УДК 517.2

В. П. Яковець, М. А. Стрельніков (Ніжин. пед. ун-т)

ПОБУДОВА АСИМПТОТИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА МАЛИМИ ПАРАМЕТРАМИ

We consider a linear homogeneous system of differential equations with two small parameters. In this system, the dependence on one of parameters is regular and on another is singular. By using methods of the theory of perturbations of linear operators and the space analog of the Newton diagrams, we investigate the asymptotic behavior of general solution of the system of this sort in the case where its principal matrix possesses a multiple eigenvalue associated with a multiple elementary divisor.

Розглянуто лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь з двома малими параметрами, у якій залежність від одного параметра є регулярною, а від другого — сингулярною. За допомогою методів теорії збурень лінійних операторів та просторового аналогу діаграм Ньютона досліджено асимптотику загального розв'язку такої системи у випадку, коли її головна матриця має кратне власне значення, якому відповідає кратний елементарний дільник.

1. Розглянемо систему рівнянь

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = A(t, \mu) x, \tag{1}$$

де x — n-вимірний вектор, $A(t, \mu)$ — матриця розмірності $n \times n$, $\varepsilon, \mu > 0$ — малі дійсні параметри, $t \in [0; T]$, для якої виконуються такі умови:

1) матриця $A(t, \mu)$ має на відрізку $[0; T]$ рівномірне асимптотичне розвинення за степенями параметра μ:

$$A(t, \mu) \sim \sum_{k \geq 0} \mu^k A_k(t);$$

2) матриці $A_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, — нескінченно диференційовні на відрізку $[0; T]$;

3) головна матриця $A_0(t)$ має власне значення $\lambda_0(t)$ кратності n, якому відповідає один елементарний дільник тієї ж кратності.

Будемо досліджувати питання про побудову асимптотики фундаментальної системи розв'язків даної системи рівнянь.

Зазначимо, що дане питання досить детально вивчено для систем, які сингулярно залежать від одного малого параметра, а саме, коли $\mu = \varepsilon$ (див., наприклад, [1 – 5]). Системи з двома незалежними параметрами, незважаючи на їх практичне значення, досліджено значно менше. Зокрема, в [6] розглянуто аналогічну задачу, коли головна матриця системи має тільки прості власні значення. Випадок кратного власного значення вивчено в [7], де вперше було встановлено, що відповідні асимптотичні розвинення розв'язків можна побудувати у вигляді подвійних асимптотичних рядів за дробовими степенями одного з параметрів та їх відношення, а в роботі [8] для дослідження більш загальної системи застосовано просторовий аналог діаграм Ньютона.

У даній статті використовуються ідеї роботи [8] для проведення асимптотичного аналізу загального розв'язку системи (1) у випадку кратного спектра головної матриці. При цьому для спрощення вигляду формул ми обмежимось існуванням лише одного кратного власного значення, оскільки, як буде видно далі, розв'язки будуються окремо для кожного з власних значень незалежно від інших, якщо зберігається стабільність спектра матриці $A_0(t)$ при всіх $t \in [0; T]$.

2. Як показано в [4], власному значенню $\lambda_0(t)$ матриці $A_0(t)$ відповідає жорданів ланцюжок векторів довжини n, який складається з власного вектора

$\varphi(t) = \varphi_1(t)$ і приєднаних векторів $\varphi_i(t)$, $i = \overline{2, n}$, які задовольняють співвідношення

$$(A_0 - \lambda_0 E)\varphi_1(t) = 0,$$
$$(A_0 - \lambda_0 E)\varphi_i(t) = \varphi_{i-1}(t), \quad i = \overline{2, n}, \tag{2}$$

а рівняння

$$(A_0 - \lambda_0 E)y = \varphi_n(t) \tag{3}$$

не має розв'язку (через E позначено одиничну матрицю). Вектори $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, визначені неоднозначно. Зафіксуємо такий власний вектор $\varphi(t)$, у якого всі координати є нескінченно диференційовними функціями (це можливо внаслідок нескінченної диференційовності матриці $A_0(t)$ [9]), а приєднані вектори знайдемо за формулами

$$\varphi_i(t) = H\varphi_{i-1}(t), \quad i = \overline{2, n}, \tag{4}$$

де $H(t)$ — напівобернена матриця до матриці $A_0(t) - \lambda_0(t)E$, яку виберемо так [9], щоб усі її елементи були нескінченно диференційовними на $[0; T]$. З (4) одержимо

$$\varphi_i(t) = H^{i-1}\varphi(t), \quad i = \overline{1, n}. \tag{5}$$

Нехай $\psi(t)$ — елемент нуль-простору матриці $(A_0 - \lambda_0 E)^*$, спряженої з $A_0 - \lambda_0 E$. Із сумісності рівнянь (2) і несумісності рівняння (3) випливає, що

$$\left(H^{i-1}\varphi, \psi\right) = 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{6}$$

$$\left(H^{n-1}\varphi, \psi\right) \neq 0, \quad t \in [0; T],$$

де через (x, y) позначено скалярний добуток в унітарному векторному просторі, в якому розглядається система (1).

З огляду на те, що вектор $\psi(t)$ визначено з точністю до скалярного множника, згідно з (7) його можна вибрати так, щоб виконувалась рівність $\left(H^{i-1}\varphi, \psi\right) = 1$. Крім того, припустимо, що $\psi(t) \in C^{\infty}_{[0;T]}$. Тоді, враховуючи (6) і нільпотентну властивість напівоберненої матриці ($H^i = 0$ при $i \geq n$ [9]), отримаємо

$$\left(H^{i-1}\varphi, \psi\right) = \delta_{i,n}, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

де $\delta_{i,n}$ — символ Кронекера.

3. Оскільки система (1) є сингулярно збуреною, то відповідно до класичної теорії Дж. Біркгофа [4] шукатимемо її лінійно незалежні розв'язки у вигляді

$$x(t, \varepsilon, \mu) = u(t, \varepsilon, \mu)\exp\left\{\varepsilon^{-1}\int_0^t (\lambda_0(t) + \lambda(t, \varepsilon, \mu))dt\right\}, \tag{9}$$

де n-вимірний вектор $u(t, \varepsilon, \mu)$ і скалярну функцію $\lambda(t, \varepsilon, \mu)$ необхідно знайти.

Підставивши вектор-функцію (9) у систему (1), одержимо

$$(A_0 - \lambda_0 E)u = \left(\lambda E - \tilde{A} + \varepsilon D\right)u, \tag{10}$$

де

$$\tilde{A}(t,\mu) = A(t,\mu) - A_0(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k A_k(t), \tag{11}$$

а символом D позначено оператор диференціювання $D = \frac{d}{dt}$. Вектор $u(t,\varepsilon,\mu)$ буде задовольняти рівняння (10) тоді і тільки тоді, коли

$$\left(\left(\lambda E - \tilde{A} + \varepsilon D\right)u, \psi\right) = 0. \tag{12}$$

При цьому з (10) випливає, що

$$u = \left(\lambda H - H\tilde{A} + \varepsilon HD\right)u + c\varphi, \tag{13}$$

де c — довільний скалярний множник.

Як буде видно з подальших перетворень, скалярний множник c є тим множником, з точністю до якого знайдено $u(t,\varepsilon,\mu)$ — власний вектор оператора $A(t,\mu) - \varepsilon D$. Тому, поклавши $c = 1$, з рівняння (13) отримаємо

$$\left(E - \lambda H + H\tilde{A} - \varepsilon HD\right)u = \varphi.$$

Легко переконатися, що ця рівність формально справджується, якщо вектор u визначити у вигляді формального ряду

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\lambda H - H\tilde{A} + \varepsilon HD\right)^k \varphi. \tag{14}$$

Підставивши (14) у (12), одержимо рівняння розгалуження для шуканої функції $\lambda(t,\varepsilon,\mu)$

$$L(\lambda,\varepsilon,\mu) = \left(\lambda E - \tilde{A} + \varepsilon D\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\lambda H - H\tilde{A} + \varepsilon HD\right)^k \varphi, \psi\right) = 0. \tag{15}$$

Подамо операторний вираз $L(\lambda,\varepsilon,\mu)$ у вигляді формального розвинення

$$L(\lambda,\varepsilon,\mu) = \sum_{k+r+s\geq 0} L_{krs}\left[\lambda^k\right] \varepsilon^r \mu^s, \tag{16}$$

де k — загальний степінь функції λ у записі операторної функції $L_{krs}\left[\lambda^k\right]$.

Позначимо

$$\tilde{L} = \left(\lambda E - \tilde{A} + \varepsilon D\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\lambda H - H\tilde{A} + \varepsilon HD\right)^k.$$

Тоді

$$H\tilde{L} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda H - H\tilde{A} + \varepsilon HD\right)^k.$$

Розглянемо вирази $\left(\lambda H - H\tilde{A} + \varepsilon HD\right)^k$, $k = 1, 2, \ldots$. При $k = 2, 3$ отримаємо

$$\left(\lambda H - H\tilde{A} + \varepsilon HD\right)^2 = \lambda^2 H^2 - \lambda\left[H\cdot H\tilde{A} + H\tilde{A}\cdot H\right] + \left(H\tilde{A}\right)^2 + \varepsilon^2 (HD)^2 -$$

$$- \varepsilon\left[H\tilde{A}\cdot HD + HDH\tilde{A}\right] + \lambda\varepsilon[H\cdot HD + HDH] + \varepsilon\lambda' H^2,$$

$$\left(\lambda H - H\tilde{A} + \varepsilon HD\right)^3 = \lambda^3 H^3 - \lambda^2\left[H^2\cdot H\tilde{A} + H\cdot H\tilde{A}\cdot H + H\tilde{A}\cdot H^2\right] +$$

$$+ \lambda\left[H\cdot\left(H\bar{A}\right)^2 + H\bar{A}\cdot H\cdot H\bar{A} + \left(H\bar{A}\right)^2\cdot H\right] - \left(H\bar{A}\right)^3 + \varepsilon^3(HD)^3 -$$

$$- \varepsilon^2\left[H\bar{A}\cdot(HD)^2 + HDH\bar{A}\cdot HD + (HD)^2 H\bar{A}\right] +$$

$$+ \varepsilon\left[\left(H\bar{A}\right)^2\cdot HD + H\bar{A}\cdot HDH\bar{A} + HD\left(H\bar{A}\right)^2\right] + \lambda\varepsilon^2\left[H\cdot(HD)^2 + HDH\cdot HD + (HD)^2 H\right] +$$

$$+ \lambda^2\varepsilon\left[H^2\cdot HD + H\cdot HDH + HDH^2\right] -$$

$$- \lambda\varepsilon\left[H\cdot H\bar{A}\cdot HD + H\cdot HDH\bar{A} + H\bar{A}\cdot H\cdot HD + H\bar{A}\cdot HDH + HDH\cdot H\bar{A} + HDH\bar{A}\cdot H\right] +$$

$$+ \varepsilon\left(\lambda\lambda' + (\lambda')^2\right)H^3 - \varepsilon\lambda'\left[H\bar{A}\cdot H^2 + H^2\cdot H\bar{A} + H\cdot H\bar{A}\cdot H\right] +$$

$$+ \varepsilon^2\lambda'\left[H^2\cdot HD + H\cdot HDH + HDH^2\right] + \varepsilon^2\lambda'' H^3.$$

Аналізуючи ці вирази, робимо висновок, що в загальному випадку справджується формула

$$\left(\lambda H - H\bar{A} + \varepsilon HD\right)^k =$$

$$= \sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-s}\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^s\varepsilon^{k-j-s+i}D^i\left[\lambda^{j-i}\right]\sigma\left[\left(H\bar{A}\right)_s;(H)_j;(HD)_{k-j-s}\right] +$$

$$+ \sum_{s=0}^{k}(-1)^s\varepsilon^{k-s}\sigma\left[\left(H\bar{A}\right)_s;(HD)_{k-s}\right], \tag{18}$$

де через $\sigma\left[\left(H\bar{A}\right)_s;(H)_j;(HD)_{k-j-s}\right]$ позначено суму всіх можливих „добутків" s множників $H\bar{A}$, j множників H та $k-j-s$ „множників" HD, а через $D^i\left[\lambda^{j-i}\right]$ — суму всіх можливих „добутків" i „множників" D та $j-i$ множників λ, причому останнім множником у всіх цих „добутках" є λ, а оператор D діє на весь вираз праворуч від нього, наприклад,

$$D^2\left[\lambda^2\right] = D^2\lambda^2 + D\lambda D\lambda + \lambda D^2\lambda = \left(\lambda^2\right)'' + 3\left(\lambda\lambda'\right)' + \lambda\lambda'' = 3\left(\lambda'\right)^2 + 4\lambda\lambda''.$$

Формула (18) легко доводиться методом математичної індукції.

Підставивши (18) у (17), знайдемо

$$H\bar{L} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\varepsilon^{k-s}\sigma\left[\left(H\bar{A}\right)_s;(HD)_{k-s}\right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-s}\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^s\varepsilon^{k-j-s+i}D^i\left[\lambda^{j-i}\right]\sigma\left[\left(H\bar{A}\right)_s;(H)_j;(HD)_{k-j-s}\right]. \tag{19}$$

Враховуючи розвинення (11), згрупуємо в цьому виразі члени з однаковими степенями величин ε і μ. Змінюючи порядок підсумовування, перший доданок подамо у вигляді

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\varepsilon^{k-s}\sigma\left[\left(H\bar{A}\right)_s;(HD)_{k-s}\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{k}\sum_{r=s}^{\infty}(-1)^s\varepsilon^{k-s}\mu^r P^r_{s,k-s}\left(H\bar{A}, HD\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k(HD)^k =$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=s}^{\infty}\sum_{r=s}^{\infty}(-1)^s\varepsilon^{k-s}\mu^r P^r_{s,k-s}\left(H\bar{A}, HD\right) + \sum_{r=1}^{\infty}\varepsilon^r (HD)^r,$$

де символом $P^r_{s,k-s}\left(H\bar{A}, HD\right)$ позначено суму всіх можливих „добутків" s множників HA_i, сума індексів яких дорівнює r, та $k-s$ „множників" HD. Поклавши $k-s=j$ замість k і змінивши порядок підсумовування, одержимо

$$\sigma_1 = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{r=s}^{\infty}(-1)^s\varepsilon^{j}\mu^r P^r_{s,j}\left(H\bar{A}, HD\right) + \sum_{r=1}^{\infty}\varepsilon^r (HD)^r =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{r}(-1)^s\varepsilon^{j}\mu^r P^r_{s,j}\left(H\bar{A}, HD\right) + \sum_{r=1}^{\infty}\varepsilon^r (HD)^r.$$

Здійснивши заміну індексів, в результаті отримаємо

$$\sigma_1 = \sum_{r=1}^{\infty}\varepsilon^r (HD)^r + \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{s}(-1)^j\varepsilon^{r}\mu^s P^s_{j,r}\left(H\bar{A}, HD\right).$$

Аналогічно перетворимо другий доданок виразу (19)

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-s}\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^s\varepsilon^{k-j-s+i}D^i\left[\lambda^{j-i}\right]\sigma\left[\left(H\bar{A}\right)_s;(H)_j;(HD)_{k-j-s}\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-s}\sum_{i=0}^{j-1}\sum_{r=s}^{\infty}(-1)^s\varepsilon^{k-j-s+i}\mu^r D^i\left[\lambda^{j-i}\right]P^r_{s,j,k-j-s}\left(H\bar{A}; H; HD\right),$$

де $P^r_{s,j,k-j-s}\left(H\bar{A}; H; HD\right)$ — сума всіх можливих „добутків" s множників HA_i, сума індексів яких дорівнює r, j множників H та $k-j-s$ „множників" HD. Поклавши $j-i=\alpha$ замість i та змінивши порядок підсумовування, знайдемо

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-s}\sum_{\alpha=1}^{j}\sum_{r=s}^{\infty}(-1)^s\varepsilon^{k-s-\alpha}\mu^r D^{j-\alpha}\left[\lambda^{\alpha}\right]P^r_{s,j,k-s-j}\left(H\bar{A}; H; HD\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha=1}^{j}\sum_{s=0}^{k-j}\sum_{r=s}^{\infty}(-1)^s\varepsilon^{k-s-\alpha}\mu^r D^{j-\alpha}\left[\lambda^{\alpha}\right]P^r_{s,j,k-s-j}\left(H\bar{A}; H; HD\right).$$

Ввівши індекс $\beta = k-s-\alpha$ замість s і знову змінивши порядок підсумовування, одержимо

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha=1}^{j}\sum_{\beta=j-\alpha}^{k-\alpha}\sum_{r=k-\alpha-\beta}^{\infty}(-1)^{k-\alpha-\beta}\varepsilon^{\beta}\mu^r D^{j-\alpha}\left[\lambda^{\alpha}\right]P^r_{k-\alpha-\beta,j,\alpha+\beta-j}\left(H\bar{A}; H; HD\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=0}^{k-\alpha}\sum_{r=k-\alpha-\beta}^{\infty}\sum_{j=\alpha}^{\alpha+\beta}(-1)^{k-\alpha-\beta}\varepsilon^{\beta}\mu^r D^{j-k}\left[\lambda^{\alpha}\right]P^r_{k-\alpha-\beta,j,\alpha+\beta-j}\left(H\bar{A}; H; HD\right) =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{\beta=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=\alpha+\beta}^{\alpha+\beta+r}\sum_{j=\alpha}^{\alpha+\beta}(-1)^{k-\alpha-\beta}\varepsilon^{\beta}\mu^r D^{j-\alpha}\left[\lambda^{\alpha}\right]P^r_{k-\alpha-\beta,j,\alpha+\beta-j}\left(H\bar{A}; H; HD\right).$$

Нарешті, поклавши $j-\alpha=i$ замість j, а потім $k-\alpha-\beta=j$ замість k та змінивши позначення індексів: $\alpha=k$, $\beta=r$, $r=s$, $j=i$, в результаті знайдемо

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{s}\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\varepsilon^r\mu^s D^j\left[\lambda^k\right]P^r_{l,j+k,r-j}\left(H\tilde{A};H;HD\right).$$

Отже, вираз (19) має вигляд

$$H\tilde{L} = \sum_{r=1}^{\infty}\varepsilon^r(HD)^r + \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{s}(-1)^l\varepsilon^r\mu^s P^s_{l,r}\left(H\tilde{A},HD\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{s}\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\varepsilon^r\mu^s D^j\left[\lambda^k\right]P^s_{l,j+k,r-j}\left(H\tilde{A};H;HD\right). \tag{20}$$

Тоді

$$L(\lambda,\varepsilon,\mu) = \sum_{r=1}^{\infty}\varepsilon^r\left(D(HD)^{r-1}\varphi,\psi\right) + \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{s}(-1)^l\varepsilon^r\mu^s\left(\tilde{P}^s_{l,r}\left(H\tilde{A};HD\right)\varphi,\psi\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{s}\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\varepsilon^r\mu^s D^j\left[\lambda^k\right]\left(\tilde{P}^s_{l,j+k,r-j}\left(H\tilde{A};H;HD\right)\varphi,\psi\right),$$

де вирази $\tilde{P}^s_{l,r}\left(H\tilde{A};HD\right)$, $\tilde{P}^s_{l,j+k,r-j}\left(H\tilde{A};H;HD\right)$ відрізняються від $P^s_{l,r}\left(H\tilde{A};HD\right)$, $P^s_{l,j+k,r-j}\left(H\tilde{A};H;HD\right)$ відсутністю в усіх доданках першого множника H:

$$H\,\tilde{P}^s_{l,r}\left(H\tilde{A};HD\right) = P^s_{l,r}\left(H\tilde{A};HD\right),$$

$$H\,\tilde{P}^s_{l,j+k,r-j}\left(H\tilde{A};H;HD\right) = P^s_{l,j+k,r-j}\left(H\tilde{A};H;HD\right).$$

Звідси випливають такі формули для коефіцієнтів рівняння розгалуження (15):

$$L_{krs}\left[\lambda^k\right] = \sum_{l=0}^{s}\sum_{j=0}^{r}(-1)^l D^j\left[\lambda^k\right]\left(\tilde{P}^s_{l,j+k,r-j}\left(H\tilde{A};H;HD\right)\varphi,\psi\right),\quad k+r+s\geq 1. \tag{21}$$

Зокрема,

$$L_{0rs}\left[\lambda^k\right] = \sum_{l=1}^{s}(-1)^l\left(\tilde{P}^s_{l,r}\left(H\tilde{A};HD\right)\varphi,\psi\right),\quad r+s\geq 1, \tag{22}$$

$$L_{kr0}\left[\lambda^k\right] = \sum_{j=0}^{r}D^j\left[\lambda^k\right]\left(\tilde{\sigma}\left[(HD)_{r-j}(H)_{k+j}\right]\varphi,\psi\right),\quad k+r\geq 1, \tag{23}$$

$$L_{k0s}\left[\lambda^k\right] = \sum_{l=0}^{s}(-1)^l\lambda^k\left(\tilde{P}^s_{l,k}\left(H\tilde{A};H\right)\varphi,\psi\right),\quad k+s\geq 1, \tag{24}$$

$$L_{0r0} = \left(D(HD)^{r-1}\varphi,\psi\right),\quad r=1,2,\ldots, \tag{25}$$

$$L_{00s} = \sum_{l=1}^{s}(-1)^l\left(\tilde{P}^s_l\left(H\tilde{A}\right)\varphi,\psi\right),\quad s=1,2,\ldots, \tag{26}$$

і згідно з (8)

$$L_{k00}\left[\lambda^k\right] = \lambda^k\left(H^{k-1}\varphi,\psi\right) = \lambda^k\,\delta_{k,n},\quad k=1,2,\ldots. \tag{27}$$

Через $\tilde{\sigma}\left[(HD)_{r-j}(H)_{k+j}\right]$ тут позначено суму всіх можливих „добутків" $r-j$ „множників" HD та $k+j$ множників H, з кожного доданку якої вилучено перший множник H.

Підставивши (20) у (14), одержимо вираз для вектора u:

$$u(t, \varepsilon, \mu) = \varphi + H\tilde{L}\varphi =$$

$$= \varphi + \sum_{s=1}^{\infty} \mu^s \tilde{L}_{00s}\varphi + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^r \mu^s \tilde{L}_{0rs}\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^r \mu^s \tilde{L}_{krs}\left[\lambda^k\right]\varphi, \qquad (28)$$

де

$$\tilde{L}_{krs}\left[\lambda^k\right] = \sum_{i=0}^{s} \sum_{j=0}^{r} (-1)^i \varepsilon^r \mu^s D^j\left[\lambda^k\right] P^s_{i,k+j,r-j}\left(H\tilde{A}; H; HD\right), \quad k + r + s \geq 1. \qquad (29)$$

Аналізуючи наведені перетворення, в результаті отримаємо таку теорему.

Теорема 1. *Вектор-функція* (9) *є формальним розв'язком системи* (1) *тоді і тільки тоді, коли функція* $\lambda(t, \varepsilon, \mu)$ *задовольняє рівняння*

$$\lambda^n + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r+s=1}^{\infty} \varepsilon^r \mu^s L_{krs}\left[\lambda^k\right] = 0, \qquad (30)$$

де операторні функції $L_{krs}\left[\lambda^k\right]$ *визначено за формулами* (21). *При цьому відповідна вектор-функція* $u(t, \varepsilon, \mu)$ *має зображення у вигляді формального розвинення* (28), *коефіцієнти якого задано формулами* (29).

4. Далі наше завдання полягає в тому, щоб знайти функцію $\lambda(t, \varepsilon, \mu)$ та відповідну вектор-функцію $u(t, \varepsilon, \mu)$ у вигляді формальних розвинень за степенями параметрів ε і μ. Рівняння (30) відносно функції λ задовольняє основні умови роботи [10], де для знаходження малих розв'язків таких рівнянь застосовано просторовий аналог діаграм Ньютона. Саме цей метод ми використаємо для дослідження рівняння (30).

Припустимо, що $\dfrac{\varepsilon}{\mu} << 1$, тобто будемо шукати формальні розв'язки рівняння (30) в околі прямої $\varepsilon = 0$. В цьому випадку кожному відмінному від нуля коефіцієнту $L_{krs}\left[\lambda^k\right]$ рівняння (30) поставимо у відповідність точку (k, r, s) у прямокутній системі координат $Okrs$. Спроектувавши всі ці точки на площину Okr, побудуємо на ній діаграму Ньютона D_1 (рис. 1), яка складається із спадних ланок $L^{(i)}$, $i = \overline{1, \nu}$, з нахилами $p^{(i)}$, $i = \overline{1, \nu}$ (під нахилом ланки $L^{(i)}$ розуміють тангенс кута нахилу цієї ланки до від'ємного напрямку осі Ok). Знайшовши прообрази точок кожної з ланок $L^{(i)}$ діаграми D_1, проектуємо їх на площину Oks і на цій площині будуємо діаграму Ньютона для кожної з утворених решіток. У результаті отримаємо ламану D_2, що складається з ланок $L^{i,\theta}$, $i = \overline{1, \nu}$, $\theta = \overline{1, \alpha_i}$, яка, взагалі кажучи, не є діаграмою Ньютона для точок, утворених внаслідок проектування точок (k, r, s) на площину Oks, оскільки частина з цих точок може знаходитись нижче від ламаної D_2, а її ланки не обов'язково будуть розміщені в порядку спадання нахилів (рис. 2).

Щоб звести діаграму D_2 до стандартного вигляду $\overline{D}_2$, у рівнянні (30) необхідно зробити підстановку

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon}\mu^m, \qquad (31)$$

де m — ціле невід'ємне число.

Як показано в [10], якщо m — найменше ціле число, яке задовольняє нерівність

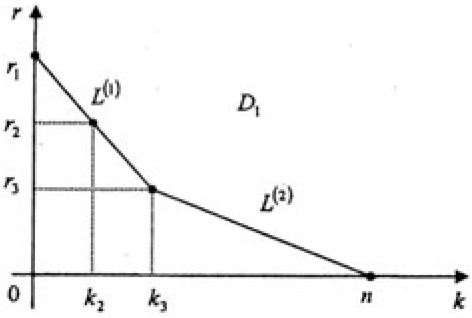

Рис. 1

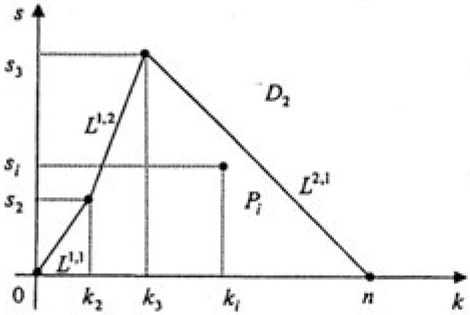

Рис. 2

$$m \geq \frac{p^{i+1,1} - p^{i,\alpha_i}}{p^{(i)} - p^{(i+1)}}, \quad i = \overline{1, \nu - 1}, \tag{32}$$

де $p^{i,\theta}$ — нахил ланки $L^{i,\theta}$, $i = \overline{1, \nu}$, $\theta = \overline{1, \alpha_i}$, то ланки діаграми $\overline{D}_2$ будуть розміщені в порядку незростання нахилів.

Нехай $P_i(k_i, s_i)$ — точки, що є проекціями точок $\overline{P}_i(k_i, r_i, s_i)$ на площину Oks і розташовані нижче від діаграми D_2. Кожній такій точці P_i поставимо у відповідність точку $P_i'(k_i, r_i', s_i')$ таку, що $(k_i, r_i') \in D_1$, $(k_i, s_i') \in D_2$. Позначимо через $\bar{r}_i$ найменшу з ординат точок $\overline{P}_i$. Тоді якщо число m задовольняє нерівність

$$m \geq \frac{s_i' - s_i}{\bar{r}_i - r_i'}, \tag{33}$$

то нижче від нової діаграми $\overline{D}_2$ після заміни (31) вже не буде жодної точки P_i [10].

Таким чином, вибравши число m так, щоб виконувались нерівності (32), (33), за допомогою заміни (31) отримаємо стандартний випадок, коли $\overline{D}_2$ є незростаючою діаграмою Ньютона. При цьому згідно з (31) $\overline{D}_2$ утворюється з D_2, якщо точкам (k_i, s_i) діаграми D_2 поставити у відповідність точки $(k_i, mr_i + s_i)$ (рис. 3). Нехай тепер $L^{(i)}$ — деяка фіксована ланка діаграми D_1, а $\overline{L}^{i,\theta}$ — одна з відповідних їй ланок діаграми $\overline{D}_2$. Якщо p_1/q_1 — нахил ланки $L^{(i)}$, а p_2/q_2 — нахил ланки $\overline{L}^{i,\theta}$, то згідно з [10] розв'язки рівняння (27) можна побудувати у вигляді формальних розвинень

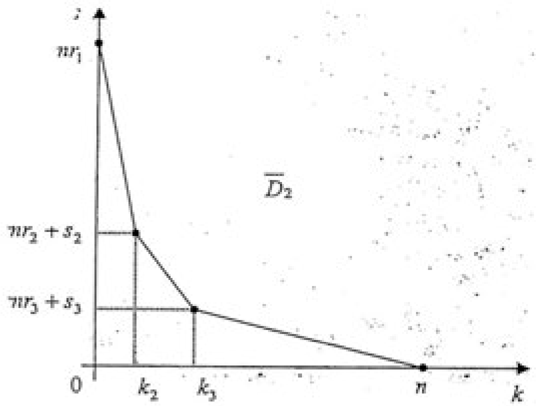

Рис. 3

$$\lambda(t, \varepsilon, \mu) = \lambda_{00}(t)\bar{\varepsilon}^{\frac{p_1}{q_1}}\mu^{\frac{p_2}{q_2}} + \sum_{i+j\geq 1}\lambda_{ij}(t)\bar{\varepsilon}^{\frac{p_1+i}{q_1}}\mu^{\frac{p_2+j}{q_2}}. \tag{34}$$

Коефіцієнт $\lambda_{00}(t)$ цього розвинення отримується з визначального рівняння

$$\sum{}' L_{krs}\left[\lambda_{00}^k\right] = 0, \tag{35}$$

де підсумовування здійснюється за всіма k, r, s такими, що $(k, r) \in L^{(i)}$, $(k, s) \in L^{i,\theta}$, де $L^{i,\theta}$ — саме та ланка діаграми D_2, з якої одержується ланка $\overline{L}^{i,\theta}$ діаграми $\overline{D}_2$. Якщо λ_{00} — простий ненульовий корінь рівняння (35), то йому відповідає єдиний малий розв'язок рівняння (30), що має вигляд (34). Коефіцієнти цього розвинення можна знайти методом невизначених коефіцієнтів, підставляючи (34) в (30) і прирівнюючи в одержаному співвідношенні вирази при однакових степенях параметрів.

У випадку, коли $\lambda_{00}(t)$ — кратний корінь визначального рівняння, зробивши в (30) заміну $\lambda = \lambda_{00} + \eta$, одержимо рівняння розгалуження відносно η, для якого необхідно повторити описаний алгоритм знаходження малих розв'язків. Якщо відповідне визначальне рівняння знову матиме кратний корінь, то дана процедура повторюється ще раз, і так далі.

5. Застосовуючи описаний метод, проаналізуємо отримане рівняння розгалуження (30) і розглянемо деякі конкретні випадки.

Перш за все відмітимо, що рівняння (30) має n малих розв'язків $\lambda(t, \varepsilon, \mu)$, включаючи нульові. Це випливає з того, що довжини обох проекцій діаграм D_1, D_2 на вісь Ok дорівнюють n внаслідок виконання співвідношення (27).

Якщо $\lambda(t, \varepsilon, \mu)$ — розв'язок рівняння (30), то згідно з (10) функція $\lambda_{00}(t) + \lambda(t, \varepsilon, \mu)$ буде власним значенням оператора $A(t, \mu) - \varepsilon D$, а вектор $u(t, \varepsilon, \mu)$, визначений за формулою (28), — відповідним власним елементом. Тому якщо рівняння (30) має n різних малих розв'язків, то система (1) має n лінійно незалежних формальних розв'язків вигляду (9).

З формули (23) одержуємо

$$L_{k,n-k,0}\left[\lambda^k\right] = \sum_{j=0}^{n-k} D^j\left[\lambda^k\right]\left(\bar{\sigma}\left[(HD)_{n-k-j}; (H)_{k+j}\right]\varphi, \psi\right) =$$

$$= D^{n-k}\left[\lambda^k\right]\left(H^{n-1}\varphi, \psi\right) + \sum_{j=0}^{n-k-1} D^j\left[\lambda^k\right]\left(\bar{\sigma}\left[(HD)_{n-k-j}; (H)_{k+j}\right]\varphi, \psi\right) =$$

$$= D^{n-k}\left[\lambda^k\right] + \sum_{j=0}^{n-k-1} D^j\left[\lambda^k\right]\left(\bar{\sigma}\left[(HD)_{n-k-j};(H)_{k+j}\right]\varphi,\psi\right). \tag{36}$$

Звідси випливає, що, незалежно від вигляду коефіцієнтів рівняння (1), на площині Okr завжди існують точки $(k; n-k)$, $k=\overline{1,n}$, які лежать на прямій $k+r=n$. Це означає, що рівняння (30) може мати не більше одного нульового розв'язку лише в тому випадку, коли $L_{0rs} \equiv 0$ для всіх $r+s \geq 1$.

Розглянемо тепер деякі конкретні випадки.

Припустимо, що

$$L_{001} = -(A_1\varphi,\psi) \neq 0 \quad \forall t \in [0;T]. \tag{37}$$

У цьому випадку діаграма D_1 є відрізком осі Ok, який з'єднує початок координат з точкою $(n;0;0)$, а діаграма D_2 — відрізком у площині Oks, який сполучає точки $(n;0;0)$ і $(0;0;1)$ (рис. 4).

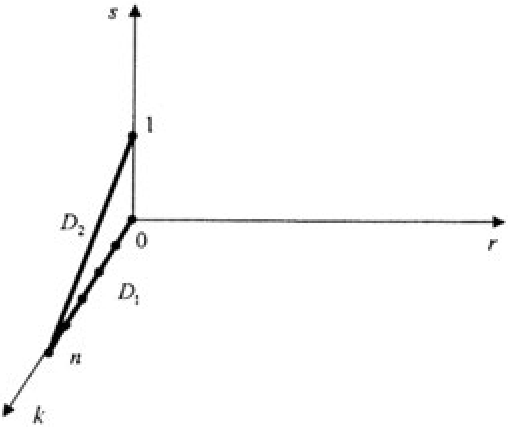

Рис. 4

Зазначимо, що згідно з (36) нижче від діаграми D_2 завжди є точки $(k;0;0)$, $k=\overline{1,n-1}$. Щоб ці точки (а також точка $(0;0;0)$, якщо й вона знаходиться нижче від діаграми D_2) були розташовані вище вказаної діаграми, зробимо в рівнянні (30) заміну (31). Легко переконатися, що в даному випадку число $m=1$ задовольняє нерівність (33), тому замість параметра ε введемо параметр $\bar{\varepsilon}=\dfrac{\varepsilon}{\mu}$. В результаті цього перетворення діаграма D_2 не зміниться, але нижче від неї вже не буде жодної точки.

Оскільки нахили діаграм D_1 і D_2 дорівнюють відповідно 0 та $\dfrac{1}{n}$, то малі розв'язки рівняння (30) необхідно будувати у вигляді розвинення

$$\lambda(t,\varepsilon,\mu) = \nu\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_{ij}(t)\bar{\varepsilon}^i\nu^j, \tag{38}$$

де $\nu=\sqrt[n]{\mu}$. Оскільки згідно з умовою (37) відповідне визначальне рівняння

$$\lambda_{00}^n - (A_1\varphi,\psi) = 0 \tag{39}$$

має n різних відмінних від нуля коренів

$$\lambda_{00}^{(m)}(t) = \sqrt[n]{|(A_1\varphi, \psi)|}\exp\left\{i\frac{\arg(A_1\varphi, \psi) + 2(m-1)\pi}{n}\right\}, \quad m = \overline{1, n}, \tag{40}$$

то можна побудувати n розвинень вигляду (38).

Зафіксуємо одну з функцій $\lambda_{00}(t)$, що визначаються за формулою (40), і побудуємо відповідне розвинення (38). Підставивши (38) у рівняння (30) і згрупувавши доданки з однаковими степенями величин $\tilde{\varepsilon}$, ν, одержимо

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty}\tilde{\varepsilon}\nu^j P_n^{i,j-n}(\lambda) +$$
$$+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=2n+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{j-2n}\sum_{r=1}^{\min\left(i;\left[\frac{j-n-k}{n}\right]\right)}\sum_{s=1}^{\left[\frac{j-rn-k}{n}\right]}\tilde{\varepsilon}^i\nu^j L_{krs}\left[P_k^{i-r,j-rn-sn-k}(\lambda)\right] +$$
$$+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{j-n}\sum_{r=1}^{\min\left(i;\left[\frac{j-k}{n}\right]\right)}\tilde{\varepsilon}^i\nu^j L_{kr0}\left[P_k^{i-r,j-rn-k}(\lambda)\right] +$$
$$+\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{j-n}\sum_{s=1}^{\left[\frac{j-k}{n}\right]}\tilde{\varepsilon}^i\nu^j L_{k0s}\left[P_k^{i,j-sn-k}(\lambda)\right] +$$
$$+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=ni}^{\infty}\tilde{\varepsilon}^i\nu^j L_{0,i,\frac{j-ni}{n}} + \sum_{j=n}^{\infty}\nu^j L_{0,0,\frac{j}{n}} = 0, \tag{41}$$

де символом $P_k^{r,s}(\lambda)$ позначено суму всіх можливих добутків k множників вигляду $\lambda_{r_1s_1}, \lambda_{r_2s_2}, \ldots, \lambda_{r_ks_k}$, з цілими невід'ємними індексами, для яких $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = r$, $s_1 + s_2 + \ldots + s_k = s$. При цьому покладемо за означенням $P_0^{r,s}(\lambda) = 0$, якщо $r + s \geq 1$. Оператор L_{krs} діє на кожний доданок виразу $P_k^{r,s}(\lambda)$ за тим же правилом, що й на λ^k.

Прирівнявши в (41) коефіцієнти при однакових степенях $\tilde{\varepsilon}, \nu$, отримаємо

$$P_n^{i,j-n}(\lambda) + \sum_{k=1}^{j-2n}\sum_{r=1}^{\min\left(i;\left[\frac{j-n-k}{n}\right]\right)}\sum_{s=1}^{\left[\frac{j-rn-k}{n}\right]} L_{krs}\left[P_k^{i-r,j-rn-sn-k}(\lambda)\right] +$$
$$+\sum_{k=1}^{j-n}\sum_{r=1}^{\min\left(i;\left[\frac{j-k}{n}\right]\right)} L_{kr0}\left[P_k^{i-r,j-rn-k}(\lambda)\right] +$$
$$+\sum_{k=1}^{j-n}\sum_{s=1}^{\left[\frac{j-k}{n}\right]} L_{k0s}\left[P_k^{i,j-sn-k}(\lambda)\right] + L_{0,i,\frac{j-ni}{n}} + L_{0,0,\frac{j}{n}} = 0, \tag{42}$$
$$i = 0, 1, \ldots, \quad j = n, n+1, \ldots .$$

З цих рівнянь можна послідовно визначити будь-які коефіцієнти розвинення (38). Справді, при $i = 0$, $j = n$ рівняння (42) збігається з визначальним рівнянням (39) для знаходження коефіцієнта $\lambda_{00}(t)$.

Поклавши $i = 0$, $j = n + p$, одержимо

$$P_n^{0,p}(\lambda) + \sum_{k=1}^{p}\sum_{s=1}^{\left[\frac{n+p-k}{n}\right]} L_{k0s}\left[P_k^{0,n+p-sn-k}(\lambda)\right] + L_{0,0,\frac{n+p}{n}} = 0.$$

Оскільки $P_n^{0,p}(\lambda) = n\lambda_{00}^{n-1}\lambda_{0p} + \tilde{P}_n^{0,p}(\lambda)$, де $\tilde{P}_n^{0,p}(\lambda)$ — та частина виразу для $P_n^{0,p}(\lambda)$, яка не містить λ_{0p}, а формула для $P_k^{0,n+p-sn-k}(\lambda)$ при $s \geq 1$, $k \geq 1$ містить тільки ті множники λ_{0j}, для індексів яких $j < p$, звідси випливає таке рекурентне співвідношення для визначення $\lambda_{0p}(t)$:

$$\lambda_{0p}(t) = -\frac{g_{0p}(t)}{n\lambda_{00}^{n-1}(t)}, \quad p = 1, 2, \ldots,$$

де

$$g_{0p}(t) = \tilde{P}_n^{0,p}(\lambda) + \sum_{k=1}^{p} \sum_{s=1}^{\left[\frac{n+p-k}{n}\right]} L_{k0s}\left[P_k^{0,n+p-sn-k}(\lambda)\right] + L_{0,0,\frac{n+p}{n}}.$$

Покладаючи далі $i = 1$, $j = n$, $n+1, \ldots$; $i = 2$, $j = n$, $n+1, \ldots$, отримаємо аналогічні рекурентні формули для визначення λ_{1p}, $\lambda_{2p}, \ldots$, $p = 0, 1, \ldots$. Якщо всі $\lambda_{ij}(t)$ вже визначено при $i = \overline{0, q-1}$, $j = 0, 1, \ldots$, то, поклавши в (42) $i = q$, $j = n + p$, знайдемо

$$\lambda_{qp}(t) = -\frac{g_{qp}(t)}{n\lambda_{00}^{n-1}(t)}, \quad p = 0, 1, \ldots, \tag{43}$$

де

$$g_{qp}(t) = \tilde{P}_n^{q,p}(\lambda) + \sum_{k=1}^{p-n} \sum_{r=1}^{\min\left(q;\left[\frac{p-k}{n}\right]\right)} \sum_{s=1}^{\left[\frac{n+p-rn-k}{n}\right]} L_{krs}\left[P_k^{q-r,n+p-rn-sn-k}(\lambda)\right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} \sum_{r=1}^{\min\left(q;\left[\frac{n+p-k}{n}\right]\right)} L_{kr0}\left[P_k^{q-r,n+p-rn-k}(\lambda)\right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} \sum_{s=1}^{\left[\frac{n+p-k}{n}\right]} L_{k0s}\left[P_k^{q,n+p-ns-k}(\lambda)\right] + L_{0,q,\frac{n+p-nq}{n}} + L_{0,0,\frac{n+p}{n}}$$

— вже відомий вираз.

Для знаходження відповідного розвинення для вектора $u(t, \varepsilon, \mu)$ підставимо (38) у (28). Згрупувавши доданки з однаковими степенями величин $\tilde{\varepsilon}$, ν, одержимо

$$u(t, \varepsilon, \mu) = \varphi + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} u_{ij}(t)\tilde{\varepsilon}^i \nu^j, \tag{44}$$

де

$$u_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{j} \sum_{r=0}^{\min\left(i;\left[\frac{j-k}{n}\right]\right)} \sum_{s=0}^{\left[\frac{j-rn-k}{n}\right]} \tilde{L}_{krs}\left[P_k^{i-r,j-rn-sn-k}(\lambda)\right]\varphi + L_{0,i,\frac{j-ni}{n}}\varphi, \tag{45}$$

$$i = 0, 1, \ldots, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Існування похідних, які є в рекурентних формулах (43), (45), випливає з умови 2 та нескінченної диференційовності власного значення $\lambda_0(t)$, власних векторів $\varphi(t)$, $\psi(t)$ та матриці $H(t)$, що було обґрунтовано вище.

Отже, доведено таке твердження.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови* 1 – 3, $\frac{\varepsilon}{\mu} << 1$ *і*

$$(A_1\varphi, \psi) \neq 0 \quad \forall t \in [0; T], \tag{46}$$

то система рівнянь (1) *має на даному відрізку* $[0; T]$ n *лінійно незалежних формальних розв'язків вигляду* (9), *де функція* $\lambda(t, \varepsilon, \mu)$ *і вектор-функція* $u(t, \varepsilon, \mu)$ *мають зображення у вигляді подвійних формальних рядів* (38), (44) *за степенями параметрів* $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\mu}$, $\nu = \sqrt[n]{\mu}$, *коефіцієнти яких можна визначити за допомогою рекурентних формул* (40), (43) – (45).

Припустимо тепер, що $n > 2$ і умова (46) не виконується для всіх $t \in [0; T]$, тобто $L_{001} = -(A_1\varphi, \psi) \equiv 0$, але

$$L_{002} = -(A_2\varphi, \psi) + (A_1 H A_1 \varphi, \psi) \neq 0 \quad \forall t \in [0; T],$$
$$L_{101} = -((A_1 H + H A_1)\varphi, \psi) \neq 0 \quad \forall t \in [0; T]. \tag{47}$$

Тоді діаграма D_1 є відрізком осі Ok, що з'єднує початок координат з точкою $(n; 0; 0)$, а діаграма D_2 — ламаною з вершинами в точках $(0; 0; 2)$, $(1; 0; 1)$, $(n; 0; 0)$ (рис. 5). Неважко переконатися, що в даному випадку точки, які знаходяться нижче від діаграми D_2, будуть розташовані вище неї, якщо в рівнянні розгалуження (30) зробити заміну $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}\mu^2$ (при цьому сама діаграма D_2 не зміниться).

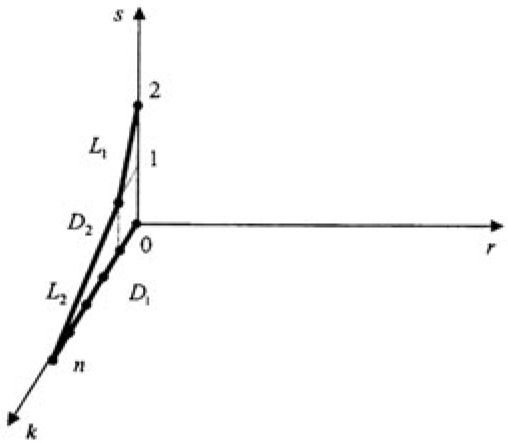

Рис. 5

Нахил діаграми D_1 дорівнює нулю, а діаграма D_2 складається з двох ланок L_1 і L_2, нахили яких дорівнюють 1 та $\frac{1}{n-1}$ відповідно. Тому в цьому випадку рівняння розгалуження має один розв'язок вигляду

$$\lambda_1(t, \varepsilon, \mu) = \mu \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{ij}^{(1)}(t) \tilde{\varepsilon}^i \mu^j \tag{48}$$

і $n - 1$ розв'язок вигляду

$$\lambda_m(t, \varepsilon, \mu) = \nu \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{ij}^{(m)}(t) \tilde{\varepsilon}^i \nu^j, \quad m = \overline{2, n}, \tag{49}$$

де $\tilde{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon}{\mu^2}$, $\nu = \sqrt[n-1]{\mu}$. Головні члени розвинень (48), (49) задовольняють рівняння

$$\lambda_{00}^{(1)} L_{101} + L_{002} = 0, \quad \left(\lambda_{00}^{(m)}\right)^{n-1} + L_{101} = 0, \tag{50}$$

звідки

$$\lambda_{00}^{(1)}(t) = -\frac{L_{002}}{L_{101}}, \tag{51}$$

$$\lambda_{00}^{(m)}(t) = \sqrt[n-1]{\left|L_{101}\right|} \exp\left\{i\,\frac{\arg\left(-L_{101}\right) + 2(m-2)\pi}{n-1}\right\}, \quad m = \overline{2, n}. \tag{52}$$

Підставивши (48), (49) у (30) і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях параметрів, отримаємо такі рекурентні формули для знаходження наступних коефіцієнтів цих розвинень:

$$\lambda_{ij}^{(1)} = -\frac{g_{ij}^{(1)}(t)}{L_{101}}, \quad i + j \geq 1, \tag{53}$$

де

$$g_{ij}^{(1)}(t) = P_n^{i, j+2-n}(\lambda_1) + $$
$$+ \sum_{k=1}^{j-1} \sum_{r=1}^{\min\left(i; \left[\frac{j+1-k}{2}\right]\right)} \sum_{s=1}^{j+2-2r-k} L_{krs}\left[P_k^{i-r, j+2-2r-s-k}(\lambda_1)\right] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{j} \sum_{r=1}^{\min\left(i; \left[\frac{j+2-k}{2}\right]\right)} L_{kr0}\left[P_k^{i-r, j+2-2r-k}(\lambda_1)\right] + \sum_{k=2}^{j+1} \sum_{s=1}^{j+2-k} L_{k0s}\left[P_k^{i, j+2-s-k}(\lambda_1)\right] +$$
$$+ \sum_{s=2}^{j+1} L_{10s}\left[P_1^{i, j+1-s}(\lambda_1)\right] + L_{0, i, j+2-2i}, \tag{54}$$

$$\lambda_{ij}^{(m)} = -\frac{g_{ij}^{(m)}(t)}{(n-1)\left(\lambda_{00}^{(m)}\right)^{n-1}}, \quad i + j \geq 1, \quad m = \overline{2, n}, \tag{55}$$

де

$$g_{ij}^{(m)}(t) = \tilde{P}_n^{i, j}(\lambda_m) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{j+3-2n} \sum_{r=1}^{\min\left(i; \left[\frac{j+1-k}{2(n-1)}\right]\right)} \sum_{s=1}^{\left[\frac{j+n-k-2r(n-1)}{n-1}\right]} L_{krs}\left[P_k^{i-r, j+n-(2r+s)(n-1)-k}(\lambda_m)\right] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{j+2-n} \sum_{r=1}^{\min\left(i; \left[\frac{j+n-k}{2(n-1)}\right]\right)} L_{kr0}\left[P_k^{i-r, j+n-2r(n-1)-k}(\lambda_m)\right] + L_{0, i, \frac{n+j}{n-1} - 2i}, \quad m = \overline{2, n}. \tag{56}$$

Підставивши (48), (49) у (28) і згрупувавши доданки з однаковими степенями параметрів, знайдемо відповідні розвинення для вектор-функцій $u_i(t, \varepsilon, \mu)$, $i = \overline{1, n}$:

$$u_1(t, \varepsilon, \mu) = \varphi + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} u_{ij}^{(1)}(t) \tilde{\varepsilon}^i \mu^j, \tag{57}$$

$$u_m(t, \varepsilon, \mu) = \varphi + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} u_{ij}^{(m)}(t) \tilde{\varepsilon}^i \nu^j, \quad m = \overline{2, n}, \tag{58}$$

коефіцієнти яких визначаються за формулами

$$u_{ij}^{(1)}(t) = \sum_{k=1}^{j} \sum_{r=0}^{\min\left(i; \left[\frac{j-k}{2}\right]\right)} \sum_{s=0}^{j-2r-k} \tilde{L}_{krs}\left[P_k^{i-r, j-2r-s-k}(\lambda_1)\right]\varphi + \tilde{L}_{0, i, j-2i}\varphi, \tag{59}$$

$$i = 0, 1, \ldots, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

$$u_{ij}^{(m)}(t) = \sum_{k=1}^{j} \sum_{r=0}^{\min\left(i; \left[\frac{j-k}{2(n-1)}\right]\right)} \sum_{s=0}^{\left[\frac{j-k}{n-1}\right]-2r} \tilde{L}_{krs}\left[P_k^{i-r, j-(2r+s)(n-1)-k}(\lambda_m)\right]\varphi +$$

$$+ \tilde{L}_{0, i, \frac{j}{n-1}-2i}\varphi, \quad i = 0, 1, \ldots, \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{60}$$

Отже, справджується така теорема.

Теорема 3. *Якщо* $n > 2$, *виконуються умови* 1 – 3, $\dfrac{\varepsilon}{\mu^2} << 1$ *і*

$$(A_1\varphi, \psi) \equiv 0,$$

$$(A_2\varphi, \psi) - (A_1 H A_1 \varphi, \psi) \neq 0,$$

$$((A_1 H + H A_1)\varphi, \psi) \neq 0 \quad \forall t \in [0; T],$$

то система рівнянь (1) *має на відрізку* $[0; T]$ n *лінійно незалежних формальних розв'язків вигляду* (9), *причому відповідні функції* $\lambda(t, \varepsilon, \mu)$ *та вектор-функції* $u(t, \varepsilon, \mu)$ *мають зображення у вигляді подвійних формальних рядів* (48), (49), (57), (58), *де* $\tilde{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon}{\mu^2}$, $\nu = \sqrt[n-1]{\mu}$. *Коефіцієнти цих розвинень визначаються за допомогою рекурентних формул* (51), (52) – (56), (59), (60).

Зазначимо, що при $n = 2$ діаграма D_2 складається не з двох ланок, а з однієї, нахил якої дорівнює $\dfrac{2}{n}$. У цьому випадку всі n розвинень функції $\lambda(t, \varepsilon, \mu)$ і вектор-функції $u(t, \varepsilon, \mu)$ буде побудовано за степенями параметрів $\tilde{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon}{\mu^2}$ та $\nu = \sqrt[n]{\varepsilon}$, а головні члени $\lambda_{00}(t)$ буде знайдено з рівняння

$$\lambda_{00}^2 + \lambda_{00} L_{101} + L_{002} = 0.$$

Користуючись описаним методом діаграм, можна досліджувати різні випадки, обумовлені поведінкою коефіцієнтів рівняння розгалуження (30). З цієї точки зору формули (21) – (27) для визначення таких коефіцієнтів містять повну інформацію про структуру формальних лінійно незалежних розв'язків системи (1) за умови стабільної поведінки відповідних діаграм на даному відрізку $[0; T]$.

Якщо $\dfrac{\mu}{\varepsilon} << 1$, то задача розглядається аналогічно шляхом відповідної перестановки координатних осей у системі координат $Okrs$ [10].

Можна показати [4, 9], що формальні розв'язки, які побудовано в такий спосіб, є асимптотичними розвиненнями відповідних точних розв'язків системи (1).

1. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1968. – 464 с.
2. *Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1966. – 252 с.
3. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. – М.: Наука, 1981. – 398 с.
4. Шкиль *М. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Выща шк., 1989 – 287 с.
5. *Жукова Г. С.* Методы возмущений в задаче асимптотического интегрирования сингулярно возмущенных линейных систем. – Киев, 1983. – 40 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 83.38).
6. *Сотниченко Н. А.* К вопросу расщепления систем дифференциальных уравнений, зависящих от двух параметров // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 9. – С. 1640 – 1642.
7. *Яковец В. П.* Асимптотика общего решения линейной сингулярно возмущенной системы с двумя малыми параметрами // Там же. – 1993. – **29**, № 2. – С. 256 – 266.
8. *Яковец В. П.* Методы возмущений в задаче асимптотического интегрирования вырождающихся сингулярно возмущенных линейных систем с двумя малыми параметрами. – Киев, 1992. – 52 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 92.34).
9. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – Київ: Вища шк., 2000. – 294 с.
10. *Айзенгендлер П. Г.* Метод диаграмм Ньютона для уравнений с несколькими малыми параметрами и его приложения. – Псков, 1989. – 56 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 6852–89.

Одержано 23.04.2002