УДК 517.949

Ю. В. Теплінський, І. В. Семенишина (Кам'янець-Поділ. пед. ун-т)

ПРО ЗАДАЧУ КОШІ ДЛЯ ВИРОДЖЕНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ m-ГО ПОРЯДКУ В БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

We find sufficient conditions of the solvability of the Cauchy problem for degenerate difference equations of order m in the Banach space.

Знайдено достатні умови розв'язності задачі Коші для вироджених різницевих рівнянь m-го порядку в банаховому просторі.

Розглянемо рівняння

$$\Delta^m x_n = f_n(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m-1}), \qquad n \in Z_0^+, \tag{1}$$

де $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$, $Z_0^+ = Z^+ \cup \{0\}$, $Z^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $x_n \in W$, функція f_n відображує W^m у W при будь-якому $n \in Z_0^+$, W — банаховий простір над полем дійсних чисел з нормою $\|\cdot\|$, m — натуральне число, більше за одиницю.

Рівняння такого вигляду або їх часткові типи зустрічаються в різних розділах теорії диференціальних рівнянь, математичного аналізу, тощо [1–7]. При $m \in \{1, 2\}$ рівняння (1) досліджувалось авторами цієї статті в роботах [6, 8, 9].

Сформулюємо задачу: знайти $X_0 = (x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}) \in W^m$, що визначає на Z_0^+ розв'язок $x_n = x_n(X_0)$ рівняння (1) такий, що $x_i(X_0) = x_i$ при всіх $i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ і $x_{k+m}(X_0) = d$, де k та d — задані елементи з Z_0^+ та W відповідно.

Лема 1. *Рівняння* (1) *можна записати у вигляді*

$$x_{n+m} = -\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i} C_m^i x_{n+i} + f_n(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m-1}), \qquad n \in Z_0^+,$$

де C_m^i *— кількість сполучень з* m *елементів по* i.

Доведення. Очевидно, досить показати, що для будь-якого $p \in Z^+$ справджується рівність

$$\Delta^p x_n = \sum_{i=0}^{p} (-1)^{p-i} C_p^i x_{n+i}. \tag{2}$$

При $p = 1$ це так. Припустимо, що це так при всіх $1 < p \leq m$. Тоді

$$\Delta^{m+1} x_n = \Delta(\Delta^m x_n) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} C_m^i x_{n+1+i} - \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} C_m^i x_{n+i} =$$

$$= -(-1)^m x_n + \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i} C_m^i x_{n+1+i} - \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} C_m^i x_{n+i} + x_{n+m+1} =$$

$$= (-1)^{m+1} C_{m+1}^0 x_n + \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i+1} (C_m^{i-1} + C_m^i) x_{n+i} + (-1)^{m+1-(m+1)} C_{m+1}^{m+1} x_{n+m+1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{m+1} (-1)^{m+1-i} C_{m+1}^i x_{n+i},$$

тобто рівність (2) справджується при $p = m + 1$, що завершує доведення леми.

Введемо позначення

$$\Phi_n(Y) = -\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{m-i}C_m^i y_i + f_n(Y),$$

де $Y = (y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}) \in W^m$.

Якщо хоча б одне з відображень $\Phi_n: W^m \to W$, $n = 0, 1, \ldots, k$, не є оборотним, то рівняння (1) назвемо k-виродженим.

Зрозуміло, що для виродженого рівняння (1) поставлена вище задача може мати безліч розв'язків, а може не мати жодного. Очевидно, що для існування хоча б одного такого розв'язку необхідно і достатньо, щоб рівняння

$$\Psi(X_0) = -\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{m-i}C_m^i x_{k+i}(X_0) + f_k(x_k(X_0), x_{k+1}(X_0), \ldots, x_{k+m-1}(X_0)) - d = 0$$

мало хоча б один розв'язок $X_0 \in W^m$.

Домовимось надалі під диференційовністю відображення розуміти диференційовність його у сенсі Фреше.

Лема 2. *Якщо відображення f_n, $n = \overline{0, k}$, диференційовні на W^m, то відображення $\Psi(X_0)$ теж має цю властивість.*

Доведення. Відображення $-\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{m-i}C_m^i x_{p+i} : W^m \to W$ позначимо через $\varphi(X_p)$, де $X_p = (x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{p+m-1}) \in W^m$, $p \in Z^+$. Оскільки $\varphi(X_0)$ — лінійний оператор, то він диференційовний по X_0 і похідна від нього діє на довільний вектор $h = (h_0, h_1, \ldots, h_{m-1}) \in W^m$ таким чином: $\dfrac{d\varphi(X_0)}{dX_0}h = \varphi(h)$. Тоді, очевидно, існує похідна $\dfrac{dx_m(X_0)}{dX_0} = \dfrac{d\varphi(X_0)}{dX_0} + \dfrac{d\, f_0(X_0)}{dX_0}$.

Припустимо, що при всіх $n \in Z^+$ таких, що $n \le p < k$, існує похідна $\dfrac{dx_{m+n}(X_0)}{dX_0}$.

Запишемо рівність

$$x_{m+p+1}(X_0) = \varphi(X_{p+1}(X_0)) + f_{p+1}(X_{p+1}(X_0)).$$

Відображення $X_{p+1}(X_0): W^m \to W^m$ складається з m компонент:

$$\gamma_i: W^m \to W \mid \gamma_i(X_0) = x_{p+i}(X_0), \qquad i = \overline{1, m},$$

кожна з яких диференційовна по X_0 за припущенням, оскільки при $i = \overline{1, m}$ $p + i \le m + p$. Тоді існує похідна $\dfrac{dX_{p+1}(X_0)}{dX_0}$ і

$$\frac{dx_{m+p+1}(X_0)}{dX_0} = \left[\frac{d\varphi\big(X_{p+1}(X_0)\big)}{dX_{p+1}(X_0)} + \frac{d\, f_{p+1}\big(X_{p+1}(X_0)\big)}{dX_{p+1}(X_0)}\right]\frac{dX_{p+1}(X_0)}{dX_0}.$$

Використовуючи принцип повної математичної індукції, переконуємось, що відображення $\Psi(X_0)$ диференційовне по $X_0 \in W^m$.

Домовимось під нормою елемента $Y \in W^m$ розуміти вираз $\| Y \| = \max\{\| y_0 \|, \| y_1 \|, \ldots, \| y_{m-1} \|\}$, де $\| y_i \|$, $i = \overline{0, m-1}$, — норма в просторі W.

Нехай $Z = (z_0, z_1, \ldots, z_{m-1})$ та $\overline{Z} = (\overline{z}_0, \overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_{m-1})$ — довільні точки з простору W^m. Сформулюємо наступне допоміжне твердження.

Лема 3. *Нехай для будь-якого* $Z \in W^m$

$$\left\| \frac{d f_i(Z)}{dZ} \right\| \leq P = \text{const} > 0, \quad i = 0, 1, \ldots, k.$$

Тоді для $\{Z, \overline{Z}\} \subset W^m$ *справджуються співвідношення*

$$\left\| \frac{d\varphi(Z)}{dZ} \right\| \leq 2^m - 1, \tag{3}$$

$$\left\| \frac{d\varphi(Z)}{dZ} - \frac{d\varphi(\overline{Z})}{d\overline{Z}} \right\| = 0, \tag{4}$$

$$\left\| \frac{dX_p(Z)}{dZ} \right\| \leq (2^m - 1 + P)^p, \quad 0 \leq p \leq k, \tag{5}$$

$$\left\| X_p(Z) - X_p(\overline{Z}) \right\| \leq (2^m - 1 + P)^p \|Z - \overline{Z}\|, \quad 0 \leq p \leq k. \tag{6}$$

Доведення. Співвідношення

$$\left\| \frac{d\varphi(Z)}{dZ} \right\| = \sup_{\|h\|=1} \left\| \frac{d\varphi(Z)}{dZ} h \right\| = \sup_{\|h\|=1} \|\varphi(h)\| =$$

$$= \sup_{\max\{\|h_0\|, \ldots, \|h_{m-1}\|\}=1} \left\| -\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i} C_m^i h_i \right\| \leq 2^m - 1$$

доводять нерівність (3).

Рівність (4) є справедливою, оскільки $\left(\frac{d\varphi(Z)}{dZ} - \frac{d\varphi(\overline{Z})}{d\overline{Z}} \right)$ — нульовий оператор, що переводить будь-яке $h \in W^m$ в $0 \in W$.

Нерівність (5) доведемо методом математичної індукції. Дійсно, $X_0(Z) = E(Z)$, де E — тотожний оператор. Отже, $\left\| \frac{dX_0(Z)}{dZ} \right\| = 1$ і нерівність (5) виконується при $p = 0$.

Припустимо, що вона справджується при всіх $1 \leq p \leq n < k$, і доведемо її при $p = n + 1$. Запишемо рівність

$$X_{n+1}(Z) = \left(x_{n+1}(Z), x_{n+2}(Z), \ldots, x_{n+m}(Z) \right).$$

Може трапитись два випадки: або $n + 1 < m$, або $n + 1 \geq m$.

У першому з них

$$X_{n+1}(Z) = \left(x_{n+1}(Z), \ldots, x_{m-1}(Z), x_m(Z), \ldots, x_{n+m}(Z) \right).$$

Тоді

$$\left\| \frac{dX_{n+1}(Z)}{dZ} \right\| \leq \max \left\{ \left\| \frac{dx_{n+1}(Z)}{dZ} \right\|, \ldots, \left\| \frac{dx_{m-1}(Z)}{dZ} \right\|, \left\| \frac{dx_m(Z)}{dZ} \right\|, \ldots, \left\| \frac{dx_{n+m}(Z)}{dZ} \right\| \right\}.$$

При $0 \leq n \leq m - 1$

$$x_n(Z) = z_n = \sum_{i=0}^{n-1} 0 \cdot z_i + z_n + \sum_{i=n+1}^{m-1} 0 \cdot z_i$$

— лінійний оператор, що діє з W^m в W.

Отже,

$$\left\| \frac{dx_n(Z)}{dZ} \right\| = \sup_{\|h\|=1} \left\| \frac{dx_n(Z)}{dZ} h \right\| = \sup_{\|h\|=1} \| x_n(h) \| =$$

$$= \sup_{\|h\|=1} \| h_n \| = \sup_{\max\{\|h_0\|,\ldots,\|h_{m-1}\|\}=1} \|h_n\| = 1, \quad h \in W^m.$$

Тоді

$$\left\| \frac{dX_{n+1}(Z)}{dZ} \right\| = \max\left\{1, \left\| \frac{dx_m(Z)}{dZ} \right\|, \ldots, \left\| \frac{dx_{n+m}(Z)}{dZ} \right\| \right\}.$$

При всіх $1 \le s \le n$ маємо

$$\left\| \frac{dx_{m+s}(Z)}{dZ} \right\| \le \left\{ \left\| \frac{d\varphi(X_s(Z))}{dX_s(Z)} \right\| + \left\| \frac{d f_s(X_s(Z))}{dX_s(Z)} \right\| \right\} \left\| \frac{dX_s(Z)}{dZ} \right\| \le$$

$$\le (2^m - 1 + P)(2^m - 1 + P)^s = (2^m - 1 + P)^{s+1},$$

$$\left\| \frac{dx_{m+s-1}(Z)}{dZ} \right\| \le (2^m - 1 + P)^s.$$

Враховуючи, що $2^m - 1 + P > 1$, $m \ge 1$, переконуємось, що

$$\left\| \frac{dX_{m+1}(Z)}{dZ} \right\| = \left\| \frac{dx_{n+m}(Z)}{dZ} \right\| \le (2^m - 1 + P)^{n+1}.$$

Легко бачити, що при $n + 1 \ge m$ остання нерівність виконується, отже, нерівність (5) доведено.

Нерівність (6) є безпосереднім наслідком оцінки (5), оскільки W^m є опуклою множиною.

Для спрощення записів формальні різниці $f(Z) - f(\overline{Z})$ та $\dfrac{d f(Z)}{dZ} - \dfrac{d f(\overline{Z})}{d\overline{Z}}$ позначимо через $f\Big|_{\overline{Z}}^{Z}$ та $df\Big|_{\overline{Z}}^{Z}$ відповідно.

Наведемо тепер умови, за яких похідна відображення $\Psi(X_0)$ є ліпшицевою на W^m.

Лема 4. *Нехай виконуються умови лем 2 і 3, причому для всіх* $\{Z, \overline{Z}\} \subset \subset W^m$ *та* $n \in \{0, 1, 2, \ldots, k\}$ *виконується нерівність*

$$\left\| df_n \Big|_{\overline{Z}}^{Z} \right\| \le L\|Z - \overline{Z}\|, \tag{7}$$

де L *— додатна стала. Тоді*

$$\left\| d\Psi \Big|_{\overline{Z}}^{Z} \right\| \le L_0\|Z - \overline{Z}\|,$$

де

$$L_0 = L\gamma^k\left(\gamma^k + \frac{\gamma^k - 1}{\gamma - 1}\right), \quad \gamma = 2^m - 1 + P.$$

Доведення. Справджуються рівності

$$d\Psi\Big|_{\overline{Z}}^{Z} = \frac{d\varphi(X_k(Z))}{dZ} - \frac{d\varphi(X_k(\overline{Z}))}{d\overline{Z}} + \frac{d f_k(X_k(Z))}{dZ} - \frac{d f_k(X_k(\overline{Z}))}{d\overline{Z}} =$$

$$= d\varphi\Big|_{X_k(\overline{Z})}^{X_k(Z)} \frac{dX_k(Z)}{dZ} + \frac{d\varphi(X_k(\overline{Z}))}{dX_k(\overline{Z})}\, dX_k\Big|_{\overline{Z}}^{Z} +$$

$$+ df_k\Big|_{X_k(\overline{Z})}^{X_k(Z)} \frac{dX_k(Z)}{dZ} + \frac{d f_k(X_k(\overline{Z}))}{dX_k(\overline{Z})}\, dX_k\Big|_{\overline{Z}}^{Z}.$$

Враховуючи (3) – (7), одержуємо оцінки

$$\left\| d\Psi \Big|_{\overline{Z}}^{Z} \right\| \le \gamma \left\| dX_k \Big|_{\overline{Z}}^{Z} \right\| + L \left\| X_k \Big|_{\overline{Z}}^{Z} \right\| \gamma^k \le L\gamma^{2k} \| Z - \overline{Z} \| + \gamma \left\| dX_k \Big|_{\overline{Z}}^{Z} \right\|. \tag{8}$$

Легко бачити, що

$$\left\| dX_k \Big|_{\overline{Z}}^{Z} \right\| \le \max \left\{ \left\| dx_k \Big|_{\overline{Z}}^{Z} \right\|, \left\| dx_{k+1} \Big|_{\overline{Z}}^{Z} \right\|, \ldots, \left\| dx_{k+m-1} \Big|_{\overline{Z}}^{Z} \right\| \right\}.$$

Припустимо, що $k < m$. Тоді

$$\left\| dX_k \Big|_{\overline{Z}}^{Z} \right\| \le \max \left\{ \left\| dx_k \Big|_{\overline{Z}}^{Z} \right\|, \ldots, \left\| dx_{m-1} \Big|_{\overline{Z}}^{Z} \right\|, \left\| dx_m \Big|_{\overline{Z}}^{Z} \right\|, \ldots, \left\| dx_{k+m-1} \Big|_{\overline{Z}}^{Z} \right\| \right\} \le$$

$$\le \max \left\{ \left\| dx_m \Big|_{\overline{Z}}^{Z} \right\|, \ldots, \left\| dx_{m+k-1} \Big|_{\overline{Z}}^{Z} \right\| \right\},$$

враховуючи, що при $k < m$ оператор $dx_k \Big|_{\overline{Z}}^{Z}$ переводить будь-яке $h \in W^m$ в $0 \in W$, тобто є нульовим оператором.

Покажемо, що при всіх $0 \le p \le k$

$$\left\| dx_{m+p} \Big|_{\overline{Z}}^{Z} \right\| \le L\gamma^p \frac{\gamma^{p+1} - 1}{\gamma - 1} \| Z - \overline{Z} \|. \tag{9}$$

При $p = 0$ маємо

$$\left\| dx_m \Big|_{\overline{Z}}^{Z} \right\| \le \left\| d\varphi \Big|_{\overline{Z}}^{Z} \right\| + \left\| df_0 \Big|_{\overline{Z}}^{Z} \right\| \le L \| Z - \overline{Z} \|,$$

тобто оцінка (9) виконується. Припустимо, що вона виконується при всіх $0 < p \le n < k$, і доведемо її при $p = n + 1$.

Враховуючи (8), записуємо співвідношення

$$\left\| dx_{m+n+1} \Big|_{\overline{Z}}^{Z} \right\| \le \left\| \frac{d\varphi(X_{n+1}(Z))}{dZ} - \frac{d\varphi(X_{n+1}(\overline{Z}))}{d\overline{Z}} \right\| +$$

$$+ \left\| \frac{df_{n+1}(X_{n+1}(Z))}{dZ} - \frac{df_{n+1}(X_{n+1}(\overline{Z}))}{d\overline{Z}} \right\| \le L\gamma^{2(n+1)} \| Z - \overline{Z} \| + \gamma \left\| dX_{n+1} \Big|_{\overline{Z}}^{Z} \right\| \le$$

$$\le L\gamma^{2(n+1)} \| Z - \overline{Z} \| + \gamma \left\| dx_{m+n} \Big|_{\overline{Z}}^{Z} \right\| \le$$

$$\le L\gamma^{n+1} \left\{ \gamma^{n+1} + \frac{\gamma^{n+1} - 1}{\gamma - 1} \right\} \| Z - \overline{Z} \| = L\gamma^{n+1} \frac{\gamma^{n+2} - 1}{\gamma - 1} \| Z - \overline{Z} \|,$$

що доводить нерівність (9).

Беручи до уваги оцінки (8), (9), переконуємось, що

$$\left\| d\Psi \Big|_{\overline{Z}}^{Z} \right\| \le L\gamma^{2k} \| Z - \overline{Z} \| + \gamma \left\| dx_{m+k-1} \Big|_{\overline{Z}}^{Z} \right\| \le$$

$$\le L\gamma^{2k} \| Z - \overline{Z} \| + \gamma L \gamma^{k-1} \frac{\gamma^k - 1}{\gamma - 1} \| Z - \overline{Z} \| = L\gamma^k \left\{ \gamma^k + \frac{\gamma^k - 1}{\gamma - 1} \right\} \| Z - \overline{Z} \|.$$

Легко бачити, що остання оцінка має місце і у випадку, коли $k \ge m$. Лему 4 доведено.

Одержані вище результати дають можливість застосувати до розв'язування рівняння $\Psi(X_0) = 0$ модифікований метод Ньютона – Канторовича [10]. Справджується наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови леми* 4, *існує точка* $X_0^* = \left(x_0^*, x_1^*, \ldots, x_{m-1}^* \right) \in W^m$, *в якій хоча б одна з частинних похідних* $\dfrac{\partial \Psi(X_0^*)}{\partial x_p}$, $0 \le p \le m - 1$ *є оборотною, і*

$$M = \left\| \left[\frac{\partial \Psi(X_0^*)}{\partial x_p} \right]^{-1} \right\|, \quad K = \left\| \left[\frac{\partial \Psi(X_0^*)}{\partial x_p} \right]^{-1} \Psi(X_0^*) \right\|, \quad h = MKL_0.$$

Тоді якщо

$$L < \frac{1}{4MK\gamma^k \left(\gamma^k + \dfrac{\gamma^k - 1}{\gamma - 1} \right)},$$

то в кулі $S: \|z - x_p^*\| \le Kt_0$ *з* W, *де* t_0 — *менший корінь рівняння* $ht^2 - t + 1 = 0$, *міститься єдина точка* x_p^0 *така, що* $X^0 = \left(x_0^*, \ldots, x_{p-1}^*, x_p^0, x_{p+1}^*, \ldots, x_{m-1}^*\right) \in W^m$ *є розв'язком рівняння* $\Psi(X_0) = 0$.

Доведення. Зауважимо спочатку, що в умовах теореми 1 при кожному $p \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ в будь-якій точці $X_0^* \in W^m$ існує частинна похідна $\dfrac{\partial \Psi(X_0^*)}{\partial x_p}$. Вона дорівнює $\dfrac{dG(x_p^*)}{dx_p^*}$, де через $G(x_p)$ позначено відображення $\Psi\left(x_0^*, \ldots, x_{p-1}^*, x_p^0, x_{p+1}^*, \ldots, x_{m-1}^*\right): W \to W$ при фіксованому наборі $\left\{x_0^*, \ldots, x_{p-1}^*, x_{p+1}^*, \ldots, x_{m-1}^*\right\} \subset W$. Очевидно, що для будь-якого $h_p \in W$

$$\frac{dG(x_p^*)}{dx_p^*} h_p = \frac{d\Psi(X_0^*)}{dX_0^*}(0, \ldots, 0, h_p, 0, \ldots, 0),$$

де $(0, \ldots, 0, h_p, 0, \ldots, 0) \in W^m$.

Це забезпечує виконання оцінки

$$\left\| dG\Big|_{\bar{x}_p}^{x_p} \right\| \le L_0 \| x_p - \bar{x}_p \|, \quad \{x_p, \bar{x}_p\} \subset W.$$

У цьому разі для відображення $G(x_p): W \to W$ виконуються всі умови теореми 1 з [11, с. 430], що завершує доведення.

Відмітимо, що x_p^0 є границею послідовності, яка визначена рекурентною формулою

$$\xi_0 = x_p^*, \quad \xi_{n+1} = \xi_n - \left[\frac{dG(x_p^*)}{dx_p^*} \right]^{-1} G(\xi_n).$$

Зауваження 1. Складність застосування теореми 1 полягає у перевірці оборотності відображення $\dfrac{\partial \Psi(X_0^*)}{\partial x_p}$, що для нескінченновимірних просторів є досить складною задачею.

У випадку $m = 1$ теорема 1 з [8] наводить умови, при яких розв'язування поставленої задачі є конструктивним.

Введемо позначення:

$$D = \left\{ Z \in W^m \,\middle|\, \|Z\| < a = \text{const} > 0 \right\},$$

$$D_f = \left\{ Z \in W^m \,\middle|\, \|Z\| < b \right\}, \text{ де } b = \left(a - N\frac{(2^m - 1)^k - 1}{2^m - 2} \right)(2^m - 1)^{-k}, \ N = \text{const} > 0.$$

Наслідок 1. *Нехай в області* D *виконуються умови леми 4 та* $\|f_n(Z)\| \le$

$\leq N$ при всіх $n \in \{0, 1, 2, \ldots, k\}$. Припустимо, що $D_f \neq \varnothing$, $X_0^* \in D_f$ і куля S міститься у множині $\{z \in W \,|\, \|z\| < b\}$. Тоді справджується твердження теореми 1.

Доведення наслідку 1 зводиться до перевірки оцінки $\|x_{m+p}(X_0)\| < a$ для всіх $p \in \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$ та $X_0 \in D_f$, що не становить труднощів.

Зауваження 2. Твердження теореми 1 залишається справедливим, якщо в її формулюванні частинну похідну $\dfrac{\partial \Psi(X_0^*)}{\partial x_p}$ замінити повною похідною $\dfrac{d\Psi(X_0^*)}{dX_0^*}$, кулю S замінити кулею $S_1 : \|Z - X_0^*\| \leq K t_0$ з W^m, а точку $x_p^0 \in S$ — точкою $X^0 = \left(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_{m-1}^0\right) \in S_1$, яка і забезпечуватиме рівність $\Psi(X^0) = 0$.

Але в такому разі у випадку скінченновимірного простору W навіть при $m = 2$ оператор $\dfrac{d\Psi(X_0^*)}{dX_0^*}$ не може бути оборотним, оскільки повинен бути гомеоморфізмом, що відображує W^2 на W, а останні два простори мають різні розмірності. У випадку нескінченновимірного простору W існують лінійні оборотні оператори, що відображають W^2 на W.

Наведемо приклад такого оператора. Нехай $W = H$ — сепарабельний гільбертів простір і $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — довільна його ортонормована база. $H^2 = H \times H$ буде гільбертовим простором, якщо покласти $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle + \langle y_1, y_2 \rangle$. При цьому $\|(x, y)\| = \sqrt{\langle (x, y), (x, y) \rangle} = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$, де $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярний добуток.

Відображення $\varphi_1 : H_1 = \{(x, 0) \,|\, x \in H\} \to H$ та $\varphi_2 : H_2 = \{(0, y) \,|\, y \in H\} \to H$, що задаються формулами $\varphi_1((x, 0)) = x$ та $\varphi_2((0, y)) = y$ відповідно, є ізометричними ізоморфізмами.

Ототожнюючи відповідні елементи при цих ізоморфізмах: $(x, 0) = x$, $(0, y) = y$, одержуємо $H^2 = H \oplus H$, оскільки $\langle (x, 0), (0, y) \rangle = 0$.

Якщо $\{e_n'\}_{n=1}^{\infty}$ — ще одна ортонормована база в H, то система

$$a_1 = (e_1, 0),\ a_2 = (0, e_1'),\ a_3 = (e_2, 0),\ a_4 = (0, e_2'), \ldots, a_{2n-1} = (e_n, 0),\ a_{2n} = (0, e_n'), \ldots$$

є ортонормованою базою простору H^2. Задамо відображення $A : H \to H^2$, поклавши $A\left(x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n a_n$. Очевидно, що A — лінійний оператор. За рівністю Парсеваля $\|Ax\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha_n\|^2 = \|x\|^2$, внаслідок чого оператор A є ізометричним, а отже, обмеженим. Внаслідок ізометричності $Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Тому A — ін'єктивне відображення і існує $A^{-1} : H^2 \to H$. При цьому A^{-1} є лінійним гомеоморфізмом.

Припустимо тепер, що $\Psi(X_0) \neq 0$. Цікаво навести умови, за яких, піддавши рівняння (1) певному збуренню, одержимо рівняння, розв'язок якого $x_n(X_0)$ дорівнює d при $n = m + k$.

Якщо $k = 0$, то збурене рівняння має вигляд

$$\Delta^m x_n = f_n(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m-1}) + \alpha(X_0), \qquad n \in Z_0^+,$$

де $\alpha(X_0) = d + \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i} C_m^i x_i - f_0(X_0)$.

Але вже при $k = 1$ задача якісно ускладнюється, про що свідчить таке твердження.

Теорема 2. *Нехай при* $\{Z, \overline{Z}\} \subset W^m$

$$\| f_1(Z) - f_1(\overline{Z}) \| \le P \| Z - \overline{Z} \|, \tag{10}$$

де додатна стала P *задовольняє нерівність* $P < m + 1$.

Тоді для будь-якого $X_0 \in W^m$ *існує єдине збурення* $\alpha(X_0) \in W$, *при якому розв'язок* $x_n(X_0)$ *рівняння*

$$\Delta^m z_n = f_n(z_n, z_{n+1}, \ldots, z_{n+m-1}) + \alpha(X_0), \quad n \in Z_0^+, \tag{11}$$

задовольняє умову $z_{m+1}(X_0) = d$.

Доведення. Позначивши $\left(x_p^{(s)}, x_{p+1}^{(s)}, \ldots, x_{p+m-1}^{(s)}\right) \in W^m$ через $X_p^{(s)}$ і використавши означений при доведенні леми 2 оператор φ, задамо рекурентні співвідношення

$$X_0^{(s)} = X_0, \quad s \in Z_0^+,$$

$$x_m^{(0)} = \varphi(X_0) + f_0(X_0),$$

$$x_m^{(s)} = \varphi(X_0) + f_0(X_0) + \alpha(s, X_0), \quad s \in Z^+,$$

$$x_{m+1}^{(s)} = \varphi\left(X_1^{(0)}\right) + f_1\left(X_1^{(s-1)}\right) + (m+1)\alpha(s, X_0), \quad s \in Z^+.$$

При всіх $s \in Z^+$ і

$$\alpha(s, X_0) = \frac{1}{m+1}\left\{d - \varphi\left(X_1^{(0)}\right) - f_1\left(X_1^{(s-1)}\right)\right\}$$

справджується рівність $x_{m+1}^{(s)} = d$. При цьому

$$x_m^{(s)} = \varphi(X_0) + f_0(X_0) + \frac{1}{m+1}\left\{d - \varphi\left(X_1^{(0)}\right) - f_1\left(X_1^{(s-1)}\right)\right\}, \quad s \in Z^+. \tag{12}$$

Покажемо, що послідовність $\left\{x_m^{(s)}\right\}_{s=1}^{\infty}$ збігається за нормою при $s \to \infty$. Рівність

$$x_m^{(s+1)} - x_m^{(s)} = \frac{1}{m+1}\left\{f_1\left(X_1^{(s-1)}\right) - f_1\left(X_1^{(s)}\right)\right\}$$

веде до індуктивної нерівності

$$\left\| x_m^{(s+1)} - x_m^{(s)} \right\| \le \frac{P}{m+1}\left\| x_m^{(s)} - x_m^{(s-1)} \right\|,$$

з якої неважко одержати оцінку

$$\left\| x_m^{(s+1)} - x_m^{(s)} \right\| \le \left(\frac{P}{m+1}\right)^s \left\| x_m^{(1)} - x_m^{(0)} \right\| = \left(\frac{P}{m+1}\right)^s \| \alpha(1, X_0) \|. \tag{13}$$

Але

$$\| \alpha(1, X_0) \| = \frac{1}{m+1}\left\| d - \varphi\left(X_1^{(0)}\right) - f_1\left(X_1^{(0)}\right) \right\| =$$

$$= \frac{1}{m+1}\left\| d + \sum_{i=0}^{m-2}(-1)^{m-i} C_m^i x_{i+1} + m \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{m-i} C_m^i x_i - m f_0(X_0) - \right.$$

$$- f_1\left(x_1,\ldots,x_{m-1},-\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{m-i}C_m^i x_i + f_0(X_0)\right)\Bigg\| = K^* = \text{const} \geq 0.$$

Якщо $d \in W$ таке, що $K^* = 0$, то досить покласти $\alpha(X_0) = 0$. Вважатимемо d таким, що $K^* > 0$. Оскільки $\dfrac{P}{m+1} < 1$, то $\left\| x_m^{(s+1)} - x_m^{(s)} \right\| \to 0$ при $s \to \infty$, і послідовність $\left\{x_m^{(s)}\right\}_{s=1}^{\infty}$ є фундаментальною. З повноти простору W випливає її збіжність за нормою цього простору при $s \to \infty$ до певного елемента $\bar{x}_m \in W$.

Враховуючи неперервність функції f_1 та переходячи до границі в (12) при $s \to \infty$, одержуємо рівність

$$\bar{x}_m = \varphi(X_0) + f_0(X_0) + \frac{1}{m+1}\left\{d - \varphi\left(X_1^{(0)}\right) - f_1(x_1,\ldots,x_{m-1},\bar{x}_m)\right\}.$$

У рівнянні (11) покладемо

$$\alpha(X_0) = \frac{1}{m+1}\left\{d - \varphi\left(X_1^{(0)}\right) - f_1(x_1,\ldots,x_{m-1},\bar{x}_m)\right\}$$

і знайдемо $z_{m+1}(X_0)$. Рівності

$$z_m(X_0) = \varphi(X_0) + f_0(X_0) + \alpha(X_0) = \bar{x}_m$$

гарантують правильність перетворень

$$z_{m+1}(X_0) = -\sum_{i=0}^{m-2}(-1)^{m-i}C_m^i x_{i+1} + m\bar{x}_m + f_1(x_1,\ldots,x_{m-1},\bar{x}_m) + \alpha(X_0) =$$

$$= -\sum_{i=0}^{m-2}(-1)^{m-i}C_m^i x_{i+1} + m\varphi(X_0) + mf_0(X_0) + f_1(x_1,\ldots,x_{m-1},\bar{x}_m) +$$

$$+ (m+1)\alpha(X_0) = \lim_{s\to\infty} x_{m+1}^{(s)} = d.$$

Припустимо тепер, що існує збурення $\beta(X_0) \in W$ таке, що розв'язок $\bar{z}_n(X_0)$ рівняння $\Delta^m z_n = f_n(z_n, z_{n+1}, \ldots, z_{m+n-1}) + \beta(X_0)$, $n \in Z_0^+$, при $n = m+1$ дорівнює d. Тоді

$$\|\alpha(X_0) - \beta(X_0)\| = \frac{1}{m+1}\|f_1(x_1,\ldots,x_{m-1},\bar{z}_m) - f_1(x_1,\ldots,x_{m-1},\bar{x}_m)\| \leq$$

$$\leq \frac{P}{m+1}\|\bar{x}_m - \bar{z}_m\| = \frac{P}{m+1}\|\alpha(X_0) - \beta(X_0)\|,$$

звідки $\alpha(X_0) = \beta(X_0)$, що завершує доведення.

Наслідок 2. *В умовах теореми 2 розв'язок $y_n(X_0)$ рівняння*

$$\Delta^m y_n = f_n(y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+m-1}) + \alpha(s, X_0), \qquad n \in Z_0^+,$$

задовольняє нерівність

$$\|y_{m+1} - d\| \leq (m+P+1)\frac{PK^*}{m+1-P}\left(\frac{P}{m+1}\right)^s. \tag{14}$$

Доведення. З нерівностей

$$\left\| \bar{x}_m - x_m^{(s)} \right\| \leq \lim_{g \to \infty} \sum_{i=1}^{g} \left\| x_m^{(s+l)} - x_m^{(s+i-1)} \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{P}{m+1} \right)^{s+l-1} K^* = K^* \left(\frac{P}{m+1} \right)^s : \left(1 - \frac{P}{m+1} \right)$$

випливають оцінки

$$\| \alpha(X_0) + \alpha(s, X_0) \| \leq \left\| f_1(x_1, \ldots, x_{m-1}, \bar{x}_m) - f_1\left(x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m^{(s)}\right) \right\| \leq$$

$$\leq \frac{P}{m+1} \left\| \bar{x}_m - x_m^{(s)} \right\| \leq \frac{PK^* \left(\frac{P}{m+1} \right)^s}{m+1-P}. \tag{15}$$

Справджується співвідношення

$$\| z_{m+1} - y_{m+1} \| = \left\| - \sum_{i=0}^{m-2} (-1)^{m-i} C_m^i x_{i+1} + C_m^1 (\varphi(X_0) + f(X_0) + \alpha(X_0)) + \right.$$

$$+ f_1(x_1, \ldots, x_{m-1}, z_m) + \alpha(X_0) + \sum_{i=0}^{m-2} (-1)^{m-i} C_m^i x_{i+1} - C_m^1 (\varphi(X_0) + f(X_0) + \alpha(s, X_0)) -$$

$$\left. - f_1(x_1, \ldots, x_{m-1}, y_m) - \alpha(s, X_0) \right\| \leq (m+1) \| \alpha(X_0) - \alpha(s, X_0) \| +$$

$$+ P \| z_m - y_m \| \leq (m+1+P) \| \alpha(X_0) - \alpha(s, X_0) \|,$$

з яких, враховуючи (15), одержуємо оцінку (14).

Зауважимо, що в умовах теореми 2 вимагається виконання нерівності (10) на всьому просторі W^m. Цю вимогу можна послабити за рахунок звуження множини всіх X_0 до підмножини в W, яка залежить від d.

Наслідок 3. *Нехай нерівність* (10) *справджується для* $\{Z, \overline{Z}\} \subset D = \{ Z \in W^m \mid \| Z \| \leq R = \text{const} > 0 \}$, *і в цій кулі* $\max \{ \| f_0 \|, \| f_1 \| \} \leq F = \text{const} > 0$. *Якщо множина*

$$D_f = \left\{ Z \in D \,\middle|\, \| Z \| \leq \frac{R - F - \dfrac{P(d + F(m+1))}{(m+1-P)(m+1)}}{2^m - 1 + \dfrac{P(2^m + m2^m - 2m - 1)}{(m+1-P)(m+1)}} \right\} \tag{16}$$

не порожня, то для будь-якого $X_0 \in D_f$ *твердження теореми* 2 *залишається справедливим.*

Доведення. Неважко зрозуміти, що досить домогтися належності точки $\left(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m^{(s)}\right)$ множині D при всіх $s \in Z_0^+$. Враховуючи нерівності

$$\left\| x_m^{(0)} \right\| \leq (2^m - 1) \| X_0 \| + \| f_0(X_0) \| \leq (2^m - 1) \| X_0 \| + F,$$

із співвідношень (13) одержуємо

$$\left\| x_m^{(s)} \right\| \leq \left\| x_m^{(0)} \right\| + K^* \sum_{i=1}^{s-1} \left(\frac{P}{m=1} \right)^i < \left\| x_m^{(0)} \right\| + \frac{K^* P}{m+1-P}.$$

Якщо $\| X_0 \| \leq \dfrac{R - F}{2^m - 1}$, то

$$K^* \le \frac{1}{m+1}\left(d + (2^m - m - 1)\|X_0\| + m(2^m - 1)\|X_0\| + (m+1)F\right).$$

З нерівностей

$$\|x_m^{(s)}\| \le \|x_m^{(0)}\| + \frac{P\left(d+(2^m-m-1)\|X_0\|+m(2^m-1)\|X_0\|+(m+1)F\right)}{(m+1)(m+1-P)} < R$$

випливає оцінка (16).

На завершення зауважимо, що у випадку $k > 1$ рекурентні співвідношення, введені у теоремі 2, не розв'язують поставлену задачу. В роботі [8] задачу розв'язано для довільного натурального k, але при $m = 1$. Там же наведено приклад застосування одержаних результатів до наближеної побудови потрібного збуреного рівняння у тривимірному просторі.

1. *Мартинюк Д. І., Верьовкіна Г. В.* Інваріантні множини злічених систем різницевих рівнянь // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. наук. – 1997. – Вип. 1. – С. 117–127.
2. *Ronto M., Ronto A., Trofimchuk S.* Numerical-analytic method for differential and difference equations in partially ordered Banach spaces, and some applications. – Miskolc, 1996. – 34 p. – (Preprint/Univ. Miskolc, Inst. Math:, 96.02).
3. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Инвариантные торы линейных счетных систем дискретных уравнений, заданных на бесконечномерном торе // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 2. – С. 244–251.
4. *Самойленко А. М., Слюсарчук В. Е., Слюсарчук В. В.* Исследование нелинейного разностного уравнения в банаховом пространстве в окрестности квазипериодического решения // Там же. – 1997. – **49**, № 12. – С. 1661–1676.
5. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Предельные теоремы в теории систем разностных уравнений. – Киев, 1998. – 60 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 98.3).
6. *Теплинский Ю. В., Семенишина И. В.* О периодических решениях разностных уравнений в бесконечномерных пространствах // Нелінійні коливання. – 2000. – **3**, № 3. – С. 414–430.
7. *Томилов Ю. В.* Об асимптотическом поведении последовательностей, заданных рекуррентными соотношениями, в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 5. – С. 633–641.
8. *Теплінський Ю. В., Семенишина І. В.* Про задачу Коші для вироджених різницевих рівнянь у банаховому просторі // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. праць. – 2001. – Вип. 7. – С. 322–333.
9. *Семенишина І. В.* Про періодичні розв'язки різницевих рівнянь другого порядку в банаховому просторі // Зб. наук. праць Кам'янець-Поділ. пед. ун-ту. Сер. фіз.-мат. – 2000. – Вип. 5. – С. 106–111.
10. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 741 с.
11. *Колмогоров А. М., Фомін С. В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – Київ: Вища шк., 1974. – 455 с.

Одержано 10.01.2002