УДК 519.21

І. В. Самойленко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЗАТУХАЮЧА МАРКОВСЬКА ВИПАДКОВА ЕВОЛЮЦІЯ

We introduce a notion of fading Markov random evolution and study properties and characteristics of this process.

Введено поняття затухаючої марковської випадкової еволюції, вивчено властивості та характеристики цього процесу.

1. Вступ. Відома модель Гольдштейна – Каца [1, 2] описує еволюцію частки на прямій. При цьому на частку не діють зовнішні сили і неможливо визначити граничний (при $t \to \infty$) розподіл координати частки.

У запропонованій моделі затухаючої еволюції частка рухається на прямій, перебуваючи під дією зовнішньої сили (в полі тяжіння, магнітному полі і тому подібне). У результаті частку „зносить" у деяку точку, де вона „завмирає" при $t \to \infty$. На відміну від моделі Гольдштейна – Каца у випадку затухаючої еволюції можливо визначити граничний розподіл координати процесу. Обчислено також інші характеристики затухаючої еволюції: моменти, інтегральні та диференціальні рівняння, що пов'язані з подібними еволюціями.

***Означення* 1.** Затухаючим телеграфним процесом назвемо процес $\eta_t = (-a)^{\xi(t)}$, $0 < a < 1$, $\xi(u) \in \{0, 1, \ldots\}$ — марковський ланцюг, який перебуває у кожному стані час, експоненціально розподілений із параметром λ;

$$S(t) = v\int_0^t (-a)^{\xi(u)}\,du$$

— відповідна телеграфному процесу марковська випадкова еволюція, де v — додатна константа, що має зміст швидкості.

2. Кореляційна функція затухаючого телеграфного процесу. Ймовірність k пуассонівських подій на проміжку часу (t_1, t_2) дорівнює

$$p_k(t_1, t_2) = \frac{(\Lambda(t_1, t_2))^k}{k!} e^{-\Lambda(t_1, t_2)}, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

де

$$\Lambda(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t)\,dt, \qquad t_2 > t_1$$

($\lambda(t)$ — параметр експоненціального розподілу).

Лема 1. *Затухаючий телеграфний процес має кореляційну функцію*

$$B(t_1, t_2) = e^{-(1+a)(\Lambda(0, t_2) - a\Lambda(0, t_1))}.$$

Доведення. Кореляційна функція дорівнює математичному сподіванню добутку значень процесу в моменти часу t_1 і t_2, $t_1 < t_2$:

$$B(t_1, t_2) = m\left(\eta_{t_1}\eta_{t_2}\right) = e^{-\Lambda(0, t_2)} - ae^{-\Lambda(0, t_1)}\frac{\Lambda(t_1, t_2)}{1!}\times$$

$$\times\, e^{-\Lambda(t_1, t_2)} + ae^{-\Lambda(0, t_1)}\frac{\Lambda(0, t_1)}{1!}e^{-\Lambda(t_1, t_2)} + ae^{-\Lambda(0, t_1)}\frac{(\Lambda(t_1, t_2))^2}{2!}e^{-\Lambda(t_1, t_2)} -$$

$$-\, a^3 e^{-\Lambda(0, t_1)}\frac{\Lambda(0, t_1)}{1!}e^{-\Lambda(t_1, t_2)}\frac{\Lambda(0, t_1)}{1!} + a^4 e^{-\Lambda(0, t_1)}\frac{(\Lambda(0, t_1))^2}{2!}e^{-\Lambda(t_1, t_2)} + \ldots.$$

Застосовуючи співвідношення $e^{-\Lambda(0,t_2)} = e^{-\Lambda(0,t_1)}e^{-\Lambda(t_1,t_2)}$, отримуємо

$$B(t_1,t_2) = e^{-\Lambda(0,t_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (-a)^n(-a)^{n-k} \frac{(\Lambda(t_1,t_2))^k}{k!} \frac{(\Lambda(0,t_1))^{n-k}}{(n-k)!} =$$

$$= e^{-\Lambda(0,t_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-a\Lambda(t_1,t_2))^k}{k!} \frac{\left(a^2\Lambda(0,t_1)\right)^{n-k}}{(n-k)!} =$$

$$= e^{-\Lambda(0,t_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(-a\Lambda(t_1,t_2))^k}{k!} \frac{\left(a^2\Lambda(0,t_1)\right)^{n-k}}{(n-k)!} =$$

$$= e^{-\Lambda(0,t_2)} e^{-a\Lambda(t_1,t_2)} e^{a^2\Lambda(0,t_1)} =$$

$$= e^{-(1+a)\Lambda(0,t_2)} e^{(a+a^2)\Lambda(0,t_2)} = e^{-(1+a)(\Lambda(0,t_2)-a\Lambda(0,t_1))}.$$

Лему доведено.

Очевидно, при $a = 1$ маємо $B(t_1,t_2) = e^{-2\Lambda(t_1,t_2)}$, що співпадає з кореляційною функцією телеграфного процесу (див., наприклад, [3, с. 225]).

Якщо $\lambda(t) = \lambda$, то $\Lambda(t_1,t_2) = \Lambda(t_2 - t_1)$ і $B(t_1,t_2) = e^{-(1+a)[\lambda t_2 - a\lambda t_1]}$, що співпадає з $e^{-2\lambda\tau}$ $(\tau = t_2 - t_1)$ при $a = 1$ (див., наприклад, [3, с. 227]).

3. Миттєвий енергетичний спектр.

Означення 2. Миттєвим енергетичним спектром назвемо функцію

$$\Phi(t,\omega) = 4\int_0^{\infty} B(t,t+\tau)\cos\omega\tau\, d\tau.$$

Це означення співпадає з означенням миттєвого енергетичного спектру з [3, с. 220].

Лема 2. *Затухаючий телеграфний процес має енергетичний спектр*

$$\Phi(t,\omega) = 4e^{-(1-a^2)\Lambda(0,t)} \int_0^{\infty} e^{-(1+a)\Lambda(t,t+\tau)} \cos\omega\tau\, d\tau.$$

Доведення. Справедливе співвідношення

$$\Phi(t,\omega) = 4\int_0^{\infty} B(t,t+\tau)\cos\omega\tau\, d\tau = 4\int_0^{\infty} e^{-(1+a)[\Lambda(0,t+\tau)-a\Lambda(0,t)]}\cos\omega\tau\, d\tau =$$

$$= 4e^{-(1-a^2)\Lambda(0,t)} \int_0^{\infty} e^{-(1+a)\Lambda(t,t+\tau)} \cos\omega\tau\, d\tau.$$

Лему доведено.

Якщо $\Lambda(t_1,t_2) = \lambda(t_2 - t_1)$, то

$$\Phi(t,\omega) = 4e^{(a^2-1)\lambda t} \frac{(1+a)\lambda}{((1+a)\lambda)^2 + \omega^2}.$$

Зауважимо, що при $a = 1$ $\Phi(t,\omega) = \dfrac{8\lambda}{4\lambda^2 + \omega^2}$ [3, с. 228], тобто миттєвий енергетичний спектр є аналогом спектра телеграфного процесу.

4. Моменти затухаючого телеграфного процесу та відповідної еволюції. Обчислимо математичне сподівання затухаючого телеграфного процесу при умові, що $\eta_0 = 1$:

$$E[\eta_t|\eta_0=+1] = 1\frac{(\lambda t)^0}{0!}e^{-\lambda t} + (-a)\frac{(\lambda t)^1}{1!}e^{-\lambda t} + \ldots =$$

$$= e^{-\lambda t}\left[\frac{(-a\lambda t)^0}{0!} + \frac{(-a\lambda t)^1}{1!} + \ldots\right] = e^{-\lambda t}e^{-a\lambda t}.$$

Маємо аналогічно $E[\eta_t|\eta_0=-1] = -e^{-\lambda t}e^{-a\lambda t}$. Нехай $P(\eta_0=+1)=p$, а $P(\eta_0=-1) = q(p+q=1)$. Тоді

$$E[\eta_t] = E[\eta_t|\eta_0=+1] + E[\eta_t|\eta_0=-1] =$$

$$= pe^{-\lambda t}e^{-a\lambda t} - qe^{-\lambda t}e^{-a\lambda t} = re^{-\lambda t}e^{-a\lambda t} \quad (r = p - q),$$

що співпадає з першим моментом телеграфного процесу при $a = 1$ [4].

Для другого моменту маємо $(u < t)$:

$$E\left[(-a)^{\xi(u)}(-a)^{\xi(t)}\right] = p\left[1\frac{(\lambda u)^0}{0!}e^{-\lambda u}\left(e^{-\lambda(t-u)}e^{-a\lambda(t-u)}\right) + \right.$$

$$\left. + (-a)\frac{(\lambda u)^1}{1!}e^{-\lambda u}\left((-a)\frac{(\lambda(t-u))^0}{0!}e^{-\lambda(t-u)} + (-a)^2\frac{(\lambda(t-u))^1}{1!}e^{-\lambda(t-u)} + \ldots\right) + \ldots\right] +$$

$$+ q\left[-1\frac{(\lambda u)^0}{0!}e^{-\lambda u}\left(-e^{-\lambda(t-u)}e^{-a\lambda(t-u)}\right) - \right.$$

$$\left. - (-a)\frac{(\lambda u)^1}{1!}e^{-\lambda u}\left(-(-a)\frac{(\lambda(t-u))^0}{0!}e^{-\lambda(t-u)} - (-a)^2\frac{(\lambda(t-u))^1}{1!}e^{-\lambda(t-u)} - \ldots\right) - \ldots\right] =$$

$$= p\left[\left(e^{-(1+a)\lambda(t-u)}\left(\frac{(\lambda u)^0}{0!}e^{-\lambda u} + (-a)^2\frac{(\lambda u)^1}{1!}e^{-\lambda u} + \ldots\right)\right] +$$

$$+ q\left[\left(e^{-(1+a)\lambda(t-u)}\left(\frac{(\lambda u)^0}{0!}e^{-\lambda u} + (-a)^2\frac{(\lambda u)^1}{1!}e^{-\lambda u} + \ldots\right)\right] =$$

$$= e^{-(1+a)\lambda(t-u)}e^{-\lambda u}e^{a^2\lambda u} = e^{-\lambda\left[(1+a)(t-u)+(1-a^2)u\right]},$$

оскільки $p + q = 1$. Другий момент при $a = 1$ співпадає з другим моментом в [4]. Аналогічно знаходяться моменти більш високих порядків.

Лема 3. *Моменти затухаючої марковської випадкової еволюції мають вигляд*

$$E\left(V\int_0^t (-a)^{\xi(u)}du\right) = \frac{rv}{(1+a)\lambda}\left[1-e^{-(1+a)\lambda t}\right],$$

....

$$E\left(V\int_0^t (-a)^{\xi(u)}du\right)^k =$$

$$= k!V^k\int_0^t\int_0^{\tau_k}\ldots\int_0^{\tau_2} E\left[(-a)^{\xi(\tau_1)}(-a)^{\xi(\tau_2)}\ldots(-a)^{\xi(\tau_k)}\right]d\tau_1 d\tau_2\ldots d\tau_k, \qquad (1)$$

$$0 \le \tau_1 < \ldots < \tau_k \le t.$$

Доведення. Використовуючи формулу для математичного сподівання затухаючого телеграфного процесу, маємо

$$E\left(v\int_0^t (-a)^{\xi(u)} du \right) = v\int_0^t E\left[(-a)^{\xi(u)} \right] du =$$

$$= rv\int_0^t e^{-(1+a)\lambda t} du = \frac{rv}{(1+a)\lambda}\left[1 - e^{-(1+a)\lambda t} \right].$$

Моменти старших порядків обчислюються аналогічно [4], тобто вірна формула (1). Лему доведено.

5. Граничний розподіл затухаючої випадкової еволюції. Розглянемо випадкову еволюцію

$$S(\infty) = \int_0^\infty (-a)^{\xi(u)} du = \tau_1 - a\tau_2 + a^2\tau_3 - \ldots .$$

Тут τ_i — випадкові експоненціально розподілені величини. Ряд збігається за теоремою про три ряди. Легко довести, що $S(\infty)$ визначається функцією розподілу

$$F_{S(\infty)}(x) = P\{ S(\infty) < x \} = \int_0^\infty dF(y)\left[1 - F\left(\frac{(y-x)}{a} \right) \right],$$

де

$$F(x) = 1 - s^{-1}\left[e^{-\lambda x} - \frac{a^2}{1-a^2} e^{-\lambda x/a^2} + \frac{a^6}{(1-a^2)(1-a^4)} e^{-\lambda x/a^4} - \ldots \right], \quad x \geq 0,$$

$$s = 1 + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \prod_{k=1}^{2n} \frac{a^k}{1-a^k}. \tag{2}$$

***Зауваження* 1.** Справедливе співвідношення

$$s = 1 + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \prod_{k=1}^{2n} \frac{a^k}{1-a^k} =$$

$$= 1 - \frac{1}{c^2-1} + \frac{1}{(c^2-1)(c^4-1)} - \ldots, \quad c = \frac{1}{a} > 1. \tag{3}$$

Тоді

$$s = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{(0)_{c^2,n}}{(c^2)_{c^2,n}} = {}_1\Phi_0(0; -1; c^2),$$

де

$$(c)_{q,n} = (1-c)(1-cq)\ldots(1-cq^n); \qquad {}_r\Phi_s\begin{pmatrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_r; z \\ \beta_1, \ldots, \beta_s; q \end{pmatrix}$$

— базисний гіпергеометричний ряд [5, с. 196].

Очевидно, ряд (2) додатний, оскільки $0 < a < 1$, тобто $F(x) \leq 1$; ряд (3) збігається, тому що він знакозмінний і $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, тобто $s < \infty$.

Для знаходження розподілу $F_{S(\infty)}(x)$ проведемо наступні викладки:

$$S(\infty) = \tau_1 - a\tau_2 + a^2\tau_3 - \ldots =$$

$$= [\tau_1 + a\tau_3 + \ldots] - a[\tau_2 + a\tau_4 + \ldots], \quad 0 < a < 1.$$

Оскільки τ_i однаково розподілені з параметром λ, знайдемо функцію розподілу для $\zeta = \tau_1 + a^2\tau_3 + \ldots$:

$$F(x) = P\{\zeta < x\} = P\left\{\tau_1 + a^2\zeta' < x\right\} =$$

$$= \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda u} P\left\{u + a^2\zeta' < x\right\} du = \lambda\int_0^x e^{-\lambda u} P\left\{\zeta' < \frac{x-u}{a^2}\right\} du.$$

Таким чином,

$$F(x) = \lambda\int_0^x e^{-\lambda u} F\left(\frac{x-u}{a^2}\right) du.$$

Очевидно, $F(0) = 0$; будемо шукати $F(x)$ у вигляді

$$F(x) = 1 + a_1 e^{-\lambda x} + a_2 e^{-\lambda x/a^2} + a_3 e^{-\lambda x/a^4} + \ldots, \tag{4}$$

$$F(x) = \lambda\int_0^x e^{-\lambda u}\left[1 + a_1 e^{-\lambda(x-u)/a^2} + a_2 e^{-\lambda(x-u)/a^4} + \ldots\right] du =$$

$$= 1 - e^{-\lambda x} + \frac{a_1 a^2 e^{-\lambda x/a^2}}{1-a^2}\left(e^{(1-a^2)\lambda x/a^2} - 1\right) +$$

$$+ \frac{a_2 a^4 e^{-\lambda x/a^4}}{1-a^4}\left(e^{(1-a^4)\lambda x/a^4} - 1\right) + \ldots .$$

Порівнюючи з (4), маємо

при $e^{-\lambda x}$: $a_1 = -1 + \dfrac{a_1 a^2}{1-a^2} + \dfrac{a_1 a^4}{1-a^4} + \ldots;$

при $e^{-\lambda x/a^2}$: $a_2 = -\dfrac{a_1 a^2}{1-a^2};$

при $e^{-\lambda x/a^4}$: $a_3 = -\dfrac{a_2 a^4}{1-a^4}$

і т. д. Далі одержуємо

$$a_1 = -1 + \frac{a_1 a^2}{1-a^2} - \frac{a_1 a^6}{(1-a^2)(1-a^4)} + \ldots,$$

звідки

$$a_1\left[1 + \frac{a^2}{1-a^2} - \frac{a^6}{(1-a^2)(1-a^4)} - \ldots\right] = -1.$$

Оскільки ряд у квадратних дужках збігається (див. зауваження 1), позначимо його суму $s < \infty$.

Таким чином,

$$a_1 = -\frac{1}{s}; \quad a_2 = -\frac{a^2}{s(1-a^2)}; \quad a_3 = -\frac{a^6}{s(1-a^2)(1-a^4)}; \quad \ldots .$$

Маємо функцію розподілу для $\zeta = \tau_1 + a^2\tau_3 + \ldots$:

$$F(x) = 1 - s^{-1}\left[e^{-\lambda x} - \frac{a^2}{1-a^2}e^{-\lambda x/a^2} + \frac{a^6}{(1-a^2)(1-a^4)}e^{-\lambda x/a^4} - \ldots\right], \quad x \ge 0.$$

Функція розподілу для

$$S(\infty) = \left[\tau_1 + a^2\tau_3 + \ldots\right] - a\left[\tau_2 + a^2\tau_4 + \ldots\right]$$

має вигляд

$$F_{S(\infty)}(x) = P\{S(\infty) < x\} = P\left\{-a\left[\tau_2 + a^2\tau_4 + \ldots\right] < x - \left[\tau_1 + a^2\tau_3 + \ldots\right]\right\} =$$

$$= P\left\{\left[\tau_2 + a^2\tau_4 + \ldots\right] > \frac{\left[\tau_1 + a^2\tau_3 + \ldots\right] - x}{a}\right\} = \int_0^\infty dF(y)\left[1 - F\left(\frac{y-x}{a}\right)\right].$$

6. Інтегральне рівняння для функціонала від затухаючої випадкової еволюції. Розглянемо функціонали випадкової еволюції вигляду

$$u_+(\upsilon, x, t) = E\left[f\left(x + \upsilon\int_0^t \eta_u\,du\right)\Big|\eta_0 = +1\right],$$

$$u_-(\upsilon, x, t) = E\left[f\left(x + \upsilon\int_0^t \eta_u\,du\right)\Big|\eta_0 = -1\right].$$

Запишемо інтегральні рівняння для цих функціоналів, які назвемо інтегральними рівняннями Колмогорова:

$$u_+(\upsilon, x, t) = E\left[f\left(x + \upsilon\int_0^t (-a)^{\xi(u)}\,du\right)\Big|\eta_0 = +1\right] =$$

$$= P(N(t) = 0)Ef(x + \upsilon t) + \int_0^t P(N(ds) = 1)Ef\left(x + \upsilon s - a\upsilon\int_s^t (-a)^{\xi(u)}\,du\right) =$$

$$= e^{-\lambda t}f(x + \upsilon t) + \int_0^t \lambda e^{-\lambda s}E\left[f\left(x + \upsilon s + a\upsilon\int_0^{t-s} \eta_u\,du\right)\Big|\eta_0 = -1\right]ds =$$

$$= e^{-\lambda t}f(x + \upsilon t) + \int_0^t \lambda e^{-\lambda s}u_-(a\upsilon, x + \upsilon s, t - s)\,ds.$$

Тут враховується, що

$$\int_s^t (-a)^{\xi(u)}\,du = \int_0^{t-s} (-a)^{\xi(u)}\,du, \tag{5}$$

оскільки $\xi(u)$ однорідне. Аналогічно для $u_-(\upsilon, x, t)$ маємо

$$u_-(\upsilon, x, t) = e^{-\lambda t}f(x - \upsilon t) + \int_0^t \lambda e^{-\lambda s}u_+(a\upsilon, x - \upsilon s, t - s)\,ds. \tag{6}$$

Підставляючи (6) у (5), одержуємо для $u_+(\upsilon, x, t)$:

$$u_+(\upsilon, x, t) = e^{-\lambda t}f(x + \upsilon t) + \int_0^t \lambda e^{-\lambda s}e^{-\lambda(t-s)}f(x + \upsilon s - a\upsilon(t-s))\,ds +$$

$$+ \int_0^t \lambda e^{-\lambda s}\int_0^{t-s} e^{-\lambda l}u_+(a^2\upsilon, x + \upsilon s - a\upsilon l, t - s - l)\,dl\,ds =$$

$$= e^{-\lambda t}f(x + \upsilon t) + \lambda e^{-\lambda t}\int_0^t f(x + \upsilon s - a\upsilon(t-s))\,ds +$$

$$+ \lambda^2 \int_0^t \int_s^t e^{-\lambda m} u_+(a^2 v, x + vs - avm + avs, t - m)\, dm\, ds. \tag{7}$$

Аналогічно

$$u_-(v, x, t) = e^{-\lambda t} f(x - vt) + \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t f(x - vs + av(t - s))\, ds +$$

$$+ \lambda^2 \int_0^t \int_s^t e^{-\lambda m} u_-(a^2 v, x - vs + avm - avs, t - m)\, dm\, ds. \tag{8}$$

Розглянемо питання про існування розв'язків інтегральних рівнянь (7), (8) у просторі функцій (див. [6], гл. 4)

$$f(v, x, t) = f_0(v, x, t) + c, \tag{9}$$

$$c = \text{const}; \quad f_0(v, x, t) \to 0, \quad v, x, t \to \infty.$$

Теорема 1. *Для* $f(x)$ *з простору* (9) *рівняння* (7), (8) *мають єдиний розв'язок у просторі* (9). *Розв'язками є*

$$\lim_{n \to \infty} u_n(v, x, t) = \lim_{n \to \infty} A u_{n-1}(v, x, t),$$

де $u_0(v, x, t)$ *— довільна функція з простору* (9).

Доведення. У [6] доведено, що простір (9) банахів відносно sup-норми, тому можна застосувати принцип стислих відображень.

Для $u_+(v, x, t)$ запишемо рівняння (7) у вигляді

$$u_+(v, x, t) = A u_+(v, x, t),$$

де

$$A\varphi(v, x, t) = e^{-\lambda t} f(x + vt) + \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t f(x + vs - av(t - s))\, ds +$$

$$+ \lambda^2 \int_0^t \int_s^t e^{-\lambda m} \varphi(a^2 v, x + vs - avm + avs, t - m)\, dm\, ds.$$

Легко перевірити, що оператор A діє з простору (9) у простір (9) і є оператором стиску для $f(x)$, $\varphi(v, x, t)$ з простору (9). Таким чином, A має єдину нерухому точку та існує границя $\lim_{n \to \infty} A u_{n-1}(v, x, t)$, яка є розв'язком інтегрального рівняння для $u_+(v, x, t)$ (тут $u_0(v, x, t)$ — довільна функція з простору (8)). Аналогічні викладки справедливі для $u_-(v, x, t)$. Теорему доведено.

Розв'язок існує і для деяких функцій, що не належать простору (9). Наприклад, для функцій $f(x) = x^k$, $k = 1, 2, \ldots$.

Приклад. $f(x) = x$. Нехай $u_0(v, x, t) = 0$, тоді для $u_+(v, x, t)$ маємо

$$u_1(v, x, t) = e^{-\lambda t}\left(x + xt + vt - \frac{avt^2}{2} + \frac{vt^2}{2}\right),$$

$$u_2(v, x, t) = u_1(v, x, t) + \lambda^2 e^{-\lambda t}\left(\frac{xt^2}{2} + \frac{xt^3}{6} + \frac{\lambda^2 t^3 v}{6}(1 - a + a^2)\right) +$$

$$+ \frac{\lambda^3 t^4 v}{24}\left(1 - a + a^2 - a^3\right),$$

....

$$\lim_{n\to\infty} u_n(v,x,t) = x + \frac{v}{(1+a)\lambda}\left(1-e^{-(1+a)\lambda t}\right),$$

що співпадає з першим моментом затухаючої випадкової еволюції ($p=1$, $q=0$; $r=1$).

Зауваження 2. При $a=1$ маємо

$$u_+(v,x,t) = e^{-\lambda t} f(x+vt) + \lambda e^{-\lambda t}\int_0^t f(x+v(t-2s))\,ds +$$

$$+ \lambda^2 \int_0^t \int_s^t e^{-\lambda m} u_+(v, x+v(2s-m), t-m)\,dm\,ds.$$

Покладаючи $u_+(v,x,t) = u_+(x,t)$, отримуємо рівняння, вказане в [7] для випадкових еволюцій, що відповідають телеграфному процесу. Аналогічно для $u_-(v,x,t)$.

У моделі Каца доведено, що функціонали від випадкової еволюції є розв'язками задачі Коші для телеграфного рівняння [1]. Знайдемо аналогічну задачу Коші для рівняння в частинних похідних, яку задовольняють функціонали від затухаючої випадкової еволюції.

Нехай, як і раніше, $P(\eta_0=+1)=p$, $P(\eta_0=-1)=+q$, $r=p-q$. Розглянемо рівняння

$$pu_+(v,x,t) - qu_-(v,x,t) = p\left\{e^{-\lambda t} f(x+vt) + \lambda e^{-\lambda t}\int_0^t f(x+vs-av(t-s))\,ds +\right.$$

$$\left.+ \lambda^2 \int_0^t \int_s^t e^{-\lambda m} u_+\left(a^2 v, x+vs-avm+avs, t-m\right)dm\,ds\right\} -$$

$$- q\left\{e^{-\lambda t} f(x-vt) + \lambda e^{-\lambda t}\int_0^t f(x-vs+av(t-s))\,ds +\right.$$

$$\left.+ \lambda^2 \int_0^t \int_s^t e^{-\lambda m} u_-\left(a^2 v, x-vs+avm-avs, t-m\right)dm\,ds\right\}. \qquad (10)$$

Теорема 2. *Задача Коші*

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3}u(v,x,t) + 3\lambda\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(v,x,t) + 3\lambda^2\frac{\partial}{\partial t}u(v,x,t) - \lambda^2\frac{\partial}{\partial t}u(a^2v,x,t) -$$

$$- a^2v^2\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}u(v,x,t) - a^2v^2\lambda\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(v,x,t) -$$

$$- (1-a)\lambda^2 v u(a^2v^2,x,t) + \lambda^3 u(v,x,t) - \lambda^3 u(a^2v,x,t) = 0,$$

$$u(v,x,0) = f(x), \qquad \frac{\partial}{\partial t}u(v,x,t)\Big|_{t=0} = rv\frac{d}{dx}f(x),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(v,x,t)\Big|_{t=0} = -r(1+a)\lambda v\frac{d}{dx}f(x) + rv^2\frac{d^2}{dx^2}f(x), \qquad (11)$$

де $u(v,x,t) = pu_+(v,x,t) - qu_-(v,x,t)$ *еквівалентна інтегральному рівнянню* (10), *тобто якщо* $u(v,x,t)$ *задовольняє* (10) *і є тричі диференційовною відносно* x *і* t, *то вона задовольняє* (11).

Доведення. Зробимо в (10) заміну змінних

$$pu_+(v,x,t) - qu_-(v,x,t) = p\Big\{ e^{-\lambda t} f(x+vt) + \lambda e^{-\lambda t}\int_0^t f(x+vs-av(t-s))ds -$$

$$- \lambda^2 e^{-\lambda t}\int_0^t\int_0^{t-f} e^{\lambda f} u_+\big(a^2 v, x+vs+avs+avf-avt, f\big)ds\,df \Big\} -$$

$$- q\Big\{ e^{-\lambda t} f(x-vt) + \lambda e^{-\lambda t}\int_0^t f(x-vs+av(t-s))ds -$$

$$- \lambda^2 e^{-\lambda t}\int_0^t\int_0^{t-f} e^{\lambda f} u_-\big(a^2 v, x-vs-avs-avf+avt, f\big)ds\,df \Big\}.$$

Диференціюючи дане рівняння по x і t та виражаючи інтеграли через функціонали і похідні функціоналів, отримуємо задачу Коші (11). Теорему доведено.

Підставляючи в рівняння і початкові умови затухаючої еволюції, безпосередньо переконуємося, що при $f(x) = x^k$ відповідні функціонали $u(v,x,t)$ задовольняють задачу Коші (11).

Зауваження 3. При $a = 1$ маємо

$$\left\{ \frac{\partial^3}{\partial t^3}u(x,t) + 2\lambda\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) - v^2\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}u(x,t) \right\} +$$

$$+ \left\{ \lambda\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) + 2\lambda^2\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - v^2\lambda\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\}u(x,t) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) + 2\lambda\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) \right\} +$$

$$+ \lambda\left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) + 2\lambda\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) \right\} = 0,$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \lambda \right\}\left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\lambda\frac{\partial}{\partial t} - v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\}u(x,t) = 0.$$

Це факторизоване рівняння, друга компонента якого співпадає з телеграфним рівнянням (див., наприклад, [8]). Відповідно, якщо $u(x,t)$ задовольняє (11) при $a = 1$, то вона задовольняє телеграфне рівняння.

1. *Кац М.* Несколько вероятностных задач физики и математики. – М.: Наука, 1967. – 176 с.
2. *Турбин А. Ф.* Одномерный процесс броуновского движения — альтернатива модели А. Эйнштейна – Н. Винера – П. Леви // Фрактал. аналіз та суміж. питання. – К: Ін-т математики НАН України, 1998.
3. *Левин Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. Книга первая. – М.: Сов. радио, 1966. – 728 с.
4. *Самойленко И. В.* Моменты марковских случайных эволюций // Укр. мат. журн. (у друці).
5. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендетные функции. – М.: Наука, 1996. – 296 с.
6. *Koroljuk V. S., Turbin A. F.* Mathematical foundation of state lumping of large systems. – Amsterdam: Kluver Acad. Press, 1990. – 280 p.
7. *Samoilenko I. V.* Integral representation of hyperparabolical equation // Nonlinear oscillations (to appear).
8. *Глиннер Э. Б., Кошляков Н. С.* Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высш. шк., 1970. – 712 с.

Одержано 23.01.01