УДК 512.542

В. М. Селькин (Гомел. ун-т)

МИНИМАЛЬНЫЕ НАСЛЕДСТВЕННЫЕ ω-ЛОКАЛЬНЫЕ НЕ $\mathfrak{H}$-ФОРМАЦИИ

We describe minimal hereditary ω-local non-$\mathfrak{H}$-formations, where $\mathfrak{H}$ is a formation of a classical type.

Описано мінімальні спадкові ω-локальні не $\mathfrak{H}$-формації, де $\mathfrak{H}$ — формації класичного типу.

1. Введение. Пусть Θ — некоторый набор формаций. Формации, принадлежащие Θ, называются Θ-формациями. Формация $\mathfrak{F} \in \Theta$ называется $\mathfrak{H}_\Theta$-критической [1] или минимальной не $\mathfrak{H}$ Θ-формацией [2], если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но в классе групп $\mathfrak{H}$ содержится каждая собственная Θ-подформация из $\mathfrak{F}$. Если формации $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ таковы, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, то во многих случаях удается доказать, что в $\mathfrak{F}$ имеется, по крайней мере, одна $\mathfrak{H}_\Theta$-критическая подформация. Это обстоятельство указывает на важность изучения формаций такого вида. Общая проблема изучения $\mathfrak{H}_\Theta$-критических формаций впервые поставлена Л. А. Шеметковым в его докладе на VI Всесоюзном симпозиуме по теории групп [2]. Решение этой задачи в случае, когда $\Theta = l$ — класс всех локальных формаций, получено А. Н. Скибой в [3]. В работе [4] описаны $\mathfrak{H}_\Theta$-критические формации, где Θ — класс всех наследственных локальных формаций. Развивая эти результаты, в данной работе приведено описание минимальных наследственных ω-локальных не $\mathfrak{H}$-формаций, т. е. $\mathfrak{H}_\Theta$-критических формаций, где Θ — класс всех наследственных ω-локальных формаций.

2. Определения и обозначения. Кроме стандартной терминологии [5, 6], будем использовать некоторые определения и обозначения работы [7].

Пусть ω — произвольное непустое множество простых чисел. Каждая функция вида $f\colon \omega \cup \{\omega'\} \mapsto$ {формация групп} называется ω-локальным спутником. Спутник f называется Θ-значным, если все его значения принадлежат Θ. Пусть символ $G_{\omega d}$ обозначает наибольшую нормальную в G подгруппу N с тем свойством, что $\omega \cap \pi(H/K) \neq \varnothing$ для каждого композиционного фактора H/K из N ($G_{\omega d} = 1$, если $\omega \cap \pi(\mathrm{Soc}(G)) = \varnothing$). Для произвольного ω-локального спутника f символом $LF_\omega(f)$ обозначается класс групп $\{G \mid G/G_{\omega d} \in f(\omega')$ и $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)\}$. Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, то говорят, что она ω-локальна, а f — ω-локальный спутник этой формации.

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольная совокупность групп, p — простое число. Тогда

$$\mathfrak{X}(F_p) = \begin{cases} \mathrm{form}\,(G / F_p(G)) \mid G \in \mathfrak{X}, & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{X}), \\ \varnothing, & \text{если } p \notin \pi(\mathfrak{X}). \end{cases}$$

Минимальным Θ-значным ω-локальным спутником формации $\mathfrak{F}$ называется спутник f со следующими значениями: $f(\omega') = \Theta\,\mathrm{form}\,(G/G_{\omega d} \mid G \in \mathfrak{F})$ и $f(p) = \Theta\,\mathrm{form}\,(\mathfrak{F}(F_p))$ для всех $p \in \omega$. Спутник H формации $\mathfrak{H}$ называется каноническим, если $H(\omega') = \mathfrak{H}$ и $H(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}(F_p)$ для всех $p \in \omega$.

Формация $\mathfrak{F} \in \Theta$ называется Θ-неприводимой, если Θ-формация $\mathfrak{M}$, порожденная множеством всех собственных Θ-подформаций из $\mathfrak{F}$, отлична от $\mathfrak{F}$. Везде в дальнейшем s и Θ обозначают классы всех наследственных и наследственных ω-локальных формаций соответственно.

3. Некоторые предварительные результаты.

Лемма 1. *Пусть G — монолитическая группа с нефраттиниевым монолитом P. Тогда если P — ω'-группа и либо P — неабелева группа, либо $G = [P]H$, причем $P = C_G(P)$ — абелева p-группа, то формация $\mathfrak{F} = \Theta\,\mathrm{form}(G)$ Θ-неприводима и ее максимальная Θ-подформация $\mathfrak{M}$ имеет такой внутренний ω-локальный спутник m, что*

$$m(a) = \begin{cases} s\,\mathrm{form}(G/F_p(G)), & \text{если} \quad a = p \in \omega \cap \pi(G), \\ \varnothing, & \text{если} \quad a = p \in \omega \setminus \pi(G), \\ s\,\mathrm{form}(\mathfrak{X}), & \text{если} \quad a = \omega', \end{cases}$$

где $\mathfrak{X}$ — множество всех собственных подгрупп группы G.

Доказательство. Пусть P — неабелева группа, f — минимальный ω-локальный наследственный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда ввиду леммы 5 [7]

$$f(a) = \begin{cases} s\,\mathrm{form}(G/F_p(G)), & \text{если} \quad a = p \in \omega \cap \pi(G), \\ \varnothing, & \text{если} \quad a = p \in \omega \setminus \pi(G), \\ s\,\mathrm{form}(G/G_{\omega d}), & \text{если} \quad a = \omega'. \end{cases}$$

Рассмотрим формацию $\mathfrak{M} = LF(m)$, где m — наследственный ω-локальный спутник такой, что

$$m(a) = \begin{cases} s\,\mathrm{form}(G/F_p(G)), & \text{если} \quad a = p \in \omega \cap \pi(G), \\ \varnothing, & \text{если} \quad a = p \in \omega \setminus \pi(G), \\ s\,\mathrm{form}(\mathfrak{X}), & \text{если} \quad a = \omega'. \end{cases}$$

Покажем, что $\mathfrak{M}$ — максимальная Θ-подформация формации $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{H}$ — произвольная собственная Θ-подформация формации $\mathfrak{F}$ и h — ее минимальный Θ-значный спутник. Тогда в силу леммы 6 [7] $h \le f$. Пусть $a \in \omega \cup \{\omega'\}$ и $h(a) \subset f(a)$. Тогда если $a \in \omega$, то $m(a) = f(a)$. Значит, $h(a) \subseteq m(a)$. Пусть $a = \omega'$. Тогда согласно лемме 1 [8] $m(a) = s\,\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ — единственная максимальная s-подформация формации $f(p) = s\,\mathrm{form}(G)$. Значит, $h(p) \subseteq m(p)$. Итак, для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$ справедливо соотношение $h(a) \subseteq m(a)$. Поэтому $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$.

Покажем, что $\mathfrak{M}$ — собственная подформация формации $\mathfrak{F}$. Прежде заметим, что из описания спутника m следует, что $m \le f$, т. е. $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Предположим, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$. Тогда $s\,\mathrm{form}(G) = f(\omega') \subseteq m(\omega') = s\,\mathrm{form}(\mathfrak{X})$, что противоречит лемме 1 [8]. Итак, $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$. Таким образом, формация $\mathfrak{F}$ Θ-неприводима и $\mathfrak{M}$ — ее единственная максимальная Θ-подформация.

Покажем теперь, что m — внутренний Θ-значный спутник формации $\mathfrak{M}$. Так как $P \nsubseteq \Phi(G)$, существует максимальная подгруппа M группы G такая, что $G = PM$. Тогда $G/P \cong M/M \cap P \in m(\omega')$. Поскольку P — ω'-группа, $P \subseteq F_p(G)$ для всякого $p \in \omega \cap \pi(G)$. Следовательно, $G/F_p(G) \in s\,\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ для всякого $p \in \omega \cap \pi(G)$. Значит, $(G/F_p(G))/(G/F_p(G))_{\omega d} \in m(\omega')$ для всякого $p \in \omega \cap \pi(G)$.

Ввиду того, что $G/F_p(G) \in m(p)$ для всякого $p \in \omega \cap \pi(G)$, имеем

$$(G/F_p(G))/F_q(G/F_p(G)) \in s\,\mathrm{form}(G/F_q(G)) = m(q),$$

где $p \in \omega \cap \pi(G)$, $q \in \omega \cap \pi(G/F_p(G))$ и $p = q$. Пусть $p \neq q$. Тогда справедливы следующие включения: $1 \subseteq F_q(G) \subseteq F_q(G)F_p(G) \subseteq G$. Так как

$G/F_q(G) \in s\mathrm{form}(G/F_q(G))$, получаем $G/F_q(G)F_p(G) \in s\mathrm{form}(G/F_q(G))$. Следовательно,

$$G/F_q(G)F_p(G) \cong (G/F_p(G))/(F_q(G)F_p(G)/F_p(G)) \in m(q).$$

Однако $F_q(G)F_p(G)/F_p(G) \subseteq F_q(G/F_p(G))$. Значит, $(G/F_p(G))/F_q(G/F_p(G)) \in \in m(q)$. Таким образом, $G/F_p(G) \in \mathfrak{M}$ для всякого $p \in \omega \cap \pi(G)$.

Пусть $A \in \mathfrak{X}$ — произвольная группа. Рассмотрим подгруппу $AF_p(G)/F_p(G)$ группы $G/F_p(G)$. Поскольку $(\omega \cap \pi(A)) \subseteq (\omega \cap \pi(G))$, то будем иметь

$$A/(F_p(G) \cap A) \cong AF_p(G)/F_p(G) \in s\mathrm{form}(G/F_p(G)) = m(p)$$

для всякого $p \in \omega \cap \pi(A)$. Но $(F_p(G) \cap A) \subseteq F_p(A) \subseteq A$. А потому, $A/F_p(A) \in m(p)$ для всякого $p \in \omega \cap \pi(A)$. Ввиду произвольного выбора группы A, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$. Следовательно, m — внутренний Θ-значный спутник формации $\mathfrak{M}$. Случай, когда $G = [P]H$, рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть G — монолитическая группа с неабелевым нефраттиниевым монолитом P; $\pi = \omega \cap \pi(P) \neq \varnothing$. Тогда формация $\mathfrak{F} = \Theta\mathrm{form}(G)$ Θ-неприводима и ее максимальная Θ-подформация $\mathfrak{M}$ имеет внутренний наследственный ω-локальный спутник такой, что*

$$m(a) = \begin{cases} s\mathrm{form}(\mathfrak{X}), & \text{если} \quad a = p \in \pi, \\ s\mathrm{form}(G/F_p(G)), & \text{если} \quad a = p \in \omega \cap (\pi(G) \setminus \pi(R)), \\ \varnothing, & \text{если} \quad a = p \in \omega \setminus \pi(G), \\ s\mathrm{form}(G/G_{\omega d}), & \text{если} \quad a = \omega', \end{cases}$$

где $\mathfrak{X}$ — множество всех собственных подгрупп группы G.

Лемма 3. *Пусть $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ — минимальная нормальная p-подгруппа группы G и $p \in \omega$, а $H = QM$ — монолитическая группа с нефраттиниевым монолитом Q, причем $(|P|, |Q|) = 1$. Тогда формация $\mathfrak{F} = \Theta\mathrm{form}(G)$ Θ-неприводима и ее максимальная Θ-подформация $\mathfrak{M}$ имеет внутренний наследственный ω-локальный спутник m такой, что*

$$m(a) = \begin{cases} s\mathrm{form}(\mathfrak{X}), & \text{если} \quad a = p, \\ s\mathrm{form}(G/F_q(G)), & \text{если} \quad a = q \in (\pi(G) \cap \omega) \setminus \{p\}, \\ \varnothing, & \text{если} \quad a = q \in \omega \setminus \pi(G), \\ s\mathrm{form}(G/G_{\omega d}), & \text{если} \quad a = \omega', \end{cases}$$

где $\mathfrak{X}$ — множество всех собственных подгрупп группы H.

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ — ω-локальная формация. Тогда максимальный ω-локальный спутник H формации $\mathfrak{H} = LF_\omega(H)$ таков, что*

$$H(q) = \begin{cases} \mathfrak{N}_p\mathfrak{M}, & \text{если} \quad q = p \in \omega, \\ \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p\mathfrak{M}, & \text{если} \quad q \in p' \cap \omega, \\ \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p\mathfrak{M}, & \text{если} \quad q = \omega'. \end{cases}$$

Проверкой доказывается следующая лемма.

Лемма 5. *Пусть* H — *канонический* ω*-локальный спутник формации* $\mathfrak{H}$ *и* $G = [P]H$ — *монолитическая группа с абелевым монолитом* $P = C_G(P) = O_p(G) = G^{\mathfrak{H}}$, *причем* $p \in \omega$. *Тогда* G — *является минимальной не* $\mathfrak{H}$*-группой в том и только том случае, когда* H — *минимальная не* $(H(p))$*-группа.*

Лемма 6. *Пусть* $\mathfrak{M}$ — Θ*-формация,* $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p\mathfrak{M}$. *Тогда* $\mathfrak{F}$ *является* $\mathfrak{H}_\Theta$*-критической формацией в том и только том случае, когда* $\mathfrak{F} = \Theta\,\mathrm{form}(G)$, *где* G — *такая минимальная не* $\mathfrak{H}$*-группа с нефраттиниевым монолитом* $P = G^{\mathfrak{H}}$, *что* p *делит* $|P|$ *и либо* P — *неабелева группа, а при* $p \in \pi = \pi(P) \cap \omega$ G — *минимальная не* $(\mathfrak{N}_p\mathfrak{M})$*-группа, либо* $G = [P]H$, *где* $P = C_G(P)$ — *абелева* p*-группа, и при* $p \in \omega$ H — *такая монолитическая минимальная не* $(\mathfrak{N}_p\mathfrak{M})$*-группа с монолитом* $Q = H^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{M}}$, *что* $Q \not\subseteq \Phi(H)$ *и* p *не делит* $|Q|$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть f — минимальный Θ-значный спутник формации $\mathfrak{F}$, H — канонический Θ-значный спутник формации $\mathfrak{H}$. Тогда согласно теореме работы [9] $\mathfrak{F} = \Theta\,\mathrm{form}(G)$, где G — такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что либо $\pi = \pi(P) \cap \omega \neq O$, $\Phi(G) = 1$ и $f(q)$ — $(H(q))_s$-критическая формация для всех $q \in \pi$, либо $\pi = \varnothing$ и $f(\omega')$ — $\mathfrak{H}_s$-критическая формация. Ввиду замечания к теореме из [9] G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Понятно, что p делит $|P|$.

Нетрудно заметить, что $\pi(\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p) = \mathbb{P}$, и в силу следствия 7.13 [10] формация $\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p$ локальна. Тогда согласно следствию 7.19 [10] формация $\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$ локальна. Следовательно, $\Phi(G) = 1$.

Пусть P — неабелева ω'-группа. Тогда $\pi = \varnothing$ и $f(\omega')$ — $\mathfrak{H}_s$-критическая формация. Ввиду леммы 1 формация $\mathfrak{F} = \Theta\,\mathrm{form}(G)$ Θ-неприводима и ее максимальная Θ-подформация $\mathfrak{M}_1$ имеет такой внутренний Θ-значный спутник m, что $m(\omega') = s\,\mathrm{form}(\mathfrak{X})$, где $\mathfrak{X}$ — множество всех собственных подгрупп группы G. Но по условию $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{H}$. Значит, $m \leq H$. Согласно лемме 4 $H(\omega') = \mathfrak{H}$. Так как $m(\omega') \subseteq H(\omega')$ и $G \notin \mathfrak{H}$, то G — минимальная не $\mathfrak{H}$-группа и $G^{\mathfrak{H}} = P$.

Если P — неабелева группа, $\pi = \varnothing$, и P — абелева p-группа, $\pi = \varnothing$, то, используя леммы 2, 5 [7], 1 [8] и рассуждения, приведенные выше, нетрудно показать, что группа G удовлетворяет условию леммы.

Пусть P — абелева p-группа и $p \in \omega$. Тогда $\pi = \{p\}$ и $f(p)$ — $(H(p))_s$-критическая формация. Пусть также H — группа минимального порядка из $f(p) \setminus H(p)$. Поскольку формация $f(p)$ наследственна, H — минимальна не $(H(p))$-группа. Кроме того, ясно, что H — монолитическая группа. Пусть Q — монолит группы H. Ввиду леммы 8 [4] канонический ω-локальный спутник $H(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{M}$ формации $\mathfrak{H}$ является локальной формацией. Следовательно, в силу выбора группы H, $\Phi(H) = 1$.

Поскольку $H(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{M}$, то $0_p(H) = 1$. Следовательно, существует простой точный $F_p[H]$-модуль P. Пусть $F = [P]H$. Тогда $P = C_F(P)$ — минимальная нормальная p-подгруппа группы F. Поскольку спутник f является внутренним для $\mathfrak{F}$, то в силу леммы 4 [7] $F \in \mathfrak{F}$. Ясно, что $P = F_p(F)$. Обозначим через h минимальный Θ-значный спутник формации $\mathfrak{H}_1 = \Theta\,\mathrm{form}(F)$. Тогда согласно лемме 5 [7] $h(p) = s\,\mathrm{form}(F/F_p(F)) = s\,\mathrm{form}(H)$.

Если $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{F}$, то по условию $\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{H}$. Значит, ввиду леммы 6 [7] имеет место вложение $h \leq H$, и поэтому $H = F/F_p(F) \in H(p)$. Последнее противоречит определению группы H. Таким образом, $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{F}$, т. е. $\mathfrak{F} = \Theta \operatorname{form}(F)$. Предположим, что $p \in \pi(Q)$. Так как $0_p(H) = 1$, то Q — неабелева группа. Ясно, что $H \in \mathfrak{F}$, и $F_p(H) = 1$. Предположим, что формация $\mathfrak{H}_2 = \Theta \operatorname{form}(H) \neq \neq \mathfrak{F}$. Тогда согласно условию $\mathfrak{H}_2 \subseteq \mathfrak{H}$. Значит, $H \cong H/F_p(H) \in H(p)$, что противоречит определению группы H. Следовательно, $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{F}$. Кроме того, повторяя рассуждение, приведенное выше, видим, что H — минимальная не $(\mathfrak{N}_p\mathfrak{M})$-группа и $Q = H^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{M}}$. Таким образом, мы приходим к уже рассмотренной ситуации. Поэтому можно считать, что p не делит $|Q|$.

Достаточность вытекает из теоремы 1 работы [9]. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть $\mathfrak{M}$ — непустая абелева формация, $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p\mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной наследственной ω-локальной не $\mathfrak{H}$-формацией в том и только том случае, когда $\mathfrak{F} = \Theta \operatorname{form}(G)$, где G — такая монолитическая минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с нефраттиниевым монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что p делит $|P|$, и G удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) *P — неабелева группа, и если $p \in \omega$, то G — минимальная не $(\mathfrak{N}_p\mathfrak{M})$-группа и $G^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{M}} = P$;*

2) *$G = [P]H$, $C_G(P) = P$ — абелева p-группа, и если $p \in \omega$, то H — монолитическая группа с монолитом Q (p не делит $|Q|$) одного из следующих типов: а) H — минимальная не $(\mathfrak{N}_p\mathfrak{M})$-группа, $Q = H^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{M}}$, $\Phi(H) = 1$; б) H — минимальная не $\mathfrak{M}$-группа, причем H либо группа кватернионов порядка 8, либо неабелева группа q^3 простой нечетной экспоненты q, либо циклическая q-группа.*

Доказательство. Пусть f — минимальный Θ-значный спутник формации $\mathfrak{F}$, H — канонический ω-локальный спутник $\mathfrak{H}$.

Необходимость. Предположим, что $\mathfrak{F}$ не содержится в $(\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N})_p\mathfrak{N} = \mathfrak{H}_1$. Поскольку $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, то $(\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p)\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}_1$. Значит, в рассматриваемом случае $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{H}_{1_\Theta}$-критическая формация. Следовательно, согласно лемме 6 $\mathfrak{F} = = \Theta \operatorname{form}(G)$, где G — группа из условия леммы 6, в которой в качестве формации $\mathfrak{M}$ взята формация $\mathfrak{N}$. Как и при доказательстве леммы 6, можно показать, что группа G удовлетворяет условию теоремы.

Рассмотрим случай, когда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}_1$. Тогда с учетом теоремы из [11] $\mathfrak{F} = = \Theta \operatorname{form}(F)$, $P = F^{\mathfrak{H}}$ — монолит группы F такой, что либо $\pi = \pi(P) \cap \omega \neq \varnothing$, $\Phi(F) = 1$ и $f(q)$ — $(H(q))_s$-критическая формация для всех $q \in \pi$, либо $\pi = = \varnothing$ и $f(\omega')$ — $\mathfrak{H}_s$-критическая формация. Нетрудно видеть, что p делит $|F^{\mathfrak{H}}|$. Так как $F^{\mathfrak{H}} = P$ и $\mathfrak{H}$ — локальная формация, имеем $\Phi(F) = 1$.

Пусть $p \in \omega$. Согласно лемме 4 $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}$ — значение на p канонического ω-локального спутника формации $\mathfrak{H}_1$. Но $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}_1$. Ввиду леммы 5 [7] $f(p)$ — наследственная формация, порожденная некоторым набором групп A с $O_p(A) = 1$. Согласно лемме 6 [7] $f(p) \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}$. Значит, $f(p) \subseteq \mathfrak{N}$. Таким образом, $f(p) \subseteq \mathfrak{N}_{p'}$. Следовательно, все собственные подформации формации $f(p)$ наследственны. Отсюда и из того, что каждая собственная подформация формации $f(p)$ входит в $H(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{M}$, следует, что каждая собственная подформация формации $f(p)$ входит в $\mathfrak{M}$. С другой стороны, ясно, что $f(p)$ не входит в $\mathfrak{M}$. Значит, $f(p)$ — минимальная не $\mathfrak{M}$-формация.

Пусть $f(p)$ не входит в $\mathfrak{A}$. Тогда, поскольку $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{A}$, то $f(p)$ — минимальная неабелева формация. Согласно лемме 7 [4] $f(p)$ — формация, порожденная группой H, где H — либо группа кватернионов порядка 8, либо неабелева порядка q^3 простой нечетной экспоненты q. В обоих случаях группа H монолитична и ее порядок взаимно прост с p. Значит, существует точный неприводимый $F_p[H]$-модуль P. Пусть $G = [P]H$. В силу леммы 4 [7] $G \in \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F}_1 = \Theta\,\mathrm{form}\,(G)$ отлична от $\mathfrak{F}$, то согласно условию $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H}$. Но тогда $G/F_p(G) \cong H \in H(p)$. Следовательно, $f(p) \subseteq H(p)$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}$. При этом, очевидно, $P = C_G(P) = G^{\mathfrak{H}}$. Так как $f(p)$ нильпотентна, то $s\,\mathrm{form}\,(\mathfrak{X}) \subseteq s\ \mathrm{form}\,(H) = f(p)$, где $\mathfrak{X}$ — множество всех собственных подгрупп группы H. Но все собственные подгруппы группы H абелевы, а формация $f(p)$ неабелева, а потому $s\,\mathrm{form}\,(\mathfrak{X}) \subset f(p)$. Ввиду того, что $f(p)$ — минимальная не $\mathfrak{M}$-формация, H — минимальная не $\mathfrak{M}$-группа. Таким образом, группа H удовлетворяет условию теоремы.

Пусть $f(p) \subseteq \mathfrak{A}$, H — группа минимального порядка из $f(p) \setminus \mathfrak{M}$. Так как $f(p)$ наследственна, то H — минимальная не $\mathfrak{M}$-группа. Поскольку $f(p)$ — минимальная не $\mathfrak{M}$-формация, $f(p)$ — формация, порожденная группой H. С учетом того, что формация $f(p)$ абелева, заключаем, что H — циклическая q-группа. Но $f(p) \subseteq \mathfrak{N}_{p'}$. Следовательно, существует точный неприводимый F_pH-модуль P. Пусть $G = [P]H$. Поскольку H не принадлежит $\mathfrak{M}$, то, как и выше, можно показать, что $\mathfrak{F}$ — Θ-формация, порожденная группой G. Кроме того, ясно, что $P = C_G(P)$ и H удовлетворяет условию теоремы.

Как показано выше, $f(p) = s\,\mathrm{form}\,(H) \subseteq \mathfrak{N}_{p'}$, а потому $f(p) \subseteq \mathfrak{N}_{p'} \subseteq \mathfrak{H}$. Значит, $G/P \cong H \in \mathfrak{H}$. Согласно следствию 7.19 [10] формация $\mathfrak{H}$ является локальной. Следовательно, $\Phi(G) = 1$ и $G^{\mathfrak{H}} = P$. Так как H является минимальной не $\mathfrak{M}$-группой, то H является минимальной не $(\mathfrak{N}_p\mathfrak{M})$-группой. В противном случае $G \in \mathfrak{N}_pH(p) = H(p) \subseteq \mathfrak{H}$, что противоречит условию леммы. Таким образом, H — минимальная не $(H(p))$-группа. Тогда ввиду леммы 5 G — минимальная не $\mathfrak{H}$-группа.

Пусть теперь $p \notin \omega$. В силу леммы 4 значения канонического ω-локального спутника формации $\mathfrak{H}_1$ совпадают с $\mathfrak{H}_1$ для каждого простого числа $q \in \omega$. Но $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}_1$. Следовательно, $f(q) \subseteq \mathfrak{H}_1$ для каждого простого $q \in \omega$.

Пусть $\pi \neq \varnothing$. Тогда $\Phi(F) = 1$ и $f(q)$ — $(H(q))_s$-критическая формация для всех $q \in \pi$. Предположим, что P — абелева группа. Так как $\Phi(F) = 1$, то P — p-группа. Значит, $p \in \omega$. Противоречие. Следовательно, P — неабелева группа. Согласно лемме 5 [7] формация $\mathfrak{F}$ имеет такой Θ-значный спутник f такой, что $f(q) = s\,\mathrm{form}\,(F)$, если $q \in \pi$. Но поскольку $f(q) \subseteq \mathfrak{H}_1$ для каждого простого $q \in \omega$, то $F \subseteq \mathfrak{H}_1$. Так как p делит $|P|$, то $F \nsubseteq \mathfrak{G}_{p'}$. Значит, $F \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}$. Следовательно, $P \in \mathfrak{N}_p$. Противоречие. Таким образом, $F \in \mathfrak{N}$, что противоречит выбору группы F. Значит, $\pi = \varnothing$. Отсюда согласно лемме 5 [7] формация $\mathfrak{F}$ имеет такой минимальный Θ-значный спутник f, что $f(\omega') = s\,\mathrm{form}\,(F)$. Причем, $f(\omega')$ — $\mathfrak{H}_s$-критическая формация. Но $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}_1$. А потому $f(\omega') = s\,\mathrm{form}\,(F) \subseteq \mathfrak{H}_1$. Так как p делит порядок монолита группы F, заключаем, что $F \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}$.

Предположим, что P — неабелева группа. Так как $F \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}$, то $P \in \mathfrak{N}_p$. Противоречие. Значит, $F \in \mathfrak{N}$. Но F — монолитическая группа с неабелевым монолитом P. Вновь полученное противоречие показывает, что P — абелева группа. Так как $\Phi(F) = 1$, то $F = [P]H$, где $C_F(P) = P$ — p-группа, причем F —

минимальная не $\mathfrak{H}$-группа. Таким образом, группа F удовлетворяет условию теоремы.

Достаточность вытекает из теоремы работы [9], лемм 1 [8], 18.3; 8.12 [10]. Лемма доказана.

4. Доказательство основного результата.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{H}$ — наследственная локальная формация классического типа, H — ее канонический спутник. Тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной наследственной ω-локальной не $\mathfrak{H}$-формацией в том и только том случае, когда $\mathfrak{F} = \Theta\operatorname{form}(G)$, где G — такая монолитическая минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с нефраттиниевым монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из следующих условий:*

1) *$G = P$ — группа простого порядка $p \notin \pi(\mathfrak{H})$;*

2) *P — неабелева группа, если $\pi = \pi(P) \cap \omega \neq \varnothing$, то G — минимальная не $(H(q))$-группа и $P = G^{H(q)}$ для каждого простого числа $q \in \pi$;*

3) *$G = [P]H$, $P = C_G(P)$ — абелева p-группа, и если $p \in \omega$, то H — монолитическая не $(H(p))$-группа с монолитом Q (p не делит $|Q|$) одного из следующих типов: а) $Q = H^{H(q)} \not\subseteq \Phi(H)$; б) группа кватернионов порядка 8; в) неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q; г) циклическая примарная группа.*

Доказательство. *Необходимость.* Согласно условию формация $\mathfrak{H}$ имеет такой локальный экран f, каждое неабелево значение которого локально. Не умаляя общности, мы можем считать, что такой экран является внутренним. Известно, что формация $\mathfrak{H}$ может быть представлена в виде $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{H})} \cap (\bigcap_{p\in\pi(\mathfrak{H})}\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p f(p))$. Поскольку по условию каждая собственная ω-локальная подформация формации $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{H}$, но при этом $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, то либо $\mathfrak{F}$ — $(\mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{H})})_\Theta$-критическая формация, либо найдется такое простое $p \in \pi(\mathfrak{H})$, что $\mathfrak{F}$ — $(\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p f(p))_\Theta$-критическая формация.

Пусть справедливо первое и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F}\setminus\mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{H})}$. Так как формация $\mathfrak{F}$ наследственна, все собственные подгруппы группы G принадлежат $\mathfrak{F}$, а следовательно, ввиду выбора группы G принадлежат $\mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{H})}$. Таким образом, для каждого простого $p \in \pi(G)$ силовская p-подгруппа группы G принадлежит $\mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{G})}$. Следовательно, $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{H})$. Значит, если $|\pi(G)| > 1$, то $G \in \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{H})}$. Противоречие. Таким образом, G — p-группа для некоторого простого числа $p \notin \pi(\mathfrak{H})$. Предположим, что $\Theta\operatorname{form}(G) \subset \mathfrak{F}$. Тогда, ввиду условия теоремы, $\Theta\operatorname{form}(G) \subseteq \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{H})}$, что противоречит выбору группы G. Таким образом, $\mathfrak{F} = \Theta\operatorname{form}(G)$. Следовательно, $G = G^{\mathfrak{H}}$ — группа, удовлетворяющая условию 1.

Пусть теперь p — такое число из $\pi(\mathfrak{H})$, что $\mathfrak{F}$ — $(\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p f(p))_\Theta$-критическая формация.

Пусть $f(p)$ — локальная формация. Следовательно, $f(p)$ — ω-локальная формация. В силу замечания 2 [7] $H(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$, причем $H(p) = \mathfrak{N}_p H(p)$ — Θ-формация. Значит, ввиду леммы 6 $\mathfrak{F} = \Theta\operatorname{form}(G)$, где G — такая монолитическая минимальная не $(\mathfrak{G}_{p'}H(p))$-группа с нефраттиниевым монолитом $P = G^{\mathfrak{G}_{p'}H(p)}$, что p делит $|P|$ и либо P неабелева группа, и при $p \in \pi$ G — минимальная не $(H(p))$-группа, либо $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ — абелева p-группа, и при $p \in \omega$ H — такая монолитическая минимальная не $(\mathfrak{N}_p\mathfrak{M})$-группа с монолитом $Q = H^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{M}}$, что $Q \not\subseteq \Phi(H)$ и p не делит $|Q|$.

Пусть P — абелева p-группа и $p \in \omega$. Согласно лемме 3 максимальная Θ-подформация $\mathfrak{M}$ формации $\mathfrak{F}$ имеет такой внутренний Θ-значный спутник m, что $m(p) = s\,\mathrm{form}(\mathfrak{X})$, где $\mathfrak{X}$ — множество всех собственных подгрупп группы H. По условию $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Значит, $m \leq \mathfrak{H}$ и поэтому $\mathfrak{X} \subseteq H(p)$. Предположим, что $H \in H(p)$. Тогда $G \in H(p) \subseteq \mathfrak{G}_{p'}H(p)$. Противоречие. Значит, H — минимальная не $(H(p))$-группа с монолитом $Q = H^{H(p)}$. Очевидно, что $G \notin \mathfrak{H}$. Предположим, что $H \notin \mathfrak{H}$. Пусть $\Theta\,\mathrm{form}(H) \subset \mathfrak{F}$. Следовательно, $H \in \mathfrak{H}$. Но по нашему предположению $H \notin \mathfrak{H}$. Значит, $\mathfrak{F} = \Theta\,\mathrm{form}(H)$. Тогда ввиду леммы 5 [7] имеем

$$s\,\mathrm{form}(G/F_p(G)) = s\,\mathrm{form}(G/P) = s\,\mathrm{form}(H) = s\,\mathrm{form}(H/F_p(H)).$$

Если группа H удовлетворяет условию а), то на основании леммы 1 [8] $s\,\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ является единственной максимальной s-подформацией формации $s\,\mathrm{form}(H)$. Так как $\Phi(H) = 1$, то $H = QM$. Значит, $H/Q \cong M/M \cap Q \in s\,\mathrm{form}(\mathfrak{X})$. Поскольку Q — p'-группа, то $Q \subseteq F_p(H)$. Значит, $H/F_p(H) \in s\,\mathrm{form}(\mathfrak{X})$. Таким образом,

$$H/F_p(H) \in s\,\mathrm{form}(\mathfrak{X}) \subset s\,\mathrm{form}(H) = s\,\mathrm{form}(H/F_p(H)).$$

Полученное противоречие показывает, что $G^{\mathfrak{H}} = P$. Так как при этом H — минимальная не $(H(p))$-группа, то ввиду леммы 5 G минимальная не $\mathfrak{H}$-группа. Таким образом, группа G удовлетворяет условию теоремы. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Рассмотрим теперь случай, когда $f(p)$ — абелева формация. Применяя лемму 7 и приводя рассуждения, аналогичные приведенным выше, можно показать, что $\mathfrak{F} = \Theta\,\mathrm{form}(G)$, где группа G удовлетворяет условию теоремы.

Достаточность вытекает из теоремы работы [9] и леммы 1 [8]. Теорема доказана.

Значение $\mathfrak{H}_\Theta$-критических формаций заключено в следующем их универсальном свойстве, вытекающем из результатов работы [11].

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{F}$ — наследственная ω-локальная формация, а $\mathfrak{H}$ — произвольный класс групп. Тогда в $\mathfrak{F}$ имеется, по крайней мере, одна минимальная наследственная ω-локальная не $\mathfrak{H}$-формация.*

1. *Скиба А. Н.* О критических формациях // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1980. – № 4. – С. 27–33.
2. *Шеметков Л. А.* Экраны ступенчатых формаций // Тр. Всесоюз. симпозиума по теории групп. – Киев: Наук. думка, 1980. – С. 37–50.
3. *Скиба А. Н.* О критических формациях // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев, 1993. – С. 258–268.
4. *Селькин М. В., Скиба А. Н.* О наследственных критических формациях // Сиб. мат. журн. – 1996. – **37**, № 5. – С. 1145–1153.
5. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. – М., 1978. – 272 с.
6. *Derk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. – Berlin–New York, 1992. – 889 p.
7. *Shemetkov L. A., Skiba A. N.* Multiply ω-local formations and Fitting classes of finite groups // Siberian Advances in Mathematics. – 1994. – **10**, № 2. – P. 1–30.
8. *Скиба А. Н.* О минимальных s-замкнутых локальных не π-сверхразрешимых формациях // Исследования нормального и подгруппового строения конечных групп. – Минск: Наука и техника, 1984. – С. 53–58.
9. *Селькин М. В., Скиба А. Н.* О $\mathfrak{H}_{\Theta^*}$-критических формациях // Вопр. алгебры. Вып. 14. – Гомель: Изд-во Гомел. ун-та, 1999. – С. 127–131.
10. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. – М., 1989. – 254 с.
11. *Скиба А. Н., Шеметков Л. А.* О частично локальных формациях // Докл. АН Беларуси. – 1995. – **39**, № 3. – С. 123–142.

Получено 15.11.00