УДК 517.5

В. И. Рукасов (Славян. пед. ун-т)

ПРИБЛИЖЕНИЕ СУММАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

For upper bounds of deviations of the Vallée Poussin sums taken over classes of functions that are analytically extendable to a fixed strip of the complex plane, we establish asymptotic equalities. In some cases, these equalities provide the solution of the corresponding Kolmogorov – Nikol'skii problem.

Для верхніх меж відхилень сум Валле Пуссена, взятих по класах функцій, що допускають аналітичні продовження у фіксовану смугу комплексної площини, знайдено асимптотичні рівності, які в деяких випадках забезпечують розв'язок відповідної задачі Колмогорова – Нікольського.

В настоящей работе рассматриваются приближения классов $C^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ [1], элементами которых являются непрерывные 2π-периодические функции $f(\cdot)$, которые задаются свертками

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t)\Psi(t)\,dt \tag{1}$$

функций $\varphi \in \mathfrak{N}$ с ядрами

$$\Psi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\psi_1(k)\cos kt + \psi_2(k)\sin kt\right),$$

при условии, что параметры $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k)$, определяющие приближаемый класс, таковы, что последовательности $\overline{\psi}(k) = \left(\psi_1^2(k)+\psi_2^2(k)\right)^{1/2}$ удовлетворяют условию

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\overline{\psi}(k+1)}{\overline{\psi}(k)} = q, \qquad q \in [0;1]. \tag{2}$$

Функцию $\varphi(\cdot)$ из соотношения (1) называют $\overline{\psi}$-производной функции $f(\cdot)$ и обозначают $f^{\overline{\psi}}(\cdot)$. В то же время функцию $f(\cdot)$, представимую в виде (1), называют $\overline{\psi}$-интегралом функции $\varphi(\cdot)$ и обозначают $\mathcal{J}^{\overline{\psi}}(\varphi;\cdot)$. В этом случае множества $C^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ состоят из 2π-периодических функций $f(\cdot)$, допускающих регулярное продолжение в полосу $|\operatorname{Im} Z| \le \ln(1/q)$ (см., например, [2, с. 35]).

Обозначим через $C^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N}$ [2] классы сверток функций $\varphi \in \mathfrak{N}$ с интегрируемыми ядрами

$$\Psi_{\overline{\beta}}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta_k\pi}{2}\right),$$

где β_k — произвольная последовательность действительных чисел. При этом функцию $\varphi(\cdot)$ называют $(\psi;\overline{\beta})$-производной функции $f(\cdot)$ и используют обозначение $f^{\psi}_{\overline{\beta}}(\cdot)$, а элементы множеств $C^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N}$ — $(\psi;\overline{\beta})$-интегралами функций $\varphi \in \mathfrak{N}$ и обозначают $\mathcal{J}^{\psi}_{\overline{\beta}}(\varphi;\cdot)$.

В работе [1] показано, что определения классов $C^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ и $C^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N}$ эквивалентны в том смысле, что из существования у функции $\overline{\psi}$-производной следует существование у нее и $(\psi;\overline{\beta})$-производной с соответствующими значениями определяющих их параметров и наоборот.

Множество последовательностей $\psi(k)$, $k \in N$, для которых выполняется условие (2), будем обозначать через D_q [3].

Примерами ядер, коэффициенты которых удовлетворяют условию (2), являются ядра

$$P_{\bar{\beta}}^{q}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta_k \pi}{2}\right), \quad q \in (0; 1), \quad \beta_k \in R^1. \tag{3}$$

В этом случае для $\overline{\psi}$-производной и $\overline{\psi}$-интеграла используют обозначения $f_{\bar{\beta}}^{q}$ и $\mathcal{J}_{\bar{\beta}}^{q}$ соответственно.

Если

$$S_M = \{\varphi : \|\varphi\|_\infty \le 1\}, \quad H_\omega = \{\varphi \in C : \omega(\varphi; t) \le \omega(t)\},$$

где $\|\varphi\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}|\varphi|$, C — множество непрерывных 2π-периодических функций, $\omega(\varphi; t)$ — модуль непрерывности функции $\varphi \in C$, $\omega(t)$ — произвольный фиксированный модуль непрерывности, то рассматривают классы $C^{\overline{\psi}} S_M = C_\infty^{\overline{\psi}}$, $C_{\bar{\beta}}^{\psi} S_M = C_{\bar{\beta},\infty}^{\psi}$, $C^{\overline{\psi}} H_\omega$ и $C_{\bar{\beta}}^{\psi} H_\omega$. Если при этом $\psi(k) = q^k$ $\forall k \in N$, $q \in (0; 1)$, то полагают $C_{\bar{\beta},\infty}^{\psi} = C_{\bar{\beta},\infty}^{q}$ и $C_{\bar{\beta}}^{\psi} H_\omega = C_{\bar{\beta}}^{q} H_\omega$. Если еще $\beta_k = \beta = \text{const}$ $\forall k \in \in N$, то $C_{\bar{\beta},\infty}^{q} = C_{\beta,\infty}^{q}$ и $C_{\bar{\beta}}^{q} H_\omega = C_{\beta}^{q} H_\omega$.

Пусть теперь $f \in C$, $S_k(f; x)$ — частная сумма Фурье функции f порядка k,

$$V_{n,p}(f; x) = \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f; x)$$

— суммы Валле Пуссена функции f и, как обычно,

$$\rho_{n,p}(f; x) = f(x) - V_{n,p}(f; x).$$

Здесь исследуется асимптотическое поведение при $n \to \infty$ величины

$$\mathcal{E}(C^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}; V_{n,p}) = \sup_{f \in C^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}} \left\| f(\cdot) - V_{n,p}(f; \cdot) \right\|_C$$

при условии, что $\overline{\psi}_i \in D_{q_i}$, $i = 1, 2$, а в качестве $\mathfrak{N}$ используется одно из множеств S_M или H_ω.

Доказательство основных утверждений настоящей работы проводится по схеме, предложенной А. И. Степанцом и А. С. Сердюком в работе [3].

Докажем вначале утверждение, которое имеет вспомогательный характер и устанавливает связь между ядрами $\Psi_{\bar{\beta}}(t)$, порождающими классы $C_{\bar{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N}$ при $\psi \in D_q$, $0 < q < 1$, и ядрами $P_{\bar{\beta}}^{q}(t)$.

Лемма 1. *Пусть* $\psi \in D_q$, $0 < q < 1$, *и*

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & 1 \le k \le m; \\ \dfrac{n-k}{n-m}, & m+1 \le k \le n-1; \\ 0, & n \le k, \quad k \in N. \end{cases} \tag{4}$$

Тогда для любой последовательности чисел γ_k, $k = 1, 2, \ldots$, *при любых натуральных* n, $m < n$ *справедливо равенство*

$$\sum_{k=m+1}^{\infty}(1-\lambda_k^{(n)})\dot{\psi}(k)\cos(kt-\gamma_k) =$$

$$= \psi(m+1)\left[q^{-(m+1)}\sum_{k=m+1}^{\infty}(1-\lambda_k^{(n)})q^k\cos(kt-\gamma_k) + r_m(t)\right], \tag{5}$$

причем начиная с некоторого m_0

$$\left|r_m(t)\right| \le \frac{3\varepsilon_m}{(1-q-\varepsilon_m)^2(1-q)^2}, \tag{6}$$

где

$$\varepsilon_m = \sup_{k\ge m}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|.$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{k=m+1}^{\infty}(1-\lambda_k^{(n)})\psi(k)\cos(kt-\gamma_k) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}(1-\lambda_{m+i}^{(n)})\psi(m+i)\cos((m+i)t-\gamma_{m+i}) =$$

$$= (1-\lambda_{m+1}^{(n)})\psi(m+1)\Bigg(\cos((m+1)t-\gamma_{m+1}) +$$

$$+ \sum_{i=2}^{\infty}\prod_{l=1}^{i-1}\frac{(1-\lambda_{m+l+1}^{(n)})\psi(m+l+1)}{(1-\lambda_{m+l}^{(n)})\psi(m+l)}\cos((m+i)t-\gamma_{m+i})\Bigg) =$$

$$= \psi(m+1)\left[q^{-(m+1)}\sum_{k=m+1}^{\infty}(1-\lambda_k^{(n)})q^k\cos(kt-\gamma_k) + r_m(t)\right], \tag{7}$$

$$\frac{r_m(t)}{1-\lambda_{m+1}^{(n)}} = \sum_{i=2}^{\infty}\left(\prod_{l=1}^{i-1}\frac{(1-\lambda_{m+l+1}^{(n)})\psi(m+l+1)}{(1-\lambda_{m+l}^{(n)})\psi(m+l)} -\right.$$

$$\left. - \frac{1-\lambda_{m+i}^{(n)}}{1-\lambda_{m+1}^{(n)}}q^{i-1}\right)\cos((m+i)t-\gamma_{m+i}). \tag{8}$$

Докажем неравенство (6). Принимая во внимание соотношения (4) и (7), получаем

$$\frac{r_m(t)}{1-\lambda_{m+1}^{(n)}} = \sum_{i=2}^{n-m}\left(\prod_{l=1}^{i-1}\frac{(1-\lambda_{m+l+1}^{(n)})\psi(m+l+1)}{(1-\lambda_{m+l}^{(n)})\psi(m+l)} -\right.$$

$$\left. - \frac{1-\lambda_{m+i}^{(n)}}{1-\lambda_{m+1}^{(n)}}q^{i-1}\right)\cos((m+i)t-\gamma_{m+i}) +$$

$$+ \sum_{i=n-m+1}^{\infty}\left(\prod_{l=1}^{i-1}\frac{(1-\lambda_{m+l+1}^{(n)})\psi(m+l+1)}{(1-\lambda_{m+l}^{(n)})\psi(m+l)} - \frac{1}{1-\lambda_{m+1}^{(n)}}q^{i-1}\right)\times$$

$$\times\ \cos((m+i)t-\gamma_{m+i}) = \sum_{i=2}^{n-m}\left(\prod_{l=1}^{i-1}\frac{(l+1)\psi(m+l+1)}{l\psi(m+l)} - iq^{i-1}\right)\times$$

$$\times\ \cos((m+i)t-\gamma_{m+i}) + (n-m)\ \times$$

$$\times \sum_{i=n-m+1}^{\infty}\left(\prod_{l=1}^{i-1}\frac{\psi(m+l+1)}{\psi(m+l)} - q^{i-1}\right)\cos((m+i)t-\gamma_{m+i}) = \Sigma_1 + \Sigma_2. \qquad (9)$$

Оценим слагаемые из правой части равенства (9). Поскольку всегда [3]

$$\left|\prod_{l=1}^{i-1}\frac{\psi(m+l+1)}{\psi(m+l)} - q^{i-1}\right| \le (q+\varepsilon_m)^{i-1} - q^{i-1},$$

$$\varepsilon_m = \sup_{k\ge m}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|,$$

то

$$\Sigma_1 \le \sum_{i=2}^{n-m} i\left(\prod_{l=1}^{i-1}\frac{\psi(m+l+1)}{\psi(m+l)} - q^{i-1}\right) \le$$

$$\le \sum_{i=2}^{n-m} i\left[(q+\varepsilon_m)^{i-1} - q^{i-1}\right] \le \sum_{i=2}^{\infty} i\left[(q+\varepsilon_m)^{i-1} - q^{i-1}\right].$$

Последовательность ε_m при $m\to\infty$ монотонно убывает к нулю, поэтому начиная с некоторого m_0 будет $q+\varepsilon_m < 1$. Отсюда, принимая во внимание равенство

$$\sum_{k=2}^{\infty} kx^{k-1} = \left(\sum_{k=2}^{\infty} x^k\right)' = x\frac{2-x}{(1-x)^2}, \qquad 0\le x<1,$$

для всех $m > m_0$ получаем

$$\Sigma_1 \le (q+\varepsilon_m)\frac{2-q-\varepsilon_m}{(1-q-\varepsilon_m)^2} - q\frac{2-q}{(1-q)^2} =$$

$$= \varepsilon_m\frac{2-2q-\varepsilon_m}{(1-q-\varepsilon_m)^2(1-q)^2} \le \frac{2\varepsilon_m}{(1-q-\varepsilon_m)^2(1-q)^2}. \qquad (10)$$

Далее имеем

$$\Sigma_2 \le (n-m)\sum_{i=n-m+1}^{\infty}\left(\prod_{l=1}^{i-1}\frac{\psi(m+l+1)}{\psi(m+l)} - q^{i-1}\right) \le$$

$$\le (n-m)\sum_{i=1}^{\infty}(q+\varepsilon_m)^{i-1} - q^{i-1} =$$

$$= (n-m)\left(\frac{1}{1-q-\varepsilon_m} - \frac{1}{1-q}\right) = \frac{(n-m)\varepsilon_m}{(1-q-\varepsilon_m)(1-q)}. \qquad (11)$$

Из соотношений (9) – (11) следует справедливость оценки (6). Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть* $\psi\in D_q$, $0<q<1$, $\psi(k)>0$, n *и* p, $p<n$, — *произ-*

вольные натуральные числа. Тогда при $n \to \infty$ для любой функции $f \in C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}$ имеет место асимптотическая формула

$$\left\|\rho_{n,p}(f;x)\right\|_C = \psi(n-p+1) \times$$

$$\times \left[q^{-(n-p+1)}\left\|\rho_{n,p}(\mathcal{J}^q_{\bar\beta}(f^{\psi}_{\bar\beta}))\right\|_C + O(1)\frac{\varepsilon_{n-p}}{(1-q)^4}\right], \tag{12}$$

а для $f \in C^{\psi}_{\bar\beta}H_{\omega}$ выполняется асимптотическое равенство

$$\left\|\rho_{n,p}(f;x)\right\|_C = \psi(n-p+1) \times$$

$$\times \left[q^{-(n-p+1)}\left\|\rho_{n,p}(\mathcal{J}^q_{\bar\beta}(f^{\psi}_{\bar\beta}))\right\|_C + O(1)\frac{\omega(1/(n-p))\varepsilon_{n-p}}{(1-q)^4}\right], \tag{13}$$

где

$$\varepsilon_{n-p} = \sup_{k \ge n-p}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|.$$

Доказательство. Пусть $f \in C^{\psi}_{\bar\beta}\mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N} = S_M$ или $\mathfrak{N} = H_{\omega}$. Тогда в каждой точке $x \in R^1$

$$\rho_{n,p}(f;x) = f(x) - V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\bar\beta}(x-t)\Psi^{\bar\beta}_{n,p}(t)\,dt, \tag{14}$$

где

$$\Psi^{\bar\beta}_{n,p}(t) = \sum_{k=n-p+1}^{\infty}(1-\lambda^{(n)}_k)\psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta_k\pi}{2}\right),$$

а коэффициенты $\lambda^{(n)}_k$ определяются соотношением (4) при $m = n-p$.

Полагая

$$P^{\bar\beta,q}_{n,p}(t) = \sum_{k=n-p+1}^{\infty}(1-\lambda^{(n)}_k)q^k\cos\left(kt - \frac{\beta_k\pi}{2}\right), \quad 0 < q < 1, \quad \beta_k \in R^1,$$

на основании соотношений (14) и (5) заключаем, что

$$\rho_{n,p}(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(n-p+1) \times$$

$$\times f^{\psi}_{\bar\beta}(x-t)\left[q^{-(n-p+1)}P^{\bar\beta,q}_{n,p}(t) + r_{n-p}(t)\right]dt =$$

$$= \psi(n-p+1)\left[\frac{q^{-(n-p+1)}}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\bar\beta}(x-t)P^{\bar\beta,q}_{n,p}(t)\,dt + R_{n,p}(f;x)\right], \tag{15}$$

где

$$R_{n,p}(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\bar\beta}(x-t)r_{n-p}(t)\,dt,$$

а функция $r_{n-p}(t)$ определена равенством (8) при $\gamma_k = \beta_k$.

Найдем оценку величины $R_{n,p}(f;x)$. Принимая во внимание неравенство (6), для любой функции $f_{\bar\beta}^{\psi} \in S_M$ получаем

$$\left\| R_{n,p}(f;x) \right\|_C \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| r_{n-p}(t) \right| dt \leq \frac{6\varepsilon_{n-p}}{(1-q-\varepsilon_{n-p})^2 (1-q)^2}. \tag{16}$$

Для любой функции $f_{\bar\beta}^{\psi} \in H_\omega$

$$\left\| R_{n,p}(f;x) \right\|_C \leq \left\| (f_{\bar\beta}^{\psi} - t_{n-p}) * r_{n-p} \right\|_C \leq \left\| f_{\bar\beta}^{\psi} - t_{n-p} \right\|_C \left\| r_{n-p} \right\|_1,$$

где $t_{n-p}(\cdot)$ — тригонометрический полином порядка не выше $n-p$.

Выбирая в качестве $t_{n-p}(\cdot)$ полином наилучшего приближения в пространстве C функции $f_{\bar\beta}^{\psi}$, с учетом теоремы Джексона и неравенства (6) для любой функции $f_{\bar\beta}^{\psi} \in H_\omega$ находим

$$\left\| R_{n,p}(f;x) \right\|_C \leq K\omega\left(\frac{1}{n-p}\right) \frac{\varepsilon_{n-p}}{(1-q-\varepsilon_{n-p})^2 (1-q)^2}. \tag{17}$$

Объединяя соотношения (15) – (17), получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

Рассматривая верхние грани обеих частей соотношения (12) по классам $C_{\bar\beta,\infty}^{\psi}$, а соотношения (13) — по классам $C_{\bar\beta}^{\psi} H_\omega$ и учитывая, что

$$\sup_{f \in C_{\bar\beta}^{\psi}\mathfrak{N}} \left\| \rho_{n,p}(f;\cdot) \right\|_C = \sup \left\{ \left\| \rho_{n,p}(\mathcal{J}_{\bar\beta}^{\psi}(\varphi);\cdot) \right\|_C : \varphi \in \mathfrak{N} \right\},$$

где $\mathfrak{N} = S_M$ или $\mathfrak{N} = H_\omega$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Пусть $\psi \in D_q$, $0 < q < 1$, $\psi(k) > 0$, n и p, $p < n$, — произвольные натуральные числа. Тогда при $n \to \infty$*

$$\mathcal{E}(C_{\bar\beta,\infty}^{\psi}; V_{n,p}) = \psi(n-p+1) \times$$

$$\times \left[q^{-(n-p+1)} \mathcal{E}(C_{\bar\beta,\infty}^{q}; V_{n,p}) + O(1) \frac{\varepsilon_{n-p}}{(1-q)^4} \right], \tag{18}$$

$$\mathcal{E}(C_{\bar\beta}^{\psi} H_\omega; V_{n,p}) = \psi(n-p+1) \times$$

$$\times \left[q^{-(n-p+1)} \mathcal{E}(C_{\bar\beta}^{q} H_\omega; V_{n,p}) + O(1)\omega\left(\frac{1}{n-p}\right) \frac{\varepsilon_{n-p}}{(1-q)^4} \right], \tag{19}$$

где

$$\varepsilon_{n-p} = \sup_{k \geq n-p} \left| \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q \right|,$$

а $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по n, p, q, $\psi(k)$ и β_k.

Для получения асимптотических равенств нам понадобятся следующие утверждения.

Теорема А. *Пусть $q \in (0;1)$, n и p, $p < n$, — произвольные натуральные числа, $\beta \in R^1$ и $\omega(t)$ — произвольный модуль непрерывности. Тогда при $n \to \infty$ имеет место равенство*

$$\mathcal{E}(C^q_\beta H_\omega; V_{n,p}) = \frac{2\theta_\omega}{\pi}\frac{q^{n-p+1}}{(1-q^2)p}\int\limits_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n-p}\right)\sin t\,dt +$$

$$+ O(1)\,\omega\left(\frac{1}{n-p}\right)\left[\frac{q^n}{(1-q^2)p} + \frac{q^{n-p+1}}{(1-q)^3(n-p)p}\right], \tag{20}$$

где $\theta_\omega \in [1/2; 1]$, *причем* $\theta_\omega = 1$, *если* $\omega(t)$ *— выпуклый модуль непрерывности, а* $O(1)$ *— величина, равномерно ограниченная по* n, p, q *и* β.

Доказательство теоремы А приведено в работе [4] и фактически содержит в себе доказательство следующего утверждения, которое является уточнением результата работы [5].

Теорема В. *Пусть* $q \in (0; 1)$, n *и* p, $p < n$, *— произвольные натуральные числа,* $\beta \in R^1$. *Тогда при* $n \to \infty$ *имеет место равенство*

$$\mathcal{E}(C^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}) = \frac{4}{\pi}\frac{q^{n-p+1}}{(1-q^2)p} + O(1)\left[\frac{q^n}{(1-q^2)p} + \frac{q^{n-p+1}}{(1-q)^3(n-p)p}\right], \tag{21}$$

в котором $O(1)$ *— величина, равномерно ограниченная по* n, p, q *и* β.

Теорема В здесь формулируется впервые.

Величины $q^{-(n-p+1)}\mathcal{E}(C^q_{\beta,\infty}; V_{n,p})$ и $q^{-(n-p+1)}\mathcal{E}(C^q_\beta H_\omega; V_{n,p})$ при $n \to \infty$ являются ограниченными сверху и снизу некоторыми положительными числами, зависящими, быть может, только от q. Поскольку последовательность ε_{n-p} стремится к нулю при $n-p \to \infty$, то в случаях, когда известны асимптотические равенства для величин $\mathcal{E}(C^q_{\beta,\infty}; V_{n,p})$ и $\mathcal{E}(C^q_\beta H_\omega; V_{n,p})$, соотношения (18) и (19) позволяют записать аналогичные равенства для величин $\mathcal{E}(C^\psi_{\beta,\infty}; V_{n,p})$ и $\mathcal{E}(C^\psi_\beta H_\omega; V_{n,p})$ соответственно.

Объединяя теорему 2 и теоремы А и В, получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть классы* $C^\psi_{\beta,\infty}$ *и* $C^\psi_\beta H_\omega$ *порождены ядром*

$$\Psi_\beta = \sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad \psi > 0, \quad \psi \in D_q, \quad 0 < q < 1.$$

Тогда если n *и* p, $p < n$, *— произвольные натуральные числа, то при* $n \to \infty$ *имеют место равенства*

$$\mathcal{E}(C^\psi_{\beta,\infty}; V_{n,p}) = \psi(n-p+1)\left[\frac{4}{\pi}\frac{1}{(1-q^2)p} +\right.$$

$$\left.+ O(1)\left(\frac{q^{p-1}}{(1-q^2)p} + \frac{1}{(1-q)^3 p(n-p)} + \frac{\varepsilon_{n-p}}{(1-q)^4}\right)\right], \tag{22}$$

$$\mathcal{E}(C^\psi_\beta H_\omega; V_{n,p}) = \psi(n-p+1)\left[\frac{2\theta_\omega}{\pi}\frac{1}{(1-q^2)p}\int\limits_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n-p}\right)\sin t\,dt +\right.$$

$$\left.+ O(1)\omega\left(\frac{1}{n-p}\right)\left(\frac{q^{p-1}}{(1-q^2)p} + \frac{1}{(1-q)^3 p(n-p)} + \frac{\varepsilon_{n-p}}{(1-q)^4}\right)\right], \tag{23}$$

где

$$\varepsilon_{n-p} = \sup_{k \geq n-p} \left| \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q \right|,$$

а $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная по* $n, p, q, \psi(k)$ *и* β.

Теорема 3 допускает следующее обобщение на классы $C_{\infty}^{\overline{\Psi}}$ и $C^{\overline{\Psi}} H_{\omega}$.

Теорема 4. *Пусть классы* $C_{\infty}^{\overline{\Psi}}$ *и* $C^{\overline{\Psi}} H_{\omega}$ *порождены ядром*

$$\Psi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\psi_1(k)\cos kt + \psi_2(k)\sin kt\right), \qquad \psi_i \in D_{q_i}, \qquad 0 < q_i < 1, \qquad i = 1, 2.$$

Тогда если n *и* p, $p < n$, — *произвольные натуральные числа, то при* $n \to \infty$ *имеют место асимптотические равенства*

$$\mathcal{E}\left(C_{\infty}^{\overline{\Psi}}; V_{n,p}\right) = \sqrt{\psi_1^2(n-p+1) + \psi_2^2(n-p+1)} \left[\frac{4}{\pi} \frac{1}{(1-q^2)p} + \right.$$

$$\left. + O(1)\left(\frac{q^{p-1}}{(1-q^2)p} + \frac{1}{(1-q)^3 p(n-p)} + \frac{\varepsilon_{n-p}}{(1-q)^4}\right)\right], \tag{24}$$

$$\mathcal{E}\left(C^{\overline{\Psi}} H_{\omega}; V_{n,p}\right) = \sqrt{\psi_1^2(n-p+1) + \psi_2^2(n-p+1)} \times$$

$$\times \left[\frac{2\theta_{\omega}}{\pi} \frac{1}{(1-q^2)p} \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n-p}\right) \sin t \, dt + O(1)\omega\left(\frac{1}{n-p}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{q^{p-1}}{(1-q^2)p} + \frac{1}{(1-q)^3 p(n-p)} + \frac{\varepsilon_{n-p}}{(1-q)^4}\right)\right], \tag{25}$$

в которых $q = \max\{q_1; q_2\}$,

$$\varepsilon_k = \begin{cases} \max\{\varepsilon_k^{(1)}; \varepsilon_k^{(2)}\}, & q_1 = q_2; \\ \varepsilon_k^{(1)}, & q_1 > q_2; \\ \varepsilon_k^{(2)}, & q_1 < q_2, \qquad k = n-p+1, n-p+2, \ldots, \end{cases}$$

$$\varepsilon_{n-p}^{(i)} = \sup_{k \geq n-p} \left| \frac{\psi_i(k+1)}{\psi_i(k)} - q_i \right|, \qquad i = 1, 2,$$

а $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная по* $n, p, q_i, \psi_i(k)$, $i = 1, 2$.

Доказательство. Пусть $f \in C_{\infty}^{\overline{\Psi}}$. Тогда

$$\rho_{n,p}(f; x) = f(x) - V_{n,p}(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\Psi}}(x-t) \Psi_{n,p}(t) \, dt, \tag{26}$$

где

$$\Psi_{n,p}(t) = \sum_{k=n-p+1}^{\infty} \left(1 - \lambda_k^{(n)}\right)\left(\psi_1(k)\cos kt + \psi_2(k)\sin kt\right) = G_{n,p}(t) + H_{n,p}(t),$$

$$G_{n,p}(t) = \sum_{k=n-p+1}^{\infty} \left(1 - \lambda_k^{(n)}\right)\psi_1(k)\cos kt,$$

$$H_{n,p}(t) = \sum_{k=n-p+1}^{\infty} \left(1-\lambda_k^{(n)}\right)\psi_2(k)\sin kt,$$

а числа $\lambda_k^{(n)}$ определяются равенствами (4), в которых $m = n-p$.

Применяя лемму 1 к каждой из функций $G_{n,p}(t)$ и $H_{n,p}(t)$, получаем

$$\Psi_{n,p}(t) = \psi_1(n-p+1)\left(q_1^{-(n-p+1)}P_{n,p}^{0,q_1}(t) + R_{n,p}(\psi_1;t)\right) +$$

$$+ \psi_2(n-p+1)\left(q_2^{-(n-p+1)}P_{n,p}^{1,q_2}(t) + R_{n,p}(\psi_2;t)\right) =$$

$$= \psi_1(n-p+1)q_1^{-(n-p+1)} \sum_{k=n-p+1}^{\infty} q_1^k\left(1-\lambda_k^{(n)}\right)\psi_1(k)\cos kt +$$

$$+ \psi_2(n-p+1)q_2^{-(n-p+1)} \sum_{k=n-p+1}^{\infty} q_2^k\left(1-\lambda_k^{(n)}\right)\psi_2(k)\sin kt +$$

$$+ O(1)\left(\frac{\varepsilon_{n-p}^{(1)}\psi_1(n-p+1)}{(1-q_1)^4} + \frac{\varepsilon_{n-p}^{(2)}\psi_2(n-p+1)}{(1-q_2)^4}\right), \tag{27}$$

где

$$P_{n,p}^{0,q_1}(t) = \sum_{k=n-p+1}^{\infty} q_1^k\left(1-\lambda_k^{(n)}\right)\psi_1(k)\cos kt,$$

$$P_{n,p}^{1,q_2}(t) = \sum_{k=n-p+1}^{\infty} q_2^k\left(1-\lambda_k^{(n)}\right)\psi_2(k)\sin kt,$$

$$\varepsilon_{n-p}^{(i)} = \sup_{k\geq n-p}\left|\frac{\psi_i(k+1)}{\psi_i(k)} - q_i\right|, \quad i = 1, 2.$$

Пусть сначала $q_1 = q_2 = q$. Тогда из равенства (27) следует

$$\Psi_{n,p}(t) = \overline{\psi}(n-p+1)\left[q^{-(n-p+1)} \sum_{k=n-p+1}^{\infty} q^k\left(1-\lambda_k^{(n)}\right) \times\right.$$

$$\times \left(\frac{\psi_1(n-p+1)}{\overline{\psi}(n-p+1)}\cos kt + \frac{\psi_2(n-p+1)}{\overline{\psi}(n-p+1)}\sin kt\right) +$$

$$\left. + O(1)\frac{\varepsilon_{n-p}}{(1-q)^4}\right] = \overline{\psi}(n-p+1) \times$$

$$\times \left[q^{-(n-p+1)} \sum_{k=n-p+1}^{\infty} q^k\left(1-\lambda_k^{(n)}\right)\cos\left(kt - \frac{\beta_{n,p}\pi}{2}\right) + O(1)\frac{\varepsilon_{n-p}}{(1-q)^4}\right], \tag{28}$$

где

$$\varepsilon_{n-p} = \max\left\{\varepsilon_{n-p}^{(1)}; \varepsilon_{n-p}^{(2)}\right\}, \quad \overline{\psi}(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}, \quad \beta_{n,p} \in [0; 4],$$

$$\cos\frac{\beta_{n,p}\pi}{2} = \frac{\psi_1(n-p+1)}{\overline{\psi}(n-p+1)}, \quad \sin\frac{\beta_{n,p}\pi}{2} = \frac{\psi_2(n-p+1)}{\overline{\psi}(n-p+1)}.$$

На основании (26) и (28) заключаем, что

$$\mathscr{E}\left(C_\infty^{\overline{\psi}}; V_{n,p}\right) = \sup_{\substack{\varphi\in S_M \\ \varphi\perp 1}} \left\| \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi(n-p+1) \times \right.$$

$$\times \left[q^{-(n-p+1)} \sum_{k=n-p+1}^{\infty} q^k \left(1-\lambda_k^{(n)}\right) \cos\left(kt - \frac{\beta_{n,p}\pi}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \; O(1)\frac{\varepsilon_{n-p}}{(1-q)^4}\right] \varphi(x-t)\,dt \Bigg\|_C = \overline{\psi}(n-p+1) \times$$

$$\times \sup_{\substack{\varphi\in S_M \\ \varphi\perp 1}} q^{-(n-p+1)} \left\| \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_{n,p}^{\beta_{n,p} q}(t)\varphi(x-t)\,dt \right\|_C + O(1)\frac{\varepsilon_{n-p}}{(1-q)^4} =$$

$$= \overline{\psi}(n-p+1)\left[q^{-(n-p+1)} \mathscr{E}\left(C^q_{\beta_{n,p},\infty}; V_{n,p}\right) + O(1)\frac{\varepsilon_{n-p}}{(1-q)^4}\right]. \qquad (29)$$

Учитывая равномерность величины $O(1)$ в равенстве (21) относительно β, из соотношения (29) получаем равенство (24).

Пусть теперь $q_1 < q_2 = q$. Тогда [1, с. 365] для последовательностей

$$\alpha_k^{(1)} = \left|\frac{\psi_1(k)}{\overline{\psi}(k)}\right|, \qquad \alpha_k^{(2)} = 1 - \left|\frac{\psi_2(k)}{\overline{\psi}(k)}\right|$$

справедливы равенства

$$\alpha_k^{(i)} = O(1)\left(\frac{q_1}{q_2} + \varepsilon\right)^k, \qquad \varepsilon \in \left(0; 1 - \frac{q_1}{q_2}\right), \qquad i = 1, 2, \qquad (30)$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно k, q_1, q_2 и ε. Из соотношений (27), (30) и очевидного неравенства

$$q^{-(n-p+1)} P_{n,p}^{\beta, q_i} \le \frac{1}{(1-q_i)^2} \le \frac{1}{(1-q)^2}, \qquad \beta \in R^1, \qquad i = 1, 2,$$

следует

$$\Psi_{n,p}(t) = \overline{\psi}(n-p+1) \sum_{k=n-p+1}^{\infty} \left(1-\lambda_k^{(n)}\right) \times$$

$$\times \left(\frac{\psi_1(n-p+1)}{\overline{\psi}(n-p+1)} q_1^{k-(n-p+1)} \cos kt + \frac{\psi_2(n-p+1)}{\overline{\psi}(n-p+1)} q_2^{k-(n-p+1)} \sin kt \right) +$$

$$+ \; O(1)\left(\frac{\varepsilon_{n-p}^{(1)}\psi_1(n-p+1)}{(1-q_1)^4} + \frac{\varepsilon_{n-p}^{(2)}\psi_2(n-p+1)}{(1-q_2)^4} \right) =$$

$$= \overline{\psi}(n-p+1)\left[q^{-(n-p+1)} P_{n,p}^{1, q_2}(t)\, \mathrm{sign}\, \psi_2(n-p+1) + \right.$$

$$\left. + \; O(1)\left(\frac{\varepsilon_{n-p}}{(1-q)^4} + \frac{\alpha_{n-p}}{(1-q)^2}\right)\right], \qquad (31)$$

где

$$\varepsilon_{n-p} = \varepsilon_{n-p}^{(2)}, \quad \alpha_{n-p} = \max\left\{\alpha_{n-p}^{(1)}; \alpha_{n-p}^{(2)}\right\}.$$

Объединяя соотношения (26), (31) и полагая $q_2 = q$, получаем

$$\mathscr{E}\left(C_\infty^{\overline{\psi}}; V_{n,p}\right) = \sup_{\varphi \in C_\infty^{\overline{\psi}}} \left\|\rho_{n,p}(f;x)\right\|_C =$$

$$= \overline{\psi}(n-p+1)\left[\sup_{\substack{\varphi \in S_M \\ \varphi \perp 1}} q^{-(n-p+1)} \left\|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_{n,p}^{1,q_2}(t)\varphi(x-t)\,dt\right\|_C + \right.$$

$$\left. + O(1)\left(\frac{\varepsilon_{n-p}}{(1-q)^4} + \frac{\alpha_{n-p}}{(1-q)^2}\right)\right] =$$

$$= \overline{\psi}(n-p+1)\left[q^{-(n-p+1)}\mathscr{E}\left(C_{1,\infty}^q; V_{n,p}\right) + O(1)\left(\frac{\varepsilon_{n-p}}{(1-q)^4} + \frac{\alpha_{n-p}}{(1-q)^2}\right)\right].$$

Отсюда, принимая во внимание равенство (21) при $\beta = 1$ и то, что $\alpha_{n-p} = o(1/(n-p)p)$, $n \to \infty$, находим

$$\mathscr{E}\left(C_\infty^{\overline{\psi}}; V_{n,p}\right) = \overline{\psi}(n-p+1)\left[\frac{4}{\pi}\frac{1}{(1-q)^2 p} + \right.$$

$$\left. + O(1)\left(\frac{q^{p-1}}{(1-q^2)p} + \frac{1}{(1-q)^3(n-p)p} + \frac{\varepsilon_{n-p}}{(1-q)^4}\right)\right].$$

Этим равенство (24) доказано в случае, когда $q_1 < q_2$. Ясно, что такими же рассуждениями (24) доказывается и в случае, когда $q_1 > q_2$.

Следуя предложенной схеме доказательства и используя вместо (21) формулу (20), получаем равенство (25). Теорема доказана.

1. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. 1. – 427 с.
2. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
3. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Приближения суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 3. – С. 375 – 395.
4. *Рукасов В. І., Чайченко С. О.* Наближення аналітичних періодичних функцій сумами Валле Пуссена // Там же. – 2002. – **54**, № 12. – С. 1653 – 1668.
5. *Рукасов В. И., Новиков О. А.* Приближение аналитических функций суммами Валле Пуссена // Ряди Фур'є: теорія і застосування: Пр. Ін-ту математики НАН України. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – **20**. – С. 228 – 241.

Получено 23.09.2002