УДК 517.925.3

Р. И. Гладилина, А. О. Игнатьев
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

We prove that sufficient conditions of asymptotic stability for impulsive systems which were obtained by S. I. Gurgula and N. A. Perestyuk are also necessary conditions.

Доведено, що достатні умови асимптотичної стійкості імпульсних систем з імпульсною дією, одержані С. І. Гургулою і М. О. Перестюком, є також необхідними умовами.

В то время, как большинство физических систем моделируется дифференциальными либо разностными уравнениями, теория дифференциальных уравнений с импульсным воздействием является, по существу, комбинацией дифференциальных и разностных систем и описывает непрерывные эволюции и дискретные события, имеющие место в реальных моделях физических систем. Основы этой теории изложены в монографии [1]. В последнее время в связи с запросами современной техники эта теория интенсивно развивается по многим направлениям [2 – 5]. Одним из наиболее важных направлений является теория устойчивости таких систем [6 – 10] и, в частности, метод функций Ляпунова [11 – 13]. В работах [8, 10] показано, что если существует функция Ляпунова, имеющая определенные свойства, то нулевое решение системы с импульсным воздействием равномерно асимптотически устойчиво. Целью настоящей работы является доказательство обратного утверждения: если нулевое решение системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием равномерно асимптотически устойчиво, то существует функция Ляпунова с соответствующими свойствами.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t,x), \quad t \neq \tau_i, \quad t \in R_+, \\ \Delta x &= J_i(x), \quad t = \tau_i, \quad i \in N, \end{aligned} \tag{1}$$

где $t \in R_+ = [0, \infty)$, $x \in B_H \subset R^n$, $B_H = \{x \in R^n : \|x\| \le H\}$; $\|\cdot\|$ означает евклидову норму. Будем считать $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$. Предположим, что выполняются следующие гипотезы в отношении системы (1):

Γ_1) в области $R_+ \times B_H$ функция $f(t,x)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица равномерно по $t \in R_+$:

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \le L\|x_1 - x_2\|, \quad f(t,0) \equiv 0;$$

Γ_2) функции $J_i(x)$ непрерывны и удовлетворяют условию Липшица: $\|J_i(x_1) - J_i(x_2)\| \le L\|x_1 - x_2\|$ для $x_1 \in B_H$, $x_2 \in B_H$, $i \in N$; кроме того, $J_i(0) = 0$, $i \in N$;

Γ_3) $\tau_{i+1} - \tau_i \ge \theta > 0$ при $i \in N$.

В дальнейшем будем использовать обозначения: $E = \bigcup_{l=1}^{\infty} (\tau_{l-1}, \tau_l)$, $x(t) = F(t, t_0, x_0)$ — решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию $F(t_0, t_0, x_0) = x_0$, $x_0 \in B_H$, если $t_0 \in E$. В случае, если $t_0 = \tau_i$, $i \in N$, под выражением

$F(t, t_0, x_0)$ при $t > t_0$ будем понимать решение системы (1) с начальным условием $F(t_0+0, t_0+0, x_0+J_i(x_0)) = x_0+J_i(x_0)$. Согласно [1, 10] решение $x(t)$ предполагается непрерывным слева в точках τ_i: $x(\tau_i) = x(\tau_i - 0)$, $i \in N$. Введем следующие определения.

Определение 1. *Нулевое решение системы* (1) *называется равномерно устойчивым, если для заданного* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что* $\| F(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$ *для любых* $t_0 \in R_+$, $x_0 \in B_\delta$ *и* $t \geq t_0$.

Определение 2. *Решение* $x = 0$ *системы* (1) *называется равномерно притягивающим, если для некоторого* $\eta > 0$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$ *такое, что* $\| F(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$ *для всех* $\|x_0\| < \eta$, $t_0 \in R_+$ *и* $t \geq t_0 + \sigma$. *При этом будем говорить, что область* B_η *содержится в области притяжения нулевого решения системы* (1).

Определение 3. *Нулевое решение системы* (1) *называется равномерно асимптотически устойчивым, если оно равномерно устойчиво и равномерно притягивающее.*

Определение 4. *Будем говорить, что функция* $v : R_+ \times B_H \to R$ *принадлежит классу* V_0, *если функция* v *непрерывна на множестве* $G = E \times B_H$, *удовлетворяет условию Липшица по* x *на* G, $v(t, 0) \equiv 0$ *при* $t \in R_+$ *и для любого* $k \in N$ *существуют конечные пределы*

$$\lim_{t \to \tau_k - 0} v(t, x) = v(\tau_k, x), \qquad \lim_{t \to \tau_k + 0} v(t, x) = v(\tau_k + 0, x).$$

Обозначим через K класс функций Хана [14, с. 21], т. е. класс функций $g : R_+ \to R_+$, непрерывных, строго возрастающих и удовлетворяющих условию $g(0) = 0$.

В работах [8, 10] доказана теорема, модификацию которой можно сформулировать в следующем виде.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* $\Gamma_1) - \Gamma_3)$ *и существуют функции* $v \in V_0$, $g \in K$, $b \in K$, $c \in K$ *такие, что*

$$v(t, x) \geq g(\|x\|) \quad \text{для} \quad t \in R_+, \quad x \in B_H, \tag{2}$$

$$v(t, x) \leq b(\|x\|) \quad \text{для} \quad t \in R_+, \quad x \in B_H, \tag{3}$$

$$D^+ v(t, x) \leq -c(\|x\|) \quad \text{для} \quad (t, x) \in G, \tag{4}$$

где $D^+ v(t, x)$ *обозначает правую верхнюю производную Дини вдоль решения* $x(t)$,

$$v(\tau_k + 0, x + J_k(x)) \leq v(\tau_k, x) \quad \text{для} \quad k \in N, \quad x \in B_H. \tag{5}$$

Тогда решение $x = 0$ *системы* (1) *равномерно асимптотически устойчиво и существует* $h > 0$, $h < H$, *такое, что* B_h *содержится в области его притяжения.*

Покажем, что теорема 1 обратима. Для этого докажем вначале следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть* $\psi(\tau) : R_+ \to R_+$ — *неотрицательная ограниченная кусочно-непрерывная функция, стремящаяся к нулю при* $\tau \to +\infty$, *с точками разрыва первого рода* $\tau_1, \ldots, \tau_n, \ldots$, *непрерывная слева в точках разрыва* $\psi(\tau_i) = \psi(\tau_i - 0)$, $i \in N$, *причем* $\tau_i - \tau_{i-1} \geq \theta > 0$, $\tau_0 = 0$, *и на множестве* $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\tau_{i-1}, \tau_i)$ *функция* $\psi(\tau)$ *имеет производную* $\psi'(\tau)$, *удовлетворяющую условию* $|\psi'(\tau)| \leq P$. *Тогда функция* $f(t) = \sup_{t \leq \tau < \infty} \psi(\tau)$ *при любом значе-*

нии $t \in R_+$ *имеет односторонние производные, удовлетворяющие условиям*

$$-P \leq f'(t-0) \leq 0, \quad -P \leq f'(t+0) \leq 0. \tag{6}$$

Доказательство. Заметим, что кривая $y = f(t)$ при $t \in R_+$ представляет собой чередующиеся участки кривой $y = \psi(t)$, на которых $\psi(t)$ не убывает, и участки, на которых функция $f(t)$ постоянна, т. е. $f(t)$ — кусочно-непрерывная монотонно неубывающая функция, стремящаяся к нулю при $t \to +\infty$. Точками разрыва могут быть лишь точки $t = \tau_i$, $i \in N$. Эта функция при $t \in R_+$ имеет односторонние производные $f'(t \pm 0)$, удовлетворяющие условиям (6), что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Пусть* $f_1 : R_+ \to R_+$, $f_2 : R_+ \to R_+$ *— две ограниченные неотрицательные кусочно-непрерывные функции такие, что*

$$\lim_{t \to \infty} f_1(t) = 0, \qquad \lim_{t \to \infty} f_2(t) = 0.$$

Тогда выполняется неравенство

$$\left| \sup_{t \in R_+} f_1(t) - \sup_{t \in R_+} f_2(t) \right| \leq \sup_{t \in R_+} \left| f_1(t) - f_2(t) \right|.$$

Доказательство. В случае $\sup_{t \in R_+} f_1(t) = \sup_{t \in R_+} f_2(t)$ справедливость леммы 2 очевидна. Предположим, что $\sup_{t \in R_+} f_1(t) \neq \sup_{t \in R_+} f_2(t)$. Не нарушая общности, будем считать $\sup_{t \in R_+} f_1(t) > \sup_{t \in R_+} f_2(t)$. В силу того, что функции $f_1(t)$, $f_2(t)$, оставаясь неотрицательными, стремятся к нулю при $t \to \to \infty$, существуют конечные значения t_1, t_2, t_3 такие, что $\sup_{t \in R_+} f_1(t) = = f_1(t_1)$, $\sup_{t \in R_+} f_2(t) = f_2(t_2)$, $\sup_{t \in R_+} \left| f_1(t) - f_2(t) \right| = \left| f_1(t_3) - f_2(t_3) \right|$. Следовательно, $f_1(t_1) - f_2(t_2) \leq f_1(t_1) - f_2(t_1) \leq \left| f_1(t_3) - f_2(t_3) \right|$, что и доказывает справедливость леммы 2.

Теорема 2. *Пусть справедливы гипотезы* $\Gamma_1) - \Gamma_3)$, *решение* $x = 0$ *системы* (1) *равномерно асимптотически устойчиво и множество* B_h, $0 < h < H$, *содержится в области его притяжения. Тогда существуют константы* $P > 0$, $L_1 > 0$ *и функции* $g \in K$, $b \in K$, $c \in K$, $v : R_+ \times B_h \to R_+$ *такие, что* $v \in V_0$, $| v(t, x_1) - v(t, x_2) | \leq L_1 \| x_1 - x_2 \|$ *при* $t \in R_+$, $x_1 \in B_h$, $x_2 \in B_h$, *и выполняются условия* (2) – (5) *и* $D^+ v(t, x) \geq -P$.

Если система (1) *периодична с периодом* ω, *то функция* v *также может быть выбрана периодической с периодом* ω.

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$ — скалярная монотонно убывающая непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству

$$\| F(t, t_0, x_0) \| \leq \varphi(t - t_0) \quad \text{при} \quad t \geq t_0 \tag{7}$$

для любого $x_0 \in B_h$, такая, что $\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = 0$. Существование такой функции $\varphi(t)$ следует из свойства равномерности асимптотической устойчивости в смысле определения 3. (Достаточно в качестве $\varphi(t)$ выбрать любую непрерывную положительную монотонно убывающую к нулю функцию, удовлетворяющую неравенству $\varphi(t) > \varepsilon$ при $t \in [\sigma(\varepsilon), \sigma(\varepsilon/2)]$.)

Обозначим через $M(t) : R_+ \to R_+$ монотонно возрастающую непрерывную функцию такую, что $\lim_{t \to \infty} M(t) = +\infty$. В монографии [15, с. 310 – 315] показано существование функции $g = g(\varphi) : R_+ \to R_+$ такой, что g — непрерывно дифференцируемая функция, причем

$$g \in K, \qquad g' \in K, \tag{8}$$

$$\int_0^\infty g(\varphi(\tau))d\tau = N_1 < +\infty, \tag{9}$$

$$\int_0^\infty g'(\varphi(\tau))M(\tau)d\tau = N_1 < +\infty, \tag{10}$$

$$g'(\varphi(\tau))M(\tau) < N_3 \quad \text{при всех} \quad \tau \geq 0, \tag{11}$$

где N_1, N_2, N_3 — положительные константы.

Покажем, что функция

$$\upsilon(t,x) = \int_t^\infty g(\|F(\tau,t,x)\|)d\tau + \sup_{t\leq\tau<\infty} g(\|F(\tau,t,x)\|) \tag{12}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы.

Интеграл (9) сходится, поэтому на основании оценки (7) сходится интеграл в правой части (12), следовательно, функция υ определена в области

$$R_+ \times B_h. \tag{13}$$

Заметим, что $\sup_{t\leq\tau<\infty}(\|F(\tau,t,x)\|) \geq \|x\|$. В силу (8) имеем

$$\int_t^\infty g(\|F(\tau,t,x)\|)d\tau \geq 0, \qquad \sup_{t\leq\tau<\infty} g(\|F(\tau,t,x)\|) \geq g(\|x\|),$$

т. е. функция υ удовлетворяет неравенству (2).

Из оценки (7) получаем $\|F(t,t_0,x_0)\| \leq \varphi(0)$ для всех t_0, x_0, принадлежащих области (13), поэтому

$$\upsilon(t,x) \leq \int_0^\infty g(\varphi(\tau))d\tau + g(\varphi(0)) = N_4 = \text{const}.$$

Следовательно, в области (13) функция υ равномерно ограничена. Покажем, что функция υ удовлетворяет условию Липшица по x. Используя лемму 2, получаем

$$|\upsilon(t,x_1) - \upsilon(t,x_2)| = \left| \int_t^\infty [g(\|F(\tau,t,x_1)\|) - g(\|F(\tau,t,x_2)\|)]d\tau + \right.$$

$$\left. + \left[\sup_{t\leq\tau<\infty} g(\|F(\tau,t,x_1)\|) - \sup_{t\leq\tau<\infty} g(\|F(\tau,t,x_2)\|)\right] \right| \leq$$

$$\leq \int_t^\infty g'_\varphi(\sup(\|F(\tau,t,x_1)\|, \|F(\tau,t,x_2)\|))\|F(\tau,t,x_1) - F(\tau,t,x_2)\|d\tau +$$

$$+ \sup_{t\leq\tau<\infty} \left|(g(\|F(\tau,t,x_1)\|) - g(\|F(\tau,t,x_2)\|))\right|. \tag{14}$$

Согласно оценке (2.24) из монографии [1] имеем

$$\|F(\tau,t,x_1) - F(\tau,t,x_2)\| < M(\tau - t)\|x_1 - x_2\|, \tag{15}$$

где $M: R_+ \to R_+$ — монотонно возрастающая положительная непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству

$$M(\tau - t) > (1+L)^p e^{L(\tau - t)},$$

где p — количество точек τ_i на промежутке $[t; \tau]$. В силу свойства Γ_3) такая функция действительно существует. Учитывая неравенство (15) и применяя ко второму слагаемому правой части соотношений (14) теорему о среднем, с помощью оценок (10), (11) получаем

$$|v(t, x_1) - v(t, x_2)| \le$$

$$\le \|x_1 - x_2\| \left[\int\limits_t^\infty g'_\varphi(\sup(\|F(\tau, t, x_1)\|, \|F(\tau, t, x_2)\|)) M(\tau - t) d\tau \; + \right.$$

$$\left. + \sup_{t \le \tau < \infty} \left(g'_\varphi(\varphi(\tau - t)) \right) M(\tau - t) \right] \le (N_2 + N_3) \|x_1 - x_2\|, \tag{16}$$

что и доказывает тот факт, что v удовлетворяет условию Липшица по x равномерно по t. Из условия Липшица следует существование функции $b \in K$ такой, что выполняется неравенство (3). В качестве $b(\|x\|)$ можно выбрать функцию $(N_2 + N_3)\|x\|$.

Проверим теперь непрерывность функции $v(t, x)$ при $(t, x) \in G$. В силу свойства (16) для этого достаточно проверить непрерывность функции v по t при $t \in (\tau_i, \tau_{i+1})$. Первое слагаемое в правой части (12) является функцией, непрерывной по t при $t \in R_+$ и дифференцируемой по t при $t \ne \tau_i$, а второе слагаемое непрерывно по t при $t \ne \tau_i$ и имеет ограниченные неположительные левостороннюю и правостороннюю производные по t при $t \in R_+$ в силу леммы 1. Рассмотрим $D^+ v(t, x)$ вдоль решений $F(t, t_0, x_0)$ системы (1). Имеем $D^+ v = D^+ \overline{v}$, где $\overline{v}$ — результат подстановки в функцию v произвольного решения $F(t, t_0, x_0)$ уравнений (1). Но

$$\overline{v} = \int\limits_t^\infty g(\|F(\tau, t, F(t, t_0, x_0))\|) d\tau + \sup_{t \le \tau < \infty} g(\|F(\tau, t, F(t, t_0, x_0))\|) =$$

$$= \int\limits_t^\infty g(\|F(\tau, t_0, x_0)\|) d\tau + \sup_{t \le \tau < \infty} g(\|F(\tau, t, F(t, t_0, x_0))\|),$$

так как $F(\tau, t, F(t, t_0, x_0)) \equiv F(\tau, t_0, x_0)$. Отсюда при $t = t_0$ получаем

$$D^+ v(t, F(t, t_0, x_0))\big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}\left(\int\limits_t^\infty g(\|F(\tau, t_0, x_0)\|) \right) d\tau \bigg|_{t=t_0} +$$

$$+ \lim_{\Delta t \to 0+0} \sup \left(\sup_{t_0 + \Delta t \le \tau < \infty} g(\|F(\tau, t_0, x_0)\|) - \sup_{t_0 \le \tau < \infty} g(\|F(\tau, t_0, x_0)\|) \right).$$

Второе слагаемое в правой части последнего равенства неположительно, поэтому

$$D^+ v(t, F(t, t_0, x_0))\big|_{t=t_0} \le -g(\|F(t_0, t_0, x_0)\|) = -g(\|x_0\|),$$

т. е. $D^+ v$ удовлетворяет соотношению (4).

При $x = F(\tau_k, t_0, x_0)$ имеем $x + J_k(x) = F(\tau_k + 0, t_0, x_0)$, откуда, учитывая, что второе слагаемое в равенстве (12) — функция невозрастающая, получаем, что неравенство (5) выполняется вдоль траектории $x = F(t, t_0, x_0)$ системы (1).

Предположим теперь, что система (1) периодична с периодом ω. Это означает, что $f(t+\omega, x) \equiv f(t, x)$ и существует такое $q \in N$, что $J_k(x) \equiv J_{k+q}(x)$ и $\tau_{k+q} = \tau_k + \omega$ для любого целого положительного k. Покажем, что в этом случае функция $v(t, x)$, определяемая равенством (12), имеет свойство $v(t+\omega, x) \equiv v(t, x)$. Действительно,

$$v(t+\omega, x) = \int_{t+\omega}^{\infty} g(\|F(\tau, t+\omega, x)\|)d\tau + \sup_{t+\omega \le \tau < \infty} g(\|F(\tau, t+\omega, x)\|).$$

Вводя новую переменную s по формуле $\tau = s + \omega$, находим

$$v(t+\omega, x) = \int_{t}^{\infty} g(\|F(s+\omega, t+\omega, x)\|)ds + \sup_{t \le s < \infty} g(\|F(s+\omega, t+\omega, x)\|). \quad (17)$$

Используя очевидное свойство решений периодических систем

$$F(t+\omega, t_0+\omega, x_0) = F(t, t_0, x_0), \quad (18)$$

на основании равенств (17), (18) получаем $v(t+\omega, x) \equiv v(t, x)$, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Покажем одно из возможных применений доказанной теоремы. Пусть система (1) имеет равномерно асимптотически устойчивое решение

$$x = 0. \quad (19)$$

Наряду с системой (1) рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + f_*(t, x), \qquad t \ne \tau_i,$$
$$\Delta x\Big|_{t=\tau_i} = J_i(x) + J_i^*(x) = I_i(x), \qquad i \in N, \quad (20)$$

где $f_*(t, x)$, $J_i^*(x)$ — непрерывные функции, удовлетворяющие условию Липшица по x равномерно по $i \in N$, такие, что $f_*(t, 0) \equiv 0$, $J_i^*(0) = 0$ при $i \in N$. При сформулированных предположениях о правых частях систем (1) и (20) справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Если нулевое решение системы* (1) *равномерно асимптотически устойчиво и выполняются предельные соотношения*

$$\lim_{t\to\infty} f_*(t, x) = 0, \qquad \lim_{i\to\infty} J_i^*(x) = 0 \quad (21)$$

равномерно по $x \in B_H$, $0 < H < \infty$, *то решение* (19) *системы* (20) *также равномерно асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Поскольку нулевое решение системы (1) равномерно асимптотически устойчиво, существует функция $v(t, x)$ и функции Хана g, b, c, удовлетворяющие условиям предыдущей теоремы. Использовав теорему Йошизавы [16], оценим вначале $D^+v(t, x)\Big|_{(20)}$ вдоль решения $x(t)$ системы (20) при $x \in B_h$:

$$D^+v(t, x)\Big|_{(20)} = \lim_{\xi\to 0+0} \sup \frac{v(t+\xi, x+\xi f(t, x)+\xi f_*(t, x)) - v(t, x)}{\xi} \le$$
$$\le \lim_{\xi\to 0+0} \sup \frac{v(t+\xi, x+\xi f(t, x)+\xi f_*(t, x)) - v(t+\xi, x+\xi f(t, x))}{\xi} +$$

$$+\lim_{\xi\to 0+0}\sup\frac{v(t+\xi, x+\xi f(t,x))-v(t,x)}{\xi} \le L_1\|f_*(t,x)\| + D^+v(t,x)\Big|_{(1)}. \quad (22)$$

Аналогично оценим величину Δv_i скачка функции v вдоль траектории $x(t)$ системы (20) в момент τ_i:

$$\Delta v_i = v\big(\tau_i+0, x+J_i(x)+J_i^*(x)\big) - v(\tau_i, x) =$$

$$= \big[v\big(\tau_i+0, x+J_i(x)+J_i^*(x)\big) - v(\tau_i+0, x+J_i(x))\big] +$$

$$+ \big[v(\tau_i+0, x+J_i(x)) - v(\tau_i, x)\big] \le v\big(\tau_i+0, x+J_i(x)+J_i^*(x)\big) -$$

$$- v(\tau_i+0, x+J_i(x)) \le L_1\|J_i^*(x)\|. \quad (23)$$

Напомним, что в неравенствах (22), (23) L_1 обозначает константу Липшица для функции v.

Покажем, что решение (19) системы (20) равномерно устойчиво. Выберем произвольное $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 < h < H$. Пусть $t_1 \in R_+$ — достаточно большой начальный момент времени. Покажем, что существует $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1) > 0$ такое, что решение $x(t) = x(t, t_1, x_1)$ системы (20) удовлетворяет условию $\|x(t)\| < \varepsilon_1$ при $t > t_1$, если только $x_1 \in B_{\delta_1}$. Обозначим $\delta_1 = b^{-1}\big(g\big(b^{-1}(g(\varepsilon_1))/(2L)\big)\big)$, где b^{-1} — функция, обратная к функции b, L — постоянная Липшица для функций $I_i(x)$, которую будем считать большей единицы ($L > 1$). Значение t_1 считаем удовлетворяющим неравенству $t_1 \ge T_1$, где T_1 столь велико, что $L_1\|f_*(t, x)\| < \gamma_1$ при $t \ge T_1$, $x \in B_{\varepsilon_1}$, и $L_1\|J_i^*(x)\| < \theta\gamma_1$ при $\tau_i \ge T_1$, $x \in B_{\varepsilon_1}$, $\gamma_1 = c(\delta_1)/2$. Поскольку предельные соотношения (21) выполняются равномерно по $x \in B_H$, а γ_1 зависит только от ε_1, T_1 можно выбрать зависящим только от ε_1. Покажем, что если $\|x_1\| < \delta_1$, то $\|x(t)\| < \|x(t, t_1, x_1)\| < \varepsilon_1$ при $t > t_1$. Траектория $x(t)$ может выйти за пределы B_{δ_1} одним из двух способов: либо существует такой номер $k \in N$, что $x(\tau_k) \in B_{\delta_1}$, $x(\tau_k) + I_k(x(\tau_k)) \,\overline{\in}\, B_{\delta_1}$, либо существует момент времени $t_* \in (\tau_{k-1}, \tau_k)$ такой, что $\|x(t_*)\| = \delta_1$, $\|x(\tau_k)\| > \delta_1$. В первом случае ($x(\tau_k) \in B_{\delta_1}$, $\tau_k > t_1$, $x(\tau_k) + I_k(x(\tau_k)) \,\overline{\in}\, B_{\delta_1}$) получаем

$$\|x(\tau_k) + I_k(x(\tau_k))\| < b^{-1}(g(\varepsilon_1)), \quad (24)$$

так как $\|I_k(x(\tau_k))\| \le L\|x(\tau_k)\|$,

$$\|x(\tau_k)\| \le \delta_1 = b^{-1}\left(g\left(\frac{b^{-1}(g(\varepsilon_1))}{2L}\right)\right) \le \frac{b^{-1}(g(\varepsilon_1))}{2L} < \frac{b^{-1}(g(\varepsilon_1))}{2}.$$

Во втором случае (существует момент времени $t_* \in (\tau_{k-1}, \tau_k)$ такой, что $\|x(t_*)\| = \delta_1$, $\|x(\tau_k)\| > \delta_1$) из условия $\|x(t_*)\| = \delta_1$ имеем

$$g(\|x(\tau_k)\|) \le v(\tau_k, x(\tau_k)) < v(t_*, x(t_*)) \le b(\delta_1) = g\left(\frac{b^{-1}(g(\varepsilon_1))}{2L}\right),$$

откуда $\|x(\tau_k)\| < b^{-1}(g(\varepsilon_1))/(2L)$ и, следовательно, выполняется неравенство (24).

Рассмотрим теперь функцию $\overline{v}(t) = v(t, x(t))$ при $t \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$. Тогда

$$g(\|x(t)\|) \le \overline{v}(t) \le \overline{v}(\tau_k+0) \le b\big(b^{-1}(g(\varepsilon_1))\big) = g(\varepsilon_1),$$

откуда

$$\|x(t)\| \le \varepsilon_1,$$

в силу того, что $g \in K$. В случае, если решение $x(t)$ на интервале $(\tau_k,$
имеет точки, принадлежащие B_{δ_1}, можно доказать аналогично предыду
что $\|x(\tau_{k+1}) + I_{k+1}(x(\tau_{k+1}))\| < b^{-1}(g(\varepsilon_1))$, и при всех $t \in (\tau_{k+1}, \tau_{k+2})$ вы
няется неравенство (25). Если же решение $x(t)$ на интервале (τ_k, τ_{k+1})
летворяет условию $\delta_1 \le \|x(t)\| \ge \varepsilon_1$, то

$$\overline{v}(\tau_{k+1}) \le \overline{v}(\tau_k) + \Delta v_k + \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} D^+\overline{v}(t)\,dt \le$$

$$\le \overline{v}(\tau_k) + \gamma_1\theta - 2\gamma_1\theta = \overline{v}(\tau_k) - \gamma_1\theta.$$

Из оценок (23), (26) получаем

$$\overline{v}(\tau_{k+1}+0) = \overline{v}(\tau_{k+1}) + \Delta v_{k+1} \le \overline{v}(\tau_k),$$

откуда следует, что на $(\tau_{k+1}, \tau_{k+2}]$ также выполняется неравенство (25).
логично доказываем, что при $t \in (\tau_{k+2}, \tau_{k+3}], \ldots,$ при $t \in (\tau_{k+s}, \tau_{k+s+1}], \ldots$
шение $x(t)$ удовлетворяет неравенству (25). Таким образом доказано, чт
любого $\varepsilon_1 > 0$ существует такое значение $T_1 = T_1(\varepsilon_1) > 0$, что при любом
$\ge T_1$ имеется $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1) > 0$ такое, что из неравенства $\|x_1\| < \delta_1$ сле
$\|x(t)\| = \|x(t, t_1, x_1)\| < \varepsilon_1$ при $t > t_1$. Из неравенства (2.24) работы [1] и
тезы Γ_3) заключаем, что имеется такое $\delta > 0$, что при любых $t_0 \in [0,$
$x_0 \in B_\delta$ решение $x(t, t_0, x_0)$ будет удовлетворять неравенству $\|x(T_1, t_0, x$
$< \delta_1$ и, следовательно, неравенству $\|x(t, t_1, x_1)\| < \varepsilon_1$ при $t > t_0$. Поско
δ_1 и T_1 зависят только от ε_1, то δ также зависит только от ε_1, что док
вает равномерную устойчивость решения (19) системы (20).

Покажем теперь, что решение (19) системы (20) — равномерно притяги
щее. Для этого выберем произвольное $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 < h$, и соответствующе
значение $\delta = \delta(\varepsilon_1) > 0$ из определения равномерной устойчивости. Пока
что для любого $\varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, найдется такое $\sigma = \sigma(\varepsilon_2) > 0$, что $\|x$
$x_0)\| < \varepsilon_2$ для всех $\|x_0\| < \delta$, $t_0 \in R_+$ и $t \ge t_0 + \sigma$. Для этого выберем
$= \delta_2(\varepsilon_2) > 0$ такое, что решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (20), оказавшись в ка
то момент времени в B_{δ_2}, в последующие моменты времени не выйдет за
делы области B_{ε_2}. Выбор такого δ_2 возможен в силу доказанного сво
равномерной устойчивости решения (19) системы (20). Согласно доказан
при $t > t_0$ выполняется неравенство $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon_1$. Оценим период в
ни, в течение которого решение $x(t, t_0, x_0)$ может принадлежать множеств

$$\delta_2 \le \|x\| < \varepsilon_1.$$

Обозначим через t_2 такой момент времени, что $L_1\|f_*(t, x)\| < \gamma_2$ при t
$x \in B_{\varepsilon_1}$, и $L_1\|J_m^*(x)\| < \theta\gamma_2$ при $\tau_m \ge t_2$, $x \in B_{\varepsilon_1}$, где $\gamma_2 = c(\delta_2)/2$. Поск
ку предельные соотношения (21) выполняются равномерно по $x \in B_H$, а γ

висит только от ε_2, t_2 можно выбрать зависящим только от ε_2. Покажем, что решение (19) системы (20) может находиться во множестве (27) в течение периода времени, не большего чем $t_3 = b(\varepsilon_1)/\gamma_2(\varepsilon_2)$. Для этого оценим величину $\overline{v}(\tau_m + s\theta)$, где s — натуральное число, приняв во внимание предположение Γ_3):

$$\overline{v}(\tau_m + s\theta) \le \overline{v}(\tau_m) + s\gamma_2 + \int\limits_{\tau_m}^{\tau_m + s\theta} D^+ \overline{v}(t)dt \le$$

$$\le \overline{v}(\tau_m) + s\gamma_2\theta - 2s\gamma_2\theta = \overline{v}(\tau_m) - s\gamma_2\theta \le b(\varepsilon_1) - s\gamma_2\theta. \tag{28}$$

Действительно, в силу оценки (28) при $s\theta > t_3$ получаем $\overline{v}(\tau_m + s\theta) < 0$, что невозможно, так как $v(t, x)$ — определенно-положительная функция. Таким образом, величину σ можно выбрать в виде $\sigma = t_2 + t_3$, где t_2 и t_3 зависят только от ε_2. Это доказывает, что нулевое решение системы (20) равномерно притягивающее, и множество B_δ принадлежит области его притяжения. Теорема доказана.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Выща шк., 1987. – 288 с.
2. *Самойленко А. М., Астафьева М. Н.* Усреднение многочастотных колебательных систем с импульсным воздействием // Докл. АН Украины. Сер. А. – 1989. – № 8. – С. 12 – 16.
3. *Самойленко А. М., Станжицкий А. Н.* О флюктуациях в схеме усреднения для дифференциальных уравнений со случайным импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 5. – С. 631 – 641.
4. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А., Трофимчук С. И.* Обобщенные решения импульсных систем и явление биений // Там же. – 1991. – **43**, № 5. – С. 657 – 663.
5. *Cabada A., Liz E.* Discontinuous impulsive differential equations with nonlinear boundary conditions // Nonlinear Anal. – 1997. – **28**, № 9. – P. 1491 – 1497.
6. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 11. – С. 1981 – 1992.
7. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Об устойчивости решений систем с импульсным воздействием // Там же. – 1981. – **17**. № 11. – С. 1995 – 2001.
8. *Гургула С. И., Перестюк Н. А.* Об устойчивости положения равновесия импульсных систем // Мат. физика. – 1982. – Вып. 31. – С. 9 – 14.
9. *Гургула С. И., Перестюк Н. А.* О втором методе Ляпунова в системах с импульсным воздействием // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 10. – С. 11 – 14.
10. *Bainov D. D., Simeonov P. S.* Systems with impulse effect: stability, theory, and applications. – New York etc.: Halsted Press, 1989. – 256 p.
11. *Свердан М. Л.* Второй метод Ляпунова исследования устойчивости дифференциальных уравнений с импульсными возмущениями и марковскими коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 6. – С. 826 – 833.
12. *Перестюк Н. А., Черникова О. С.* Устойчивость решений импульсных систем // Там же. – 1997. – **49**, № 1. – С. 98 – 111.
13. *Martynyuk A. A., Stavroulakis I. P.* Stability analysis with respect to two measures of impulsive systems under structural perturbations // Там же. – 1999. – **51**, № 11. – С. 1476 – 1484.
14. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Мир, 1980. – 300 с.
15. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 532 с.
16. *Yoshizawa T.* Stability theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions. – New York: Springer, 1975. – 223 p.

Получено 19.02.2002,
после доработки – 17.06.2002