УДК 517

В. Г. Бондаренко (Нац. техн. ун-т Украины „КПИ", Киев)

ПОСТРОЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

We propose a method of the construction of solution of a parabolic equation in the case where the diffusion operator is perturbed.

Запропоновано метод побудови розв'язку параболічного рівняння при збуренні оператора дифузії.

Введение. В настоящей работе рассматривается задача построения фундаментального решения $e^{t(L+L_1)}$ уравнения

$$\frac{du}{dt} = (L + L_1)\,u,$$

где L и L_1 — эллиптические операторы, причем свойства эволюционного оператора e^{tL} невозмущенного уравнения

$$\frac{du}{dt} = Lu$$

предполагаются известными.

Если коэффициенты L и L_1 постоянны, то

$$e^{t(L+L_1)} = e^{tL} e^{tL_1}. \tag{1}$$

Для переменных коэффициентов, удовлетворяющих некоторым ограничениям, будет доказано, что правая часть (1) при малых t является достаточно хорошим приближением для эволюционного оператора в левой части, т. е.

$$e^{t(L+L_1)} = e^{tL} e^{tL_1} + A(t), \qquad A(0) = 0,$$

и для построения семейства операторов $A(t)$ будет предложена итерационная процедура. Кроме того, рассмотрены два примера параболических уравнений.

1. Пусть L — эллиптический оператор с постоянными коэффициентами,

$$Lu = \frac{1}{2} a^{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^k},$$

возмущение L_1 имеет вид

$$L_1 u = \frac{1}{2} b^{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^k}.$$

2. $L = \Delta/2$, где Δ — оператор Лапласа – Бельтрами на полном односвязном римановом многообразии M неположительной кривизны размерности n с метрическим тензором $g_{jk}(x)$, с расстоянием ρ и объемом σ, т. е.

$$Lu(x) = \frac{1}{2}\operatorname{div}\operatorname{grad}u(x),$$

а возмущение имеет вид

$$L_1 u(x) = \frac{1}{2}\operatorname{div} b(x)\operatorname{grad} u(x).$$

В обоих примерах

$$(e^{tL}f)(x) = \int f(y)\,p_0(t,x,y)\,dy,$$

где p_0 — фундаментальное решение невозмущенного уравнения. Цель данной работы — предложить и обосновать построение функции p, определяемой из равенства

$$(e^{t(L+L_1)}f)(x) = \int f(y)\,p(t,x,y)\,dy.$$

Упомянутая функция $p(t,x,y)$ ищется в виде

$$p(t,x,y) = m(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int m(t-\tau,x,z)\,r(\tau,z,y)\,dz, \tag{2}$$

где начальное приближение

$$m(t,x,y) = \int p_0(t,z,y)\,p_1(t,x,z)\,dz, \tag{3}$$

функция p_1 является приближением ядра интегрального оператора e^{tL_1}, а $r(t,x,y)$ — подлежащая определению функция.

Процедура построения фундаментального решения аналогична таковой в методе параметрикса: уравнение (2) сводится к интегральному уравнению Вольтерра для функции r

$$r(t,x,y) = M(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int M(t-\tau,x,z)\,r(\tau,z,y)\,dz, \tag{4}$$

где невязка

$$M(t,x,y) = (L+L_1)m - \frac{\partial m}{\partial t},$$

а решение r уравнения (3) имеет вид

$$r(t,x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n(t,x,y),$$

причем каждая итерация вычисляется по рекуррентной формуле

$$r_0(t,x,y) = M(t,x,y),$$

$$r_{n+1}(t,x,y) = \int_0^t d\tau \int M(t-\tau,x,z)\,r_n(\tau,z,y)\,dz.$$

Сходимость последнего интеграла и ряда $\sum r_n$ определяется свойствами невязки $M(t,x,y)$, которая должна иметь интегрируемую по t особенность. Упомянутое свойство будет выполняться при некоторых условиях на коэффициенты операторов L и L_1.

Поскольку начальное приближение $m(t,x,y)$ (а следовательно, и невязка $M(t,x,y)$) определены как интеграл, то для преобразования невязки и ее оценивания будем применять формулу интегрирования по частям

$$\int \operatorname{div} V(z)\, \mu(dz) = -\int (\Lambda(z), V(z))\, \mu(dz),$$

где в качестве меры μ используется выражение $p_1(t,x,z)dz$:

$$\int \operatorname{div} V(z)\, p_1(t,x,z)dz = -\int (\Lambda(t,x,z), V(z))\, p_1(t,x,z)dz. \qquad (5)$$

Здесь логарифмическая производная

$$\Lambda(t,x,z) = \operatorname{grad}_z \ln p_1(t,x,z).$$

1. Возмущение постоянного оператора. Продемонстрируем применяемый метод в частном случае, рассмотрев параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A + B(x))u'', \qquad x \in R^n, \qquad (6)$$

где A — постоянный оператор в R^n, а положительный оператор $B(x)$ удовлетворяет условиям:

1) существует положительный оператор K_0 такой, что $K(x) = A^{-1/2}B(x)A^{-1/2} \le K_0 \le \delta I, \quad \delta < 1$;
2) $\left\| B(x)B^{-1}(y) \right\| < \text{const}$;
3) первые две производные оператора $B(x)$ ограничены: $\left\| B'(x)h \right\| \le c_1 \| h \|, \quad \left\| B''(x)kh \right\| \le c_2 \| k \| \| h \|$.

Из условия 2 следует ограниченность отношения $\dfrac{\det B(x)}{\det B(y)}$.

Решение невозмущенного уравнения таково:

$$p_0(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}\sqrt{\det A}} \exp\left\{-\frac{(A^{-1}(x-y), x-y)}{2t}\right\}.$$

Положим

$$p_1(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}\sqrt{\det B(y)}} \exp\left\{-\frac{(B^{-1}(x)(x-y), x-y)}{2t}\right\},$$

тогда нулевое приближение

$$m(t,x,y) = \int_{R^n} p_0(t,z,y) \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}\sqrt{\det B(z)}} \exp\left\{-\frac{(B^{-1}(x)(x-z), x-z)}{2t}\right\} dz.$$

Из условий 1, 2 следует оценка

$$m(t,x,y) < \frac{c}{\sqrt{\det(I + K(x))}} \exp\left\{\frac{1}{2t}\left(A^{-1/2}K(x)A^{-1/2}(x-y), x-y\right)\right\} p_0(t,x,y) <$$

$$< c \exp\left\{\frac{1}{2t}\left(A^{-1/2}K_0A^{-1/2}(x-y), x-y\right)\right\} p_0(t,x,y).$$

Невязка

$$M(t,x,y) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A + B(x))m''_{xx} - \frac{\partial m}{\partial t} = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \int_{R^n} \left(\frac{1}{2}\operatorname{tr} B(x)p_1''(t,x,z) - \frac{\partial p_1}{\partial t}(t,x,z)\right) p_0(t,z,y)dz,$$

$$I_2 = \int_{R^n} \left(\frac{1}{2}\operatorname{tr} A p_1''(t,x,z)\, p_0(t,z,y) - \frac{\partial p_0}{\partial t}(t,z,y) p_1(t,x,z)\right) dz,$$

а дифференцирование выполняется по переменной x. Для последующих преобразований приведем I_2 к виду

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_{R^n} \left(\operatorname{tr} A p_1''(t,x,z)\, p_0(t,z,y) - \operatorname{tr} A p_{0zz}''(t,z,y)\, p_1(t,x,z)\right) dz$$

и дважды применим ко второму слагаемому формулу интегрирования по частям (5):

$$-\frac{1}{2}\int_{R^n} \operatorname{tr}(A p_{0z}'(t,z,y))_z' p_1(t,x,z)\, dz = -\frac{1}{2}\int_{R^n} \operatorname{div}_z(A p_{0z}'(t,z,y))\, p_1(t,x,z)\, dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{R^n} (p_{0z}'(t,z,y), A\Lambda(t,x,z))\, p_1(t,x,z)\, dz =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{R^n} \left[(A\Lambda(t,x,z), \Lambda(t,x,z)) + \operatorname{div}_z A\Lambda(t,x,z)\right] p_0(t,z,y)\, p_1(t,x,z)\, dz.$$

Лемма 1. *Логарифмическая производная* $\Lambda(t,x,z)$ *меры* $p_1(t,x,z)\,dz$ *определяется равенством*

$$(\Lambda(t,x,z), h) = -\frac{1}{2}\operatorname{tr} B'(z) h B^{-1}(z) + \frac{1}{t}(B^{-1}(x)(x-z), h).$$

Доказательство. Из определения

$$(\Lambda(t,x,z), h) = -\frac{1}{2} d_h \ln\det B(z) + \frac{1}{t}(B^{-1}(x)(x-z), h),$$

где d_h — дифференциал функции вдоль вектора h по переменной z. Дифференцируя равенство

$$\ln\det B(z) = \operatorname{tr}\ln B(z) = \operatorname{tr}\int_0^1 (B(z)-I)(I + \tau(B(z)-I))^{-1} d\tau,$$

получаем

$$d_h \ln\det B(z) = \operatorname{tr} B'(z) h (B(z)-I)^{-1}\int_0^1 (B(z)-I)(I+\tau(B(z)-I))^{-2} d\tau,$$

и утверждение леммы следует из того факта, что подынтегральное выражение равно

$$-\frac{d}{d\tau}(I + \tau(B(z)-I))^{-1}.$$

Следствие.

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_{R^n} \left(\frac{\operatorname{tr} A p_1''(t,x,z)}{p_1(t,x,z)} - (A\Lambda(t,x,z), \Lambda(t,x,z)) - \operatorname{div}_z A\Lambda(t,x,z)\right) \times$$

$$\times\; p_0(t,z,y)\, p_1(t,x,z)\, dz.$$

Лемма 2. *Невязка* $M(t,x,y)$ *удовлетворяет оценке*

$$|M(t,x,y)| \le \frac{c}{\sqrt{t}}\int_{R^n}\left(1 + \frac{\|x-z\|^4}{t^2}\right) p_0(t,z,y)\, p_1(t,x,z)\, dz.$$

Доказательство следует из прямого вычисления слагаемых I_1 и I_2.

Лемма 3. *Для невязки* $M(t,x,y)$ *справедлива оценка*

$$|M(t,x,y)| < \frac{c}{\sqrt{t}} \exp\left\{\frac{1}{2t}(A^{-1/2}K_0A^{-1/2}(x-y), x-y)\right\} p_0(t,x,y).$$

Доказательство. Воспользуемся представлением

$$p_0(t,z,y) = \varphi(t,z,x,y)\, p_0(t,x,y),$$

где

$$\varphi(t,z,x,y) = \exp\left\{\frac{1}{t}(A^{-1}(y-x), z-x)\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2t}(A^{-1}(z-x), z-x)\right\}.$$

Из леммы 2 следует неравенство

$$|M(t,x,y)| < \frac{c}{\sqrt{t}} p_0(t,x,y) \int_{R^n} \left(1 + \frac{\|x-z\|^4}{t^2}\right) \varphi(t,z,x,y) p_1(t,x,z)\, dz,$$

и оценка для невязки принимает вид

$$|M(t,x,y)| < \frac{c}{\sqrt{t}} p_0(t,x,y) \int_{R^n} \exp\left\{\frac{1}{t}(A^{-1}(z-x), y-x)\right\} p_1(t,x,z)\, dz.$$

Замена $z \to u$

$$u = \frac{1}{\sqrt{t}} B^{-1/2}(x)(z-x), \qquad z = x + \sqrt{t}\, B^{1/2}(x) u$$

приводит к неравенству

$$|M(t,x,y)| < \frac{c}{\sqrt{t}} p_0(t,x,y) \int_{R^n} \exp\left\{\left(u, \frac{1}{\sqrt{t}} B^{1/2}(x) A^{-1}(y-x)\right)\right\} \sqrt{\frac{\det B(x)}{\det B(z)}}\, \mu(du),$$

где μ — каноническая гауссова мера в R^n, откуда и следует утверждение леммы.

Теорема 1. *Фундаментальное решение* $p(t,x,y)$ *возмущенного уравнения* (6) *для* $t \in (0, T]$ *удовлетворяет неравенству*

$$p(t,x,y) < c \exp\left\{\frac{(A^{-1/2}K_0A^{-1/2}(x-y), x-y)}{2t}\right\} p_0(t,x,y).$$

Доказательство. Построим $p(t,x,y)$ как решение интегрального уравнения (2). Оценим итерацию $r_1(t,x,y)$ уравнения (4):

$$|r_1(t,x,y)| < \int_0^t d\tau \int_{R^n} |M(\tau,z,y) M(t-\tau,x,z)|\, dz <$$

$$< c^2 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(t-\tau)}} \int_{R^n} \exp\left\{\frac{(A^{-1/2}K_0A^{-1/2}(z-y), z-y)}{2\tau} + \frac{(A^{-1/2}K_0A^{-1/2}(z-x), z-x)}{2(t-\tau)}\right\} \times$$

$$\times\ p_0(\tau,z,y) p_1(t-\tau,x,z)\, dz.$$

Замена $A^{-1/2}\left(z\sqrt{\frac{t}{\tau(t-\tau)}} - x\sqrt{\frac{\tau}{t(t-\tau)}} - y\sqrt{\frac{t-\tau}{t\tau}}\right) = u$, откуда

$$\frac{z-x}{\sqrt{t-\tau}} = \sqrt{\frac{\tau}{t}} A^{1/2} u + \frac{\sqrt{t-\tau}}{t}(y-x),$$

$$\frac{z-y}{\sqrt{\tau}} = \sqrt{\frac{t-\tau}{t}} A^{1/2} u + \frac{\sqrt{\tau}}{t}(x-y), \tag{7}$$

преобразует пространственный интеграл к виду

$$p_0(t,x,y)\exp\left\{\frac{(A^{-1/2}K_0A^{-1/2}(x-y),x-y)}{2t}\right\}\int\limits_{R^n}\exp\left\{\frac{(K_0u,u)}{2}\right\}\mu(du) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\det(I-K_0)}}p_0(t,x,y)\exp\left\{\frac{(A^{-1/2}K_0A^{-1/2}(x-y),x-y)}{2t}\right\}.$$

Отсюда, в свою очередь,

$$|r_1(t,x,y)| < c^2c_1\pi p_0(t,x,y)\exp\left\{\frac{(A^{-1/2}K_0A^{-1/2}(x-y),x-y)}{2t}\right\},$$

где $c_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\det(I-K_0)}}$.

По индукции легко установить оценку

$$|r_n(t,x,y)| < \int\limits_0^t d\tau\int\limits_{R^n}|r_{n-1}(\tau,z,y)M(t-\tau,x,z)|dz <$$

$$< c^{n+1}c_1^n\frac{\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma((n+1)/2)}t^{(n-1)/2}\exp\left\{\frac{(A^{-1/2}K_0A^{-1/2}(x-y),x-y)}{2t}\right\}p_0(t,x,y),$$

из которой (c — новая константа)

$$|r(t,x,y)| < \sum_{n=0}^{\infty}|r_n(t,x,y)| < \frac{c}{\sqrt{t}}e^{ct}\exp\left\{\frac{(A^{-1/2}K_0A^{-1/2}(x-y),x-y)}{2t}\right\}p_0(t,x,y).$$

Оценивая интеграл в (2) с помощью замены (7), получаем

$$p(t,x,y) < c(1+\sqrt{t})\exp\left\{\frac{(A^{-1/2}K_0A^{-1/2}(x-y),x-y)}{2t}\right\}p_0(t,x,y),$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Замечание. В данном примере известный явный вид решения $p_0(t,x,y)$ невозмущенного уравнения использовался для вычисления функции φ в представлении $p_0(t,z,y) = \varphi(t,x,z,y)p_0(t,x,y)$ и для вычисления и последующего оценивания интегралов с помощью замены (7).

При возмущении уравнения с переменными коэффициентами (на многообразии) явный вид $p_0(t,x,y)$ неизвестен, однако будет получена оценка функции φ и предложен аналог замены (7).

2. Скалярное возмущение переменного оператора. Пусть $p_0(t,x,y)$ — фундаментальное решение (ядро теплопроводности) параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u,$$

где Δ — оператор Лапласа – Бельтрами на полном односвязном римановом многообразии M неположительной кривизны, $\dim M = n$. Обозначим через $\gamma(s)$ геодезическую, параметризованную натуральным параметром (как правило, $\gamma(0) = y$, $\gamma(\rho(x,y)) = x$), положим $e(x,y) = -\dot\gamma(x)$. Предположим, что тензор кривизны $R(s)$ удовлетворяет следующим условиям:

а) для произвольных $x \in M$, $U, V \in T_xM$

$$\sum_k |(R(x)(U, e_k)V, \varphi_k)| < c\sqrt{\operatorname{Ric}(x)(U,U)\operatorname{Ric}(x)(V,V)},$$

где

$$\operatorname{Ric}(x)(U,V) = \sum_k (R(x)(U, e_k)V, e_k),$$

$\{e_k\}$ и $\{\varphi_k\}$ — произвольные ортобазисы в T_xM, а константа c не зависит от x;

б) вдоль любой геодезической скалярная кривизна $r(x) = \operatorname{tr}\operatorname{Ric}(x)$ убывает достаточно быстро, т. е. $\int_0^\infty sr(\gamma(s))ds < c$, где c не зависит от γ;

в) ковариантные производные тензора кривизны удовлетворяют оценкам

$$\|(\nabla_{X(s)}R)(\gamma(s))(Y(s), \dot\gamma(s))Z(s)\| \le f_1(\gamma(s))\|X(s)\|\|Y(s)\|\|Z(s)\|,$$

$$\|(\nabla_{U(s)}\nabla_{X(s)}R)(\gamma(s))(Y(s), \dot\gamma(s))Z(s)\| \le f_2(\gamma(s))\|X(s)\|\|Y(s)\|\|Z(s)\|\|U(s)\|,$$

где функции f_1 и f_2 таковы, что вдоль любой геодезической γ $\int_0^\infty s^2 f_k(\gamma(s))ds < c$, c не зависит от γ.

Определим вдоль γ оператор D на $T_{\gamma(s)}M$:

$$D(\gamma(s))\,U = \nabla_U \rho(y, \gamma(s))\dot\gamma(s), \quad \gamma(0) = y$$

и функции $a(x,y) = \operatorname{tr}(D(x) - I)$,

$$q(t,x,y) = (2\pi t)^{-n/2}\exp\left\{-\frac{\rho^2(x,y)}{2t}\right\}. \tag{8}$$

Как показано в [1 – 3], при выполнении условий а) – в) имеют место следующие результаты:

1) ядро теплопроводности $p_0(t,x,y)$ удовлетворяет двусторонней оценке

$$\exp\{-\varphi(x,y) - kt\} \le \frac{p_0(t,x,y)}{q(t,x,y)} \le 1,$$

где

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\int_0^{\rho(x,y)} (\rho(x,y) - \tau)\operatorname{Ric}(\gamma(\tau))(\dot\gamma(\tau), \dot\gamma(\tau))d\tau, \tag{9}$$

k — некоторая константа;

2) имеет место представление

$$\operatorname{grad}_x \ln p_0(t,x,y) = \frac{\rho(x,y)}{t}e(x,y) + W(t,x,y), \tag{10}$$

где $\|W(t,x,y)\| < c$, $x, y \in M$, $0 < t \le T$;

3) функция $a(x,y)$ удовлетворяет оценке

$$0 \le a(x,y) \le \int_0^{\rho(x,y)} s\operatorname{Ric}(\gamma(s))(\dot\gamma(s), \dot\gamma(s))ds, \quad \operatorname{grad}_x a(x,y) < c, \quad |\Delta_x a(x,y)| < c.$$

Следствием представления 2 логарифмического градиента является следующая лемма.

Лемма 4. *Выполняется неравенство*

$$p_0(t,z,y) \le cp_0(t,x,y)\varphi(t,x,y,z),$$

где $\varphi = \exp\left\{\frac{1}{t}\rho(x,y)\rho(x,z)(e(x,y),e(x,z))\right\}$.

Доказательство получаем, интегрируя равенство (10) и используя неравенство теоремы косинусов для многообразия неположительной кривизны.

Рассмотрим возмущение

$$L_1 u = \frac{1}{2}\operatorname{div} b(x)\operatorname{grad} u,$$

где скалярная функция $b(x)$ удовлетворяет условиям

$$0 < b_1 \le b(x) \le b_2 < 1,$$

$$\|\operatorname{grad} b(x)\| < c, \quad \|\nabla_U \operatorname{grad} b(x)\| < c\|U\|.$$

Положим

$$p_1(t,x,z) = (2\pi t b(z))^{-n/2}\exp\left\{-\frac{\rho^2(x,z)}{2tb(z)}\right\}$$

и определим функцию $m(t,x,y)$ равенством (3). Тогда невязка возмущенного уравнения

$$M(t,x,y) = \frac{1}{2}\operatorname{div}(1+b(x))\operatorname{grad} m(t,x,y) - \frac{\partial}{\partial t}m(t,x,y) = I_1 + I_2, \qquad (11)$$

где

$$I_1 = \int_M \left(\frac{1}{2}\operatorname{div}_x b(x)\operatorname{grad}_x p_1(t,x,z) - \frac{\partial p_1(t,x,z)}{\partial t}\right)p_0(t,z,y)\sigma(dz),$$

а слагаемое I_2 после применения формулы (5) интегрирования по частям принимает вид

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_M \Big(\Delta_x p_1(t,x,z) - \|\Lambda(t,x,z)\|^2 p_1(t,x,z) -$$

$$- \operatorname{div}_z \Lambda(t,x,z)p_1(t,x,z)\Big)p_0(t,z,y)\sigma(dz).$$

Лемма 5. *Функции* $m(t,x,y)$ *и* I_1 *ограничены величинами*

$$c\exp\left\{\frac{b(x)\rho^2(x,y)}{2t}\right\}p_0(t,x,y) \quad \text{и} \quad \frac{c}{\sqrt{t}}\exp\left\{\frac{b(x)\rho^2(x,y)}{2t}\right\}p_0(t,x,y)$$

соответственно.

Доказательство. Из леммы 4 следует оценка

$$m(t,x,y) < cp_0(t,x,y)\int_M (2\pi t b(x))^{-n/2}\exp\left\{\frac{\rho(x,y)\rho(x,z)(e(x,y),e(x,z))}{t} -\right.$$

$$\left. - \frac{\rho^2(x,z)}{2tb(x)}\right\}\sigma(dz) = c\exp\left\{\frac{b(x)\rho^2(x,y)}{2t}\right\}p_0(t,x,y) \times$$

$$\times \int_M (2\pi t b(z))^{-n/2}\exp\left\{-\frac{\|\rho(x,z)e(x,z) - b(x)\rho(x,y)e(x,y)\|^2}{2tb(x)}\right\}\sigma(dz).$$

Замена

$$U = \frac{\rho(x,z)e(x,z) - b(x)\rho(x,y)e(x,y)}{\sqrt{tb(x)}},$$

$$z(U) = \mathrm{Exp}_x\left\{\sqrt{tb(x)}\,U + b(x)\rho(x,y)e(x,y)\right\}$$

приводит последний интеграл к виду

$$\int\limits_{T_xM}\left(\frac{b(x)}{b(z(U))}\right)^{n/2} J(z(U))\mu_x(dU),$$

где μ_x — каноническая гауссова мера на T_xM, а ограниченность якобиана J доказана в [1]. Таким образом, оценка для $m(t,x,y)$ установлена.

Для оценивания I_1 преобразуем подынтегральную функцию

$$\frac{\partial p_1}{\partial t}(t,x,z) = \left\{-\frac{n}{2t} + \frac{\rho^2(x,z)}{2t^2 b(x)}\right\} p_1(t,x,z),$$

$$\mathrm{grad}_x\, p_1(t,x,z) = \frac{1}{t}\left\{\frac{\rho^2(x,z)\,\mathrm{grad}\, b(x)}{2b^2(x)} - \frac{\rho(x,z)\,\dot\gamma(\rho(x,y))}{b(x)}\right\} p_1(t,x,z),$$

$$(\nabla_U b(x)\,\mathrm{grad}_x\, p_1(t,x,z), U) = p_1(t,x,z)\left[\frac{1}{t^2 b(x)}\left(\rho^2(x,z)\,(\dot\gamma(\rho),U)^2 - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{\rho^3(x,z)\,(\mathrm{grad}\, b(x),U)(\dot\gamma(\rho),U)}{b(x)} + \frac{\rho^4(x,z)}{4b^2(x)}(\mathrm{grad}\, b(x),U)^2\right) +$$

$$\left. + \frac{1}{t}\left(\frac{(\nabla_U \rho^2(x,z)\,\mathrm{grad}\, b(x),U)}{2b(x)} - \frac{\rho^2(x,z)(\mathrm{grad}\, b(x),U)^2}{2b^2(x)} - D(x)U\right)\right].$$

Суммируя по ортобазису $\{e_k\}$ в T_xM $(e_1 = \dot\gamma(\rho))$, получаем

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{div}\, b(x)\,\mathrm{grad}\, p_1(t,x,z) - \frac{\partial}{\partial t} p_1(t,x,z) = \left(-\frac{\rho^3(x,z)(\mathrm{grad}\, b(x),\dot\gamma(\rho))}{2t^2 b^2(x)} + \right.$$

$$+ \frac{\rho^4(x,z)\|\mathrm{grad}\, b(x)\|^2}{2t^2 b^3(x)} - \frac{1}{2t}\,\mathrm{tr}\,(D(x) - I) + \frac{\rho(x,z)}{2tb(x)}(\mathrm{grad}\, b(x),\dot\gamma(\rho)) -$$

$$\left. - \frac{\rho^2(x,z)}{4tb^2(x)}\|\mathrm{grad}\, b(x)\|^2 + \frac{\rho(x,z)}{4tb(x)}\Delta b(x)\right) p_1(t,x,z).$$

Полученное выражение оценивается величиной $\dfrac{c}{\sqrt{t}}\left(1 + \dfrac{\rho^4(x,z)}{t^2}\right)p_1(t,x,z)$, откуда и следует второе утверждение леммы.

Перейдем к оценке слагаемого I_2, содержащего логарифмическую производную

$$\Lambda(t,x,z) = -\frac{n}{2}\frac{\mathrm{grad}\, b(z)}{b(z)} - \frac{\rho(x,z)\dot\gamma(\rho(x,z))}{tb(x)} \in T_zM.$$

Лемма 6. *Имеет место оценка*

$$|I_2| \le \frac{c}{\sqrt{t}}\exp\left(\frac{\rho^2(x,y)b(x)}{2t}\right)p_0(t,x,y).$$

Доказательство. Заметим, что

$$\|\Lambda(t,x,z)\|^2 + \mathrm{div}_z\Lambda(t,x,z) = \left(\frac{n}{2} + \frac{n^2}{4}\right)\frac{\|\mathrm{grad}\, b(z)\|^2}{b^2(z)} + \frac{\rho^2(x,z)}{t^2 b^2(x)} +$$

$$+ \frac{n}{tb(x)b(z)}\rho(x,z)(\dot\gamma(\rho(x,z)),\mathrm{grad}\, b(z)) - \frac{n\Delta b(z)}{2b(z)} - \frac{\mathrm{tr}\, D(z)}{tb(x)}.$$

Второе подынтегральное слагаемое

$$\Delta_x p_1(t,x,z) = \left[\frac{1}{t^2}\left(\frac{\rho^4(x,z)\|\operatorname{grad} b(x)\|^2}{4b^4(x)} - \frac{\rho^3(x,z)(\operatorname{grad} b(x), \dot\gamma(\rho))}{b^3(x)} + \frac{\rho^2(x,z)}{b^2(x)}\right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{t}\left(\frac{2\rho(x,z)(\operatorname{grad} b(x), \dot\gamma(\rho))}{b^2(x)} + \frac{\rho^2(x,z)}{2b^2(x)}\Delta b(x) - \frac{\rho^2(x,z)}{b^3(x)}\|\operatorname{grad} b(x)\|^2 - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{b(x)}\operatorname{tr} D(x)\right)\right] p_1(t,x,z),$$

и разность

$$\Delta_x p_1(t,x,z) - p_1(t,x,z)\left(\|\Lambda(t,x,z)\|^2 + \operatorname{div}_z \Lambda(t,x,z)\right)$$

оценивается величиной

$$\frac{c}{\sqrt{t}}\left(1 + \frac{\rho^4(x,z)}{t^2}\right) p_1(t,x,z),$$

имеющей интегрируемую по t особенность. Нужное утверждение доказывается так же, как и в лемме 5.

Следствие. Невязка $M(t,x,y)$, *определяемая равенством* (11), *удовлетворяет оценке*

$$|M(t,x,y)| < \frac{c}{\sqrt{t}}\exp\left(\frac{b(x)\rho^2(x,y)}{2t}\right) p_0(t,x,y).$$

Замечание. В силу неравенств $b(x) \le b_2 < 1$ и $p < q$ функция $\exp\left(\frac{b(x)\rho^2(x,y)}{2t}\right)$ интегрируема по мере $p_0(t,x,y)\sigma(dy)$.

Теорема 2. *Фундаментальное решение* $p(t,x,y)$ *возмущенного параболического уравнения*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\operatorname{div}(1 + b(x))\operatorname{grad} u$$

удовлетворяет оценке

$$p(t,x,y) < c\exp\left\{\frac{b_2\rho^2(x,y)}{2t}\right\} q(t,x,y) \le c\exp\left\{\frac{b_2\rho^2(x,y)}{2t} + \varphi(x,y) + kt\right\} p_0(t,x,y),$$

где функции $q(t,x,y)$ *и* $\varphi(x,y)$ *определены формулами* (8) *и* (9) *соответственно.*

Доказательство. Докажем сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} r_n$, возникающего при решении уравнения Вольтерра (4). Из следствия к леммам 5 и 6 и неравенства $p_0 \le q$ следует оценка

$$|r_1(t,x,y)| = \left|\int_0^t d\tau \int_M M(t-\tau,x,z) M(\tau,z,y)\sigma(dz)\right| <$$

$$< c^2 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(t-\tau)}} \int_M (4\pi^2\tau(t-\tau))^{-n/2} \exp\left\{-\frac{(1-b_2)}{2}\left(\frac{\rho^2(y,z)}{\tau} + \frac{\rho^2(x,z)}{t-\tau}\right)\right\}\sigma(dz).$$

Преобразуем внутренний интеграл с помощью замены

$$U = \left(\sqrt{\frac{t}{\tau(t-\tau)}}\rho(x,z)e(x,z) - \sqrt{\frac{t-\tau}{\tau t}}\rho(x,y)e(x,y)\right)\sqrt{1-b_2},$$

$$z(U) = \operatorname{Exp}_x\left(\sqrt{\frac{\tau(t-\tau)}{t(1-b_2)}}U + \frac{t-\tau}{t}\rho(x,y)e(x,y)\right).$$

При этом показатель экспоненты будет равен

$$-\frac{1}{2}\|U\|^2 - \frac{\rho^2(x,y)}{2t}(1-b_2) - \frac{(1-b_2)}{\tau}\{\rho^2(y,z) - \rho^2(x,y) - \rho^2(x,z) +$$

$$+ 2\rho(x,y)\rho(x,z)(e(x,y), e(x,z))\},$$

причем выражение в фигурных скобках неотрицательно в силу неположительности кривизны. Таким образом,

$$\int_M (4\pi^2\tau(t-\tau))^{-n/2}\exp\left\{-\frac{(1-b_2)}{2}\left(\frac{\rho^2(y,z)}{\tau} + \frac{\rho^2(x,z)}{t-\tau}\right)\right\}\sigma(dz) \le$$

$$\le (1-b_2)^{-n/2}\exp\left\{\frac{b_2\rho^2(x,y)}{2t}\right\}q(t,x,y)\int_{T_xM} J(z(U))\mu_x(dU).$$

Следовательно,

$$|r_1(t,x,y)| < c^2 c_1 \pi \exp\left\{\frac{b_2\rho^2(x,y)}{2t}\right\}q(t,x,y),$$

где $c_1 = (1-b_2)^{-n/2}\sup_{z\in M} J(z)$.

Легко устанавливается оценка

$$|r_n(t,x,y)| < \frac{c^{n+1}c_1^n\pi^{(n+1)/2}t^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\exp\left\{\frac{b_2\rho^2(x,y)}{2t}\right\}q(t,x,y),$$

обеспечивающая абсолютную сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} r_n(t,x,y)$, $0 < t \le T$, причем для его суммы

$$|r(t,x,y)| < \frac{c}{\sqrt{t}}\exp\left\{\frac{b_2\rho^2(x,y)}{2t}\right\}q(t,x,y).$$

Тогда

$$p(t,x,y) = m(t,x,y) + \int_0^t d\tau\int_M m(t-\tau,x,z)r(\tau,z,y)\sigma(dz) <$$

$$< c\exp\left\{\frac{b_2\rho^2(x,y)}{2t}\right\}q(t,x,y)(1+\sqrt{t}),$$

откуда и следует утверждение теоремы.

1. *Бондаренко В. Г.* Оценки ядра теплопроводности на многообразии неположительной кривизны // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 8. – С. 1129 – 1136.
2. *Бондаренко В. Г.* Метод параметрикса для параболического уравнения на римановом многообразии // Там же. – 1999. – **51**, № 11. – С. 1443 – 1448.

Получено 15.05.2002