УДК 517.53

О. І. Борова, М. В. Заболоцький (Львів. нац. ун-т)

МНОГОЧЛЕННА АСИМПТОТИКА ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ СКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ

We obtain new asymptotic formulas for entire functions of a finite order with zeros on a ray under the condition of regular growth of a counting function for their zeros. These formulas make more precise the well-known Valiron results.

Отримано нові асимптотичні формули для цілих функцій скінченного порядку з нулями на промені за умови регулярного зростання лічильної функції їх нулів. Ці формули уточнюють відомі результати Ж. Валірона.

1. Вступ та формулювання результатів. Нехай f — трансцендентна ціла (надалі ціла) функція з нулями на промені, $n(r)$ — лічильна функція нулів f. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $f(0)=1$, нулі f — від'ємні. Позначимо через $\ln f(z)$ однозначну гілку многозначної функції $\operatorname{Ln} f(z)$ в області $\{z\colon -\pi<\arg z<\pi\}$ таку, що $\ln f(0)=0$. Дослідження зв'язку між регулярністю зростання нулів цілої функції та поведінкою $\ln f(z)$ є однією з основних проблем теорії розподілу значень. Нехай $\rho(r)$ — уточнений порядок (тобто неперервно диференційовна на $[0,+\infty)$ функція така, що $\rho(r)\to\rho\ge 0$, $r\rho'(r)\ln(r)\to 0$ при $r\to\infty$), $L(r)=r^{\rho(r)-\rho}$ і

$$n(r)=r^{\rho}L(r)+\varphi(r), \tag{1}$$

де $\varphi(r)$ — інтегровна на будь-якому скінченному проміжку з $\mathbb{R}_+$ функція. Відомо, що $L(r)$ — повільно змінна функція, тобто $L(\lambda r)\sim L(r)$, $r\to\infty$, для кожного $\lambda>0$. У випадку $\rho=0$ будемо додатково вимагати, щоб $L(r)\nearrow+\infty$ при $r\to\infty$.

Припустимо, що функція φ задовольняє умову

$$\varphi(r)=o(r^{\rho}L(r)),\qquad r\to\infty. \tag{2}$$

Якщо порядок функції f дорівнює ρ (ρ — неціле число), то для $-\pi<\theta<\pi$ виконується [1, 2, с. 94]

$$\ln f(re^{i\theta})\sim\frac{\pi}{\sin\pi\rho}e^{i\rho\theta}r^{\rho}L(r),\qquad r\to\infty. \tag{3}$$

Нехай тепер f — ціла функція цілого порядку $\rho\ge 1$. Тоді

$$f(z)=e^{P(z)}\prod_{\nu=1}^{\infty}E\left(\frac{z}{a_\nu},\rho\right), \tag{4}$$

де

$$P(z) = c_\rho z^\rho + c_{\rho-1} z^{\rho-1} + \ldots + c_1 z,$$

$$E\left(\frac{z}{a_\nu}, \rho\right) = \left(1 + \frac{z}{a_\nu}\right)\exp\left\{-\frac{z}{a_\nu} + \frac{z^2}{2a_\nu^2} - \ldots + \frac{(-1)^\rho z^\rho}{\rho a_\nu^\rho}\right\},$$

$$1 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le \ldots, \quad n \to \infty, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{a_\nu^{\rho+1}} < +\infty.$$

В залежності від того, збіжний ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{a_\nu^\rho}$$

чи розбіжний, будемо говорити, що функція $n(r)$ належить класу збіжності чи розбіжності. Завдяки (1), (2) належність $n(r)$ класу збіжності або розбіжності рівносильна умові збіжності або розбіжності інтеграла [2, с. 68]

$$\int_1^\infty \frac{L(t)}{t} dt. \tag{5}$$

Припустимо спочатку, що інтеграл (5) розбіжний і позначимо

$$L^*(r) = \int_1^r \frac{L(t)}{t} dt.$$

Тоді для $z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$, виконується [1, 2, с. 107]

$$\ln f(re^{i\theta}) = (-1)^\rho e^{i\rho\theta} r^\rho L^*(r) + o(r^\rho L^*(r)), \quad r \to \infty. \tag{6}$$

Легко бачити, що $r^\rho = o(r^\rho L^*(r))$, $L(r) = o(L^*(r))$, $r \to \infty$.

Якщо інтеграл (5) збіжний, то, позначаючи

$$L_*(r) = \int_r^\infty \frac{L(t)}{t} dt, \quad c'_\rho = c_\rho + \frac{(-1)^\rho}{\rho} \sum_{\nu=1}^\infty \frac{1}{a_\nu^\rho},$$

для $-\pi < \theta < \pi$ отримуємо [1, 2, с. 109]

$$\ln f(re^{i\theta}) = c'_\rho e^{i\rho\theta} r^\rho + (-1)^{\rho+1} e^{i\rho\theta} r^\rho L_*(r) + o(r^\rho L_*(r)), \quad r \to \infty. \tag{7}$$

Неважко показати, що $L(r) = o(L_*(r))$, $L_*(r) = o(1)$, $r \to \infty$.

У випадку, коли порядок цілої функції f дорівнює нулю, як показано в [3], для $-\pi < \theta < \pi$ виконується

$$\ln f(re^{i\theta}) = N(r) + i\theta r^\rho L(r) + o(r^\rho L(r)), \quad r \to \infty, \tag{8}$$

де

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt.$$

Припустимо тепер, що функція φ замість (2) задовольняє умову

$$\varphi(r) = o(r^\rho L_1(r)), \quad r \to \infty, \tag{9}$$

де $L_1(r) = rL'(r)$. З означення повільно змінної функції випливає $L_1(r) = o(L(r))$, $r \to \infty$.

У даній роботі, використовуючи метод, розроблений в [3], ми уточнюємо асимптотичні формули (3), (6), (7).

Теорема 1. *Нехай f — ціла функція нецілого порядку ρ з від'ємними нулями така, що виконуються умови* (1), (9), *а* $L_2(r) = rL_1'(r) = o(L_1(r))$, $r \to \to \infty$. *Тоді для* $-\pi < \theta < \pi$

$$\ln f(re^{i\theta}) = \frac{\pi}{\sin \pi\rho} e^{i\rho\theta} r^{\rho} L(r) +$$

$$+ A(\rho, \theta) r^{\rho} L_1(r) + o(r^{\rho} L_1(r)), \quad r \to \infty, \tag{10}$$

де

$$A(\rho, \theta) = (-1)^p \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} e^{i\theta(p-k)}}{(\rho - p + k)^2}, \quad p = [\rho],$$

причому остання оцінка виконується рівномірно відносно θ *в будь-якому куті* $-\pi + \delta \le \theta \le \pi - \delta$, $\delta > 0$.

Теорема 2. *Нехай f — ціла функція цілого порядку $\rho > 0$ і виконуються умови теореми* 1. *Якщо $n(r)$ належить класу розбіжності, то для* $z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$,

$$\ln f(re^{i\theta}) = (-1)^{\rho} e^{i\theta\rho} r^{\rho} L^*(r) + c_{\rho} e^{i\theta\rho} r^{\rho} + (-1)^{\rho} i\theta e^{i\theta\rho} r^{\rho} L(r) +$$

$$+ o(r^{\rho} L(r)), \quad r \to \infty; \tag{11}$$

якщо ж $n(r)$ належить класу збіжності, то для $z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$,

$$\ln f(re^{i\theta}) = c_{\rho}' e^{i\theta\rho} r^{\rho} + (-1)^{\rho+1} e^{i\rho\theta} r^{\rho} L_*(r) + (-1)^{\rho} i\theta e^{i\theta\rho} r^{\rho} L(r) +$$

$$+ o(r^{\rho} L(r)), \quad r \to \infty, \tag{12}$$

причому оцінки (11), (12) *виконуються рівномірно відносно* θ *в будь-якому куті* $-\pi + \delta \le \theta \le \pi - \delta$, $\delta > 0$.

2. Допоміжні результати. Для доведення теорем нам будуть потрібні наступні леми.

Лема 1. *Нехай $\tau(r)$ — інтегровна на $[0, a)$ функція, де $a > 0$ — довільне число,* $\tau(r) \to 0$, $r \to \infty$, *$\alpha(r)$ — повільно змінна функція. Тоді для деякого* $\gamma \in (0, 1)$

$$\int_1^{\infty} \frac{\alpha(t)\tau(t)}{t^{\gamma}(t+r)} dt = o\left(\frac{\alpha(r)}{r^{\gamma}}\right), \quad r \to \infty, \tag{13}$$

причому ця оцінка рівномірна відносно θ *в довільному куті* $-\pi + \delta \le \theta \le \pi - \delta$, $\delta > 0$.

Доведення. Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $|\tau(r)| \le 1$, $r \ge 0$. Нехай $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ — довільне число, де $\varepsilon_0 = \min\left\{\frac{\gamma}{2}, \frac{1-\gamma}{2}\right\}$. Оскільки $\tau(r) \to 0$, $r \to \infty$, $\alpha(r)$ — повільно змінна функція, то існує $r_0 > 1$ таке, що для всіх $r \ge \ge r_0$ $|\tau(r)| < \varepsilon\varepsilon_0/4$, а функції $|\alpha(r)|r^{\varepsilon}$ і $|\alpha(r)|r^{-\varepsilon}$ відповідно неспадна та незростаюча на $[r_0, +\infty)$. Нехай $\alpha^*(r_0) = \max\{|\alpha(t)|:\ 0 \le t \le r_0\}$ і $r_1 \ge r_0$ таке, що для всіх $r \ge r_1$ $|\alpha(r)|r^{1-\gamma} > 4\alpha^*(r_0)r_0/\varepsilon$. Тоді для $r \ge r_1$ маємо

$$\left|\int_1^r \frac{\alpha(t)\tau(t)}{t^\gamma(t+r)}dt\right| \le \left(\int_1^{r_0} + \int_{r_0}^r\right)\frac{|\alpha(t)||\tau(t)|}{t^\gamma(t+r)}dt \le \frac{\alpha^*(r_0)r_0}{r} +$$

$$+\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{4r}\int_{r_0}^r \frac{|\alpha(t)|}{t^\gamma}dt \le \frac{\alpha^*(r_0)r_0}{|\alpha(r)|r^{1-\gamma}}\frac{\alpha(r)}{r^\gamma} + \frac{\varepsilon\varepsilon_0|\alpha(r)|r^\varepsilon}{4r}\int_{r_0}^r \frac{dt}{t^{\gamma+\varepsilon}} \le \frac{\varepsilon}{4}\frac{|\alpha(r)|}{r^\gamma} +$$

$$+\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{4(1-\gamma-\varepsilon)}\frac{|\alpha(r)|}{r^\gamma} < \frac{\varepsilon}{4}\frac{|\alpha(r)|}{r^\gamma} + \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2(1-\gamma)}\frac{|\alpha(r)|}{r^\gamma} < \frac{\varepsilon}{2}\frac{|\alpha(r)|}{r^\gamma}.$$

Далі для $r \ge r_0$ отримуємо

$$\left|\int_r^\infty \frac{\alpha(t)\tau(t)}{t^\gamma(t+r)}dt\right| \le \frac{\varepsilon\varepsilon_0|\alpha(r)|}{4r^\varepsilon}\int_r^\infty \frac{dt}{t^{1+\gamma-\varepsilon}} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0|\alpha(r)|}{4r^\varepsilon}\frac{r^{\varepsilon-\gamma}}{\gamma-\varepsilon} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{4}\frac{\varepsilon_0}{\gamma-\varepsilon_0}\frac{|\alpha(r)|}{r^\gamma} < \frac{\varepsilon}{2}\frac{\alpha(r)}{r^\gamma},$$

що й потрібно було довести.

Зауваження. Використовуючи метод доведення леми 1, можна показати, що лема 1 з [3, с. 317] справедлива для довільної повільно змінної функції $V(r)$, а не тільки для повільно зростаючої.

Для $0 \le \varepsilon < 1$ позначимо

$$a_k(r, \gamma, \varepsilon; \omega) = \int_1^{(1-\varepsilon)r} \omega(t)t^{k-\gamma}dt,$$

$$b_k(r, \gamma, \varepsilon; \omega) = \int_{(1+\varepsilon)r}^1 \omega(t)t^{-k-\gamma-1}dt,$$

де $k \in \mathbb{Z}_+$, $\gamma \in (0, 1)$, ω — функція, визначена на $[0, +\infty)$, і покладемо $a_k(r, \gamma, 0; \omega) = a_k(r, \gamma; \omega)$, $b_k(r, \gamma, 0; \omega) = b_k(r, \gamma; \omega)$.

Лема 2. *Нехай* $\alpha(r)$ — *додатна повільно змінна функція,* $\beta > 0$. *Тоді для* $z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \alpha_k(r,\gamma,\varepsilon;\alpha)}{z^{k-\beta}} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \alpha_k(r,\gamma;\alpha)}{z^{k-\beta}}, \tag{14}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k b_k(r,\gamma,\varepsilon;\alpha)}{z^{-k-\beta}} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k b_k(r,\gamma;\alpha)}{z^{-k-\beta}}. \tag{15}$$

Доведення. Нехай $z = re^{i\theta}$, $|\theta| \le \pi - \delta$, $\delta > 0$, $0 < \varepsilon < 1$. Маємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k a_k(r,\gamma,\varepsilon;\alpha)}{z^{k-\beta}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k a_k(r,\gamma,\varepsilon;\alpha)e^{-i\theta(k-\beta)}}{r^{k-\beta}}.$$

Для довільного $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{k=0}^n e^{-i\theta(k-\beta)}\right| = \left|e^{i\theta\beta}\frac{1-e^{-i\theta n}}{1-e^{-i\theta}}\right| \le \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta}} \le \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos\delta}}.$$

Далі $(\alpha^*(r) = \max\{|\alpha(t)|:\ 0 \le t \le r\})$

$$\frac{a_k(r,\gamma,\varepsilon;\alpha)}{r^{k-\beta}} \le \frac{a_k(r,\gamma;\alpha)}{r^{k-\beta}} = \frac{1}{r^{k-\beta}}\int_1^r \alpha(t)t^{k-\gamma}\,dt \le$$

$$\le \frac{\alpha^*(r)}{r^{k-\beta}}\int_1^r t^{k-\gamma}\,dt \le \alpha^*(r)r^{\beta-k}\frac{r^{k-\gamma+1}}{k-\gamma+1} = \frac{\alpha^*(r)r^{\beta-\gamma+1}}{k-\gamma+1}\to 0, \quad k\to\infty.$$

Зауважимо, що при фіксованому $\varepsilon>0$ і $r>0$ величина $a_k(r,\gamma,\varepsilon;\alpha)/r^{k-\beta}$ монотонно спадає при $k\to\infty$. Дійсно,

$$\frac{a_{k+1}(r,\gamma,\varepsilon;\alpha)}{r^{k+1-\beta}} - \frac{a_k(r,\gamma,\varepsilon;\alpha)}{r^{k-\beta}} = \frac{1}{r^{k-\beta}}\int_1^{(1-\varepsilon)r}\alpha(t)t^{k-\gamma}\left(\frac{t}{r}-1\right)dt < 0.$$

Звідси за ознакою рівномірної збіжності Діріхле отримуємо, що ряд (14) збігається рівномірно відносно $\varepsilon\in(0,1)$, а тому можливий граничний перехід під знаком суми (14).

Аналогічно показуємо, що ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k b_k(r,\gamma,\varepsilon;\alpha)}{z^{-k-\beta}}$$

збігається рівномірно відносно $\varepsilon\in(0,1)$. Звідси випливає співвідношення (15). Лему 2 доведено.

Лема 3. *Нехай* $\alpha(r)$ *— додатна повільно змінна функція,* $\beta>0$, $\tau(r)$ *— інтегровна на* $[0,+\infty)$ *функція,* $\tau(r)\to 0$, $r\to\infty$. *Тоді для* $z=re^{i\theta}$, $-\pi<\theta<$ $<\pi$,

$$\Sigma_1 = \left|\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{a_k(r,\gamma;\tau\alpha)}{(k+1-\gamma)^2 z^{k-\beta}}\right| = o\left(r^{\beta-\gamma+1}\alpha(r)\right), \quad r\to\infty, \tag{16}$$

$$\Sigma_2 = \left|\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{b_k(r,\gamma;\tau\alpha)}{(\gamma+k)^2 z^{-\beta-k-1}}\right| = o\left(r^{\beta-\gamma+1}\alpha(r)\right), \quad r\to\infty, \tag{17}$$

причому співвідношення (16) *та* (17) *виконуються рівномірно відносно* θ, $\theta\in$ $\in[-\pi+\delta,\pi-\delta]$, $0<\delta<1$.

Доведення. Враховуючи, що $\tau(r)\to 0$ при $r\to\infty$, отримуємо $\tau^*(r)=$ $=\sup\{|\tau(t)|:\ r/2\le t\le r\}\to 0$, $r\to\infty$. Для всіх достатньо великих r маємо

$$\Sigma_1 \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{-k+\beta}}{(k+1-\gamma)^2}\alpha(r)r^{\gamma}\int_1^{r/2}|\tau(t)|t^{k-2\gamma}\,dt +$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{-k+\beta}}{(k+1-\gamma)^2}\tau^*(r)\alpha(r)r^{\gamma}\int_{r/2}^{r}t^{k-2\gamma}\,dt \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{\beta+\gamma}}{2^k(k+1-\gamma)^2}\int_1^{r/2}\frac{|\tau(t)|dt}{t^{2\gamma}} +$$

$$+\alpha(r)\tau^*(r)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{\beta-\gamma+2}}{(k+1-\gamma)^2}\int_{r/2}^{r}t^{-2}\,dt = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k(k+1-\gamma)^2}\right)r^{\beta+\gamma}\alpha(r)o(r^{1-2\gamma}) +$$

$$+\alpha(r)\tau^*(r)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(k+1-\gamma)^2}\right)r^{\beta-\gamma+1} = o\left(r^{\beta-\gamma+1}\alpha(r)\right), \quad r\to\infty,$$

оскільки за правилом Лопіталя

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\int_1^{r/2}|\tau(t)|t^{-2\gamma}\,dt}{r^{1-2\gamma}} = \lim_{r\to\infty}\frac{|\tau(r/2)|}{2^{1-2\gamma}(1-2\gamma)} = 0.$$

Покладемо $\tau^{**}(r)=\sup\{|\tau(t)|:\ r\le t\le\infty\}$. Далі для всіх достатньо великих r отримуємо

$$\Sigma_2 \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{\beta+k+1}}{(\gamma+k)^2}\frac{\alpha(r)}{r^{\gamma/2}}\tau^{**}(r)\int_r^{\infty}t^{-k-\gamma/2-1}\,dt = \alpha(r)\tau^{**}(r)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{\beta+k-\gamma/2+1}}{(\gamma+k)^2}\frac{r^{-k-\gamma/2}}{k+\gamma/2} \le$$

$$\le r^{\beta-\gamma+1}\alpha(r)\tau^{**}(r)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+\gamma/2)^3} = o\left(r^{\beta+\gamma-1}\alpha(r)\right), \quad r\to\infty,$$

оскільки $\tau^{**}(r)\to 0$ при $r\to\infty$. Лему 3 доведено.

3. Доведення теорем 1 і 2 та деякі наслідки. Доведення теореми 1. За умов теореми 1 маємо (див., наприклад, [2, с. 92])

$$\ln f(z) = (-1)^p z^{p+1}\int_1^{\infty}\frac{n(t)}{t^{p+1}(t+z)}dt = (-1)^p z^{p+1}\int_1^{\infty}\frac{n(t)-t^{\rho(t)}}{t^{p+1}(t+z)}dt +$$

$$+ (-1)^p z^{p+1}\int_1^{\infty}\frac{t^{\rho(t)}}{t^{p+1}(t+z)}dt = J_1 + J_2,$$

де $p=[\rho]$. Враховуючи (1) і (9), отримуємо

$$J_1 = (-1)^p z^{p+1}\int_1^{\infty}\frac{n(t)-t^{\rho(t)}}{t^{p+1}(t+z)}dt = (-1)^p z^{p+1}\int_1^{\infty}\frac{\tau(t)L_1(t)}{t^{p-\rho+1}(t+z)}dt,$$

де $\tau(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Оскільки $rL_1'(r)=o(L_1(r))$, $r\to\infty$, то $L_1(r)$ — повільно змінна функція. Враховуючи, що (див., наприклад, [2, с. 92]) $|t+z|\ge \ge(t+r)\sin\delta/2$ для $-\pi+\delta\le\arg z\le\pi-\delta$, $\delta>0$, за лемою 1 з $\alpha(r)=L_1(r)$, $\gamma= =1+p-\rho$ маємо

$$J_1 = o(r^{\rho}L_1(r)), \quad z = re^{i\theta}\to\infty,\ -\pi<\theta<\pi.$$

Далі, для $0<\varepsilon<1$

$$J_2 = (-1)^p z^{p+1}\int_1^{r}\frac{t^{\rho-p-1}L(t)}{z(1+t/z)}dt + (-1)^p z^{p+1}\int_r^{\infty}\frac{t^{\rho-p-2}L(t)}{1+z/t}dt =$$

$$= (-1)^p z^p\int_1^r L(t)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{\rho-p-1}\left(\frac{t}{z}\right)^k dt +$$

$$+ (-1)^p z^{p+1}\int_r^{\infty}L(t)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{\rho-p-2}\left(\frac{t}{z}\right)^k dt =$$

$$= (-1)^p\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{p-k}\int_1^{(1-\varepsilon)r}L(t)t^{\rho-p+k-1}\,dt +$$

$$+ (-1)^p\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{p+k+1}\int_{(1+\varepsilon)r}^{\infty}L(t)t^{\rho-p-k-2}\,dt =$$

$$= (-1)^p\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{a_k(r,\gamma,\varepsilon;L)}{z^{k-p}} + (-1)^p\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{b_k(r,\gamma,\varepsilon;L)}{z^{-k-p-1}}.$$

Враховуючи лему 2 з $\beta = p$ або $\beta = p+1$, отримуємо

$$J_2 = (-1)^p \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a_k(r,\gamma;L)}{z^{k-p}} + (-1)^p \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{b_k(r,\gamma;L)}{z^{-k-p-1}}. \tag{18}$$

Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $L(1) = 0$. Інтегруючи частинами, маємо

$$a_k(r,\gamma;L) = \left.\frac{L(t)t^{\rho+k-p}}{\rho+k-p}\right|_1^r - \frac{1}{\rho+k-p}\int_1^r L_1(t)t^{\rho-p+k-1}\,dt =$$

$$= \frac{L(r)r^{\rho+k-p}}{\rho+k-p} - \frac{1}{\rho+k-p}a_k(r,\gamma;L_1),$$

і, аналогічно,

$$b_k(r,\gamma,L) = -\frac{L(r)r^{\rho-p-k-1}}{\rho-p-k-1} - \frac{1}{\rho-p-k-1}b_k(r,\gamma;L_1).$$

Оскільки (див., наприклад, [4, с. 277])

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+(\rho-p)}e^{-ik\theta} = \frac{\pi}{\sin\pi\rho}(-1)^p e^{i\theta(\rho-p)}, \quad -\pi < \theta < \pi,$$

то з (18) знаходимо

$$J_2 = (-1)^p \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{i\theta(p-k)}}{\rho+k-p} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^k e^{i\theta(p-k)}}{\rho+k-p} \right) L(r)r^{\rho} +$$

$$+ (-1)^{p+1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a_k(r,\gamma;L_1)z^{p-k}}{\rho+k-p} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b_k(r,\gamma;L_1)z^{p+k+1}}{-\rho+p+k+1} \right) =$$

$$= \frac{\pi e^{i\rho\theta}}{\sin\pi\rho}r^{\rho}L(r) + (-1)^{p+1}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a_k(r,\gamma;L_1)z^{p-k}}{\rho+k-p} +$$

$$+ (-1)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b_k(r,\gamma;L_1)z^{p+k+1}}{-\rho+p+k+1}. \tag{19}$$

Ще раз інтегруючи частинами, отримуємо

$$a_k(r,\gamma;L_1) = \frac{L_1(r)r^{\rho-p+k}}{\rho-p+k} - \frac{1}{\rho-p+k}a_k(r,\gamma;L_2),$$

$$b_k(r,\gamma;L_1) = -\frac{L_1(r)r^{\rho-p-k-1}}{\rho-p-k-1} + \frac{1}{-\rho+p+k+1}b_k(r,\gamma;L_2).$$

Зауважимо, що $L_2(r) = \tau(r)L_1(r)$, де $\tau(r) \to 0$, $r \to \infty$. Тепер з (19), враховуючи лему 3 з $\alpha(r) = |L_1(r)|$, $\beta = p$, $\gamma = 1+p-\rho$, маємо

$$J_2 = \frac{\pi e^{i\rho\theta}}{\sin\pi\rho}r^{\rho}L(r) + (-1)^p r^{\rho}L_1(r)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}e^{i\theta(p-k)}}{(\rho-p+k)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{i\theta(k+p+1)}}{(p-\rho+k+1)^2} \right) +$$

$$+ (-1)^p\Sigma_1 + (-1)^p\Sigma_2 = \frac{\pi e^{i\rho\theta}}{\sin\pi\rho}r^{\rho}L(r) +$$

$$+ (-1)^p r^\rho L_1(r) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} e^{i\theta(p-k)}}{(\rho - p + k)^2} + o\big(r^\rho L_1(r)\big), \qquad r \to \infty,$$

що й доводить теорему.

Доведення теореми 2. Розглянемо спочатку випадок, коли $n(r)$ належить класу розбіжності. Зобразимо $f(z)$ у вигляді (див. (4))

$$f(z) = f_1(z) e^{c_{\rho-1} z^{\rho-1} + \ldots + c_1 z} f_2(z),$$

де

$$f_1(z) = \exp\left\{ z^\rho \left(c_\rho + \frac{(-1)^\rho}{\rho} \sum_{|a_\nu| \le r} a_\nu^{-\rho} \right) \right\},$$

$$f_2(z) = \prod_{0 < |a_\nu| \le r} E\left(\frac{z}{a_\nu}, \rho - 1\right) \prod_{|a_\nu| > r} E\left(\frac{z}{a_\nu}, \rho\right).$$

Будемо розглядати $\ln f(z)$ у куті $\{-\pi < -\pi + \delta \le \arg z \le \pi - \delta < \pi\}$, $\ln f(0) = = \ln f_1(0) = \ln f_2(0) = 0$. Маємо

$$|\ln f(z) - \ln f_1(z)| \le O(r^{\rho-1}) + |\ln f_2(z)|, \quad r \to \infty. \tag{20}$$

Враховуючи, що $r^{\rho(r)} = r^\rho L(r)$, функцію $\ln f_2(z)$ зображаємо у вигляді [2, с. 106]

$$\ln f_2(z) = (-1)^{\rho+1} \frac{z^\rho}{\rho r^\rho} n(r) + (-1)^{\rho+1} z^\rho \int_1^r \frac{n(t)\,dt}{t^\rho (t+z)} +$$

$$+ (-1)^\rho z^{\rho+1} \int_r^\infty \frac{n(t)\,dt}{t^{\rho+1}(t+z)} = (-1)^{\rho+1} \frac{z^\rho}{\rho r^\rho} + (-1)^{\rho+1} z^\rho \int_1^r \frac{n(t) - t^{\rho(t)}}{t^\rho (t+z)} dt +$$

$$+ (-1)^\rho z^{\rho+1} \int_r^\infty \frac{n(t) - t^{\rho(t)}}{t^{\rho+1}(t+z)} dt + (-1)^{\rho+1} z^\rho \int_1^r \frac{L(t)}{t+z} dt +$$

$$+ (-1)^\rho z^{\rho+1} \int_r^\infty \frac{L(t)}{t(t+z)} dt = (-1)^{\rho+1} \frac{z^\rho}{\rho r^\rho} + J_1 + J_2 + J_3 + J_4.$$

Оскільки за умов (1), (9) $n(r) - r^{\rho(r)} = o(r^\rho L_1(r))$, $r \to \infty$, то за лемою 1 з [3, с. 317] та зауваженням з п. 1 для $z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$, виконується

$$J_1 = o(r^\rho L_1(r)), \quad J_2 = o(r^\rho L_1(r)), \quad r \to \infty.$$

Далі, враховуючи міркування з [3, с. 323, 324], отримуємо

$$J_3 + J_4 = (-1)^\rho z^\rho \left(-\int_1^r \frac{L(t)\,dt}{t+z} + z \int_r^\infty \frac{L(t)\,dt}{t(t+z)} \right) = (-1)^\rho z^\rho i\theta L(r).$$

Тому для $z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$,

$$\ln f_2(z) = (-1)^{\rho+1} \frac{z^\rho}{\rho r^\rho} n(r) + (-1)^\rho z^\rho i\theta L(r) + o(r^\rho L_1(r)), \quad r \to \infty. \tag{21}$$

Для $f_1(z)$ маємо

$$\ln f_1(z) = c_\rho z^\rho + (-1)^\rho \frac{z^\rho}{\rho} \sum_{|a_\nu| \le r} a_\nu^{-\rho} = c_\rho z^\rho + \frac{(-1)^\rho z^\rho}{\rho} \int_1^r \frac{dn(t)}{t^\rho} =$$

$$= c_\rho z^\rho + \frac{(-1)^\rho z^\rho}{\rho} \frac{n(t)}{t^\rho}\Bigg|_1^r + (-1)^\rho z^\rho \int_1^r \frac{n(t)}{t^{\rho+1}} dt =$$

$$= c_\rho z^\rho + (-1)^\rho \frac{z^\rho}{\rho r^\rho} n(r) + (-1)^\rho z^\rho \int_1^r \frac{n(t)}{t^{\rho+1}} dt. \tag{22}$$

Оскільки $\int_1^\infty \frac{n(t)}{t^{\rho+1}} dt$ розбіжний, то завдяки (1) та (9) за допомогою правила Лопіталя встановлюємо

$$\int_1^r \frac{n(t)}{t^{\rho+1}} dt = \int_1^r \frac{L(t)}{t} dt + \int_1^r \frac{\varphi(t)}{t^{\rho+1}} dt = L^*(r) + o(L(r)), \quad r \to \infty. \tag{23}$$

Отже, з (20) – (23) для $z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$, отримуємо

$$\ln f(re^{i\theta}) = \ln f_1(re^{i\theta}) + \ln f_2(re^{i\theta}) + O(r^{\rho-1}) =$$

$$= (-1)^\rho e^{i\theta\rho} r^\rho L^*(r) + c_\rho e^{i\theta\rho} r^\rho + (-1)^\rho i\theta e^{i\theta\rho} r^\rho L(r) + o(r^\rho L(r)), \quad r \to \infty,$$

що доводить співвідношення (11).

Нехай тепер $n(r)$ належить класу збіжності. Тоді ряд $\sum_{\nu=1}^\infty a_\nu^{-\rho}$ — збіжний і $f(z)$ можна зобразити у вигляді

$$f(z) = e^{c'_\rho z^\rho + c_{\rho-1} z^{\rho-1} + \ldots + c_1 z} \prod_{\nu=1}^\infty E\left(\frac{z}{a_\nu}, \rho - 1\right) = f_3(z) e^{c_{\rho-1} z^{\rho-1} + \ldots + c_1 z} f_2(z),$$

де $f_2(z)$ визначається, як і раніше,

$$f_3(z) = \exp\left\{ z^\rho \left(c'_\rho - \frac{(-1)^\rho}{\rho} \sum_{|a_\nu| > r} a_\nu^{-\rho} \right) \right\}, \qquad c'_\rho = c_\rho + \frac{(-1)^\rho}{\rho} \sum_{\nu=1}^\infty a_\nu^{-\rho}.$$

Розглядаємо, як і вище, $\ln f(z)$ у куті $\{-\pi < -\pi + \delta \le \arg z \le \pi - \delta < \pi\}$, $\ln f(0) = \ln f_2(0) = \ln f_3(0) = 0$. Враховуючи, що $n(r) = o(r^\rho)$ при $r \to \infty$, маємо

$$\ln f_3(z) = \ln \exp\left\{ z^\rho \left(c'_\rho - \frac{(-1)^\rho}{\rho} \sum_{|a_\nu| > r} a_\nu^{-\rho} \right) \right\} =$$

$$= c'_\rho z^\rho + \frac{(-1)^{\rho+1} z^\rho}{\rho} \sum_{|a_\nu| > r} a_\nu^{-\rho} = c'_\rho z^\rho + \frac{(-1)^{\rho+1} z^\rho}{\rho} \int_r^\infty \frac{dn(t)}{t^\rho} =$$

$$= c'_\rho z^\rho + \frac{(-1)^\rho z^\rho n(r)}{\rho r^\rho} + (-1)^{\rho+1} z^\rho \int_r^\infty \frac{n(t)}{t^{\rho+1}} dt. \tag{24}$$

Оскільки

$$\int_1^\infty \frac{n(t)}{t^{\rho+1}} dt$$

збіжний, то завдяки (1) та (9) за допомогою правила Лопіталя встановлюємо

$$\int_r^{\infty} \frac{n(t)}{t^{\rho+1}} dt = \int_r^{\infty} \frac{L(t)}{t} dt + \int_r^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t^{\rho+1}} dt = L_*(r) + o(L(r)), \quad r \to \infty. \tag{25}$$

Отже, враховуючи (21), (24) та (25), для $z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$, маємо

$$\ln f(re^{i\theta}) = \ln f_3(re^{i\theta}) + \ln f_2(re^{i\theta}) + O(r^{\rho-1}) =$$

$$= c'_\rho e^{i\theta\rho} r^\rho + (-1)^{\rho+1} e^{i\theta\rho} r^\rho L_*(r) + (-1)^\rho i\theta e^{i\theta\rho} r^\rho L(r) + o(r^\rho L(r)), \quad r \to \infty,$$

що й доводить теорему 2.

З теореми про зображення субгармонійних в $\mathbb{R}^2$ функцій та з доведення теорем 1 – 3 випливають такі твердження.

Наслідок 1. *Нехай u — субгармонійна в $\mathbb{R}^2$ функція нецілого порядку ρ, маса Рісса μ якої зосереджена на від'ємній дійсній півосі, і виконуються умови теореми 1, де $n(r) = \mu(\{z: |z| \le r\})$. Тоді для $-\pi < \theta < \pi$ виконується*

$$u(re^{i\theta}) = \frac{\pi}{\sin \pi\rho} \cos(\rho\theta) r^\rho L(r) + B(\rho, \theta) r^\rho L_1(r) + o(r^\rho L_1(r)), \quad r \to \infty,$$

де

$$B(\rho, \theta) = \operatorname{Re} A(\rho, \theta) = (-1)^\rho \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cos\theta(p-k)}{(\rho - p + k)^2}, \quad p = [\rho].$$

Наслідок 2. *Нехай u — субгармонійна в $\mathbb{R}^2$ функція цілого порядку ρ і виконуються умови наслідку 1. Тоді для $-\pi < \theta < \pi$ виконується ($\alpha_\rho = \arg c_\rho$, $\alpha'_\rho = \arg c'_\rho$)*

$$u(re^{i\theta}) = (-1)^\rho \cos(\rho\theta) r^\rho L^*(r) + |c_\rho| \cos(\theta\rho + \alpha_\rho) r^\rho +$$

$$+ (-1)^{\rho+1} \theta \sin(\rho\theta) r^\rho L(r) + o(r^\rho L(r)), \quad r \to \infty,$$

якщо $n(r)$ належить класу розбіжності, і

$$u(re^{i\theta}) = \cos(\theta\rho + \alpha'_\rho) r^\rho + (-1)^{\rho+1} \cos(\rho\theta) r^\rho L_*(r) +$$

$$+ (-1)^{\rho+1} \theta \sin(\rho\theta) r^\rho L(r) + o(r^\rho L(r)), \quad r \to \infty,$$

якщо $n(r)$ належить класу збіжності.

1. *Valiron G.* Sur les fonctions entiéres d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions á correspondance réguliére // Ann. Fac. sci. Univ. Toulouse. – 1914. – **5**. – P. 117 – 257.
2. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.
3. *Заболоцький М. В.* Теореми типу Валірона та Валірона – Тітчмарша для цілих функцій нульового порядку // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 3. – С. 315 – 325.
4. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1981. – 800 с.

Одержано 05.09.2001