривіальне і розшарування $\tilde{\gamma}$. Ми довели, що система (16) може мати тільки нетривіальне інваріантне розшарування. Відмітимо, що для загальної системи (12) потік (4) мінімальний і система взагалі не має інваріантних одновимірних розшарувань [4, 6].

Якщо система (16) звідна, то її фундаментальна система розв'язків майже періодична, а простір $\mathbb{T}_2 \times \mathbb{C}^2$ є сумою Уітні одновимірних тривіальних розшарувань над тором $\mathbb{T}_2$ [7, 8]. Тому при $\varepsilon \le \varepsilon_0 / 4\pi p a_0$ система (16) незвідна. Теорему доведено.

Зауваження. **1.** У [9] доведено, що в кожному околі системи лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{C}^n, \tag{22}$$

з майже періодичною кососпряженою матрицею $A(t)$ з частотним модулем $\mathcal{F}$ існує (в рівномірній на дійсній осі топології матриць-функцій $A(t)$) система, всі розв'язки якої майже періодичні, а частотний модуль її майже періодичної матриці коефіцієнтів міститься в раціональній оболонці модуля $\mathcal{F}$. Із теореми 1 видно, що в загальному випадку в околі системи (22) може не існувати системи, розв'язки якої майже періодичні, а частотний модуль коефіцієнтів співпадає з $\mathcal{F}$. Тобто, в рівномірній на осі топології систему (22) завжди можна апроксимувати звідними системами з частотним модулем коефіцієнтів, що міститься в раціональній оболонці $\mathcal{F}$, але існує система (22), яку не можна апроксимувати звідними системами з частотним модулем $\mathcal{F}$.

2. Розглянемо так званий осцилятор Рабі, тобто систему двох диференціальних рівнянь вигляду

$$i\frac{d\psi}{dt} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & f(t) \\ -\overline{f(t)} & \lambda_2 \end{pmatrix}\psi, \quad \psi \in \mathbb{C}^2, \tag{23}$$

де λ_1 і λ_2 — фіксовані дійсні параметри, функція $f(t)$ квазіперіодична, $f(t) = F(\omega_1 t, \omega_2 t)$, $F(\varphi) \in C(\mathbb{T}_2, \mathbb{C})$, дійсні числа ω_1 і ω_2 раціонально незалежні. Система описує мультифотонну динаміку дворівневого атома, який опромінюється, чи систему з $\operatorname{spin}(-1/2)$ під дією залежного від часу магнітного поля [6, 10].

Розглянемо систему (12), яка задовольняє умови теореми 1. Кососпряжена матриця $B(\theta, \psi)$ має вигляд

$$\begin{pmatrix} ib_1(\theta, \psi) & b_{12}(\theta, \psi) \\ -\overline{b_{12}(\theta, \psi)} & ib_2(\theta, \psi) \end{pmatrix},$$

де $b_i(\theta, \psi) \in C(\mathbb{T}_2, \mathbb{R})$, $i = 1, 2$. Можна вважати функції $b_i(\theta, \psi)$ тригонометричними поліномами. У цьому випадку існує лінійна заміна змінних $x = \operatorname{diag}\{u_1(\theta, \psi), u_2(\theta, \psi)\}y$, яка зводить систему (12) до системи форми (23).

Тому в просторі систем (23) з фіксованими частотами ω_1 та ω_2 квазіперіодичних функцій $f(t)$ існує відкрита множина систем, розв'язки яких не майже періодичні. Але в кожному околі системи (23) існує (в рівномірній топології на осі) система з майже періодичними розв'язками та з частотним модулем, який міститься в раціональній оболонці модуля частот ω_1 та ω_2.

1. *Eliasson L. H.* Reducibility and point spectrum for linear quasiperiodic skew-products // Proc. Int. Congr. Math., Vol. II: Invited lectures. – Berlin, 1998. – P. 779 – 787.
2. *Eliasson L. H.* Ergodic skew systems on $\mathbb{T}^d \times SO(3, \mathbb{R})$. – Zurich, 1991. – 28 p. (Preprint / ETH–Zurich).
3. *Krikorian R.* Réductibilité presque partout des systémes quasi-périodiques dans le cas $SO(3, R)$ // C. r. Acad. sci. Paris. Série I. – 1995. –**321**. – P. 1039 – 1044.
4. *Ткаченко В. І.* Про лінійні системи з квазіперіодичними коефіцієнтами та обмеженими розв'язками // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 10. – С. 1410 – 1417.
5. *Palmer K. J.* On the reducibility of almost periodic systems of linear differential equations // J. Different. Equat. – 1980. – **36**, № 2. – P. 374 – 390.
6. *Nerurkar M. G., Sussmann H. J.* Construction of minimal cocycles arising from specific differential equations // Isr. J. Math. – 1997. – **100**. – P. 309 – 326.
7. *Любарский М. Г.* Об одном обобщении теоремы Флоке – Ляпунова // Докл. АН СССР. – 1973. – **213**. – № 4. – С. 780 – 782.
8. *Ткаченко В. І.* Про рівномірно стійкі лінійні квазіперіодичні системи // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 7. – С. 1102 – 1108.
9. *Tkachenko V. I.* On linear almost periodic systems with bounded solutions // Bull. Austral. Math. Soc. – 1997. – **55**, № 2. – P. 177 – 184.
10. *Pomeau Y., Dorizzi B., Grammaticos B.* Chaotic Rabi oscillations under quasiperiodic perturbation // Phys. Rev. Lett. – 1986. – **56**. – P. 681 – 684.

Одержано 15.11.01