УДК 517.51

В. В. Михайлюк (Чернів. нац. ун-т)

ПОБУДОВА НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ З ДАНИМ ЗВУЖЕННЯМ

We solve a problem of the construction of separately continuous functions on a product of two topological spaces with a given restriction. In particular, we show that , for arbitrary topological space X and function $g: X \to \mathbf{R}$ of the first Baire class, there exists a separately continuous function $f: X \times X \to \mathbf{R}$ such that $f(x, x) = g(x)$ for every $x \in X$.

Розв'язано задачу про побудову нарізно неперервних функцій на добутку двох топологічних просторів із даним звуженням. Зокрема, показано, що для довільних топологічного простору X і функції $g: X \to \mathbf{R}$ першого класу Бера існує нарізно неперервна функція $f: X \times X \to \mathbf{R}$ така, що $f(x, x) = g(x)$ для кожного $x \in X$.

1. Відомо [1], що діагоналі нарізно неперервних функцій двох дійсних змінних є в точності функціями першого класу Бера. У роботі [2] показано, що для довільного топологічного простору X з нормальним квадратом X^2 і G_δ-діагоналлю та довільної функції $g: X \to \mathbf{R}$ першого класу Бера існує нарізно неперервна функція $f: X \times X \to \mathbf{R}$, для якої $f(x, x) = g(x)$, тобто кожну функцію першого класу Бера на діагоналі можна продовжити до нарізно неперервної на всьому добутку функції. Аналогічні питання для функцій n змінних розглядалися в [3].

З іншого боку, при дослідженні нарізно неперервних функцій $f: X \times Y \to \mathbf{R}$, визначених на добутку топологічних просторів X і Y, природним чином виникають дві топології: топологія нарізної неперервності σ, тобто найслабша топологія, відносно якої всі функції f є неперервними, і хрест-топологія γ, що складається з усіх множин G, для яких всі x-розрізи $G^x = \{y \in Y: (x, y) \in G\}$ та y-розрізи $G_y = \{x \in X: (x, y) \in G\}$ є відкритими в Y та X відповідно (див. [4]). Оскільки діагональ $\Delta = \{(x, x): x \in \mathbf{R}\}$ є замкненою дискретною множиною в $(\mathbf{R}^2, \sigma)$ чи $(\mathbf{R}^2, \gamma)$ і не кожна функція на Δ продовжується до нарізно неперервної на $\mathbf{R}^2$, то навіть у випадку $X = Y = \mathbf{R}$ топології σ і γ не є нормальними (більше того, γ не є регулярною [4, 5]). Крім того, для досить обширного класу добутків $X \times Y$, зокрема, коли хоча б один із співмножників метризовний, кожна нарізно неперервна функція $f: X \times Y \to \mathbf{R}$ є функцією першого класу Бера [6]. Таким чином, виникає питання: для яких множин $E \subseteq X \times Y$ і σ-неперервної чи γ-неперервної функції $g: E \to \mathbf{R}$ першого класу Бера існує нарізно неперервна функція $f: X \times Y \to \mathbf{R}$, для якої звуження $f|_E$ збігається з g?

У даній роботі ми, узагальнюючи запропонований у [2] підхід, будемо розв'язувати цю задачу для множин E певного типу в добутку топологічних просторів.

2. Почнемо з розгляду деяких допоміжних понять і доведення допоміжних тверджень.

Множина $A \subseteq X$ *має властивість продовження в топологічному просторі* X, якщо кожна неперервна функція $g: A \to [0, 1]$ може бути продовжена до неперервної функції $f: X \to [0, 1]$. Згідно з теоремою Тітце – Урисона [7, с. 116] кожна замкнена множина в нормальному просторі має властивість продовження.

Лема 1. *Нехай множини* X_1 *і* Y_1 *мають властивість продовження в топологічних просторах* X *і* Y *відповідно,* $e: X_1 \to Y_1$ — *гомеоморфізм,* $E = \{(x, e(x)): x \in X_1\}$ і $g: E \to [-1, 1]$ — *неперервна функція. Тоді існують непе-*

рервні функції $f: X \times Y \to [-1, 1]$ *і* $h: X \times Y \to [-1, 1]$, *які задовольняють умови*:

i) $f|_E = g$;

ii) $E = h^{-1}(0)$;

iii) *для довільних* $x', x'' \in X$ *і* $y', y'' \in Y$ *з того, що* $x' = x''$ *або* $y' = y''$, *випливає рівність* $|f(x', y') - f(x'', y'')| = |h(x', y') - h(x'', y'')|$.

Доведення. Розглянемо неперервні функції $\varphi: X_1 \to [-1, 1]$ і $\psi: Y_1 \to [-1, 1]$, які означимо таким чином: $\varphi(x) = g(x, e(x))$, $\psi(y) = g(e^{-1}(y), y)$. Оскільки X_1 і Y_1 мають властивість продовження в просторах X і Y відповідно, існують неперервні функції $\tilde{\varphi}: X \to [-1, 1]$ і $\tilde{\psi}: Y \to [-1, 1]$ такі, що $\tilde{\varphi}|_{X_1} = \varphi$ і $\tilde{\psi}|_{Y_1} = \psi$. Покладемо $f(x, y) = (\tilde{\varphi}(x) + \tilde{\psi}(y))/2$ і $h(x, y) = (\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\psi}(y))/2$. Зрозуміло, що f і h неперервні на $X \times Y$ і набувають значень в $[-1, 1]$. Крім того, для довільної точки $p = (x, y) \in E$ одержуємо $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) = g(p) = \psi(y) = \tilde{\psi}(y)$. Тому $f|_E = g$ і $h|_E = 0$, тобто виконуються умови i) та ii).

Нехай $x', x'' \in X$ і $y \in Y$. Тоді $f(x', y) - f(x'', y) = (\tilde{\varphi}(x') - \tilde{\varphi}(x''))/2 = h(x', y) - h(x'', y)$. Якщо ж $x \in X$ і $y', y'' \in Y$, то $f(x, y') - f(x, y'') = (\tilde{\psi}(y') - \tilde{\psi}(y''))/2 = h(x, y'') - h(x, y')$. Отже, умова iii) виконується.

Лему доведено.

У випадку, коли множина E задовольняє умови типу компактності, буде корисним таке твердження.

Лема 2. *Нехай X — топологічний простір, E — псевдокомпактна множина в X, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність неперервних функцій $f_n: X \to \mathbf{R}$, яка поточково збігається на множині E. Тоді існує функціонально замкнена множена $F \subseteq X$ така, що $E \subseteq F$ і послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ поточково збігається на множині F.*

Доведення. Розглянемо діагональне відображення $f = \underset{n \in \mathbf{N}}{\Delta} f_n : X \to \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, $f(x) = (f_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$. Оскільки множина E псевдокомпактна і f неперервне, множина $f(E)$ є псевдокомпактною в метризовному просторі $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Тому $f(E)$ замкнена, а множина $F = f^{-1}(f(E))$ функціонально замкнена. Залишилось перевірити, що послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ поточково збігається на множині F. Нехай $x \in F$. Тоді існує таке $x_1 \in E$, що $f(x) = f(x_1)$, тобто $f_n(x) = f_n(x_1)$ для кожного $n \in \mathbf{N}$. Оскільки послідовність $(f_n(x_1))_{n=1}^{\infty}$ збіжна, послідовність $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ також збіжна.

Наступне твердження будемо використовувати на завершальному етапі побудов нарізно неперервних функцій з даним звуженням.

Лема 3. *Нехай X — топологічний простір, F — функціонально замкнена множина в X, $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність неперервних функцій $h_n: X \to \mathbf{R}$ таких, що $F \subseteq h_n^{-1}(0)$ для кожного $n \in \mathbf{N}$ і $G = X \setminus F$. Тоді існує локально скінченне розбиття одиниці $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ на G таке, що носії $G_n = \operatorname{supp} \varphi_n = \{x \in G: \varphi_n(x) > 0\}$ функцій φ_n задовольняють умови*:

a) $\overline{G_n} \cap F = \varnothing$ *для кожного* $n = 0, 1, 2, \ldots$;

b) $G_n \subseteq h_n^{-1}((-1/n, 1/n))$ *для кожного* $n = 1, 2, \ldots$.

Доведення. Нехай $h_0: X \to [0, 1]$ — така неперервна функція, що $F = h_0^{-1}(0)$. Для кожного $n \in \mathbf{N}$ покладемо

$$A_n = \bigcap_{k=0}^{n} h_k^{-1}\left(\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right), \quad B_n = \bigcap_{k=0}^{n} h_k^{-1}\left(\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]\right), \quad G_n = A_n \setminus B_{n+2}$$

і, крім того, $G_0 = G \setminus B_2$. Зрозуміло, що всі множини G_n є функціонально відкритими і $G_n \subseteq h_n^{-1}((-1/n, 1/n))$ для кожного $n \in \mathbf{N}$, тобто виконується умова b). Зауважимо, що $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} h_n^{-1}(0) = F$. Оскільки $A_{n+1} \subseteq B_{n+1} \subseteq A_n$ для кожного $n \in \mathbf{N}$, то $A_n \setminus A_{n+1} \subseteq A_n \setminus B_{n+2} \subseteq A_n \setminus A_{n+2} = (A_n \setminus A_{n+1}) \bigcup (A_{n+1} \setminus A_{n+2})$. Тому

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus B_{n+2}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A_{n+1}) = A_1 \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = A_1 \setminus F.$$

Отже, $\bigcup_{n=0}^{\infty} G_n = (G \setminus B_2) \bigcup (A_1 \setminus F) = G$.

Покажемо, що сім'я $(G_n : n = 0, 1, 2, \dots)$ є локально скінченною на G. Нехай $x \in G$, тобто $h_0(x) \neq 0$. Виберемо $n_0 \in \mathbf{N}$ так, що $1/n_0 < |h_0(x)|$. Тоді $x \notin B_{n_0}$ і множина $G \setminus B_{n_0}$ є околом точки x. З іншого боку, $G_n \subseteq A_n \subseteq B_{n_0}$ для кожного $n \geq n_0$. Тому $G_n \bigcap (G \setminus B_{n_0}) = \varnothing$ для кожного $n \geq n_0$. Отже, сім'я $(G_n : n = 0, 1, 2, \dots)$ є локально скінченною в точці x.

Оскільки множини G_n функціонально відкриті, існують такі неперервні функції $\psi_n : X \to [0, 1]$, що $G_n = \psi_n^{-1}((0,1])$. Функція $\psi : G \to [0, +\infty)$, яка визначається формулою $\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x)$, є неперервною, причому $\operatorname{supp} \psi = G$. Для кожного $x \in G$ і $n = 0, 1, \dots$ покладемо $\varphi_n(x) = \psi_n(x)/\psi(x)$. Функції φ_n неперервні і утворюють локально скінченне розбиття одиниці на G, причому $G_n = \operatorname{supp} \varphi_n$.

Залишилось перевірити виконання умови a). Оскільки $G_n \subseteq X \setminus B_{n+2} \subseteq X \setminus A_{n+2}$ і множина $X \setminus A_{n+2}$ замкнена, то $\overline{G}_n \subseteq X \setminus A_{n+2}$, тобто $\overline{G}_n \bigcap A_{n+2} = \varnothing$. Крім того, $F \subseteq A_{n+2}$, тому $\overline{G}_n \bigcap F = \varnothing$ для кожного $n = 0, 1, \dots$.

3. Перейдемо до викладу основних результатів.

Теорема 1. *Нехай множини X_1 і Y_1 мають властивість продовження в топологічних просторах X і Y відповідно, $e : X_1 \to Y_1$ — гомеоморфізм, $E = \{(x, e(x)) : x \in X_1\}$, $g : E \to \mathbf{R}$ — функція першого класу Бера і виконується хоча б одна з наступних умов: E — псевдокомпактна, E — функціонально замкнена в $X \times Y$, X_1 — функціонально замкнена в X, Y_1 — функціонально замкнена в Y. Тоді існує нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbf{R}$ така, що $f|_E = g$.*

Доведення. Виберемо послідовність неперервних функцій $g_n : E \to [-n, n]$, яка поточково збігається до функції g, і застосуємо лему 1. Отримаємо послідовності неперервних функцій $f_n : X \times Y \to [-n, n]$ і $h_n : X \times Y \to [-n, n]$, які задовольняють відповідні умови i) – iii).

Покажемо, що множина E міститься в деякій функціонально замкненій множині F_1, на якій послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ збігається поточково. Якщо E — функціонально замкнена, то $F_1 = E$. З леми 2 випливає існування такої множини F_1 для псевдокомпактної множини E. Залишилось перевірити це у випадку, коли X_1 чи Y_1 є функціонально замкненою множиною в X чи Y відповідно. Нехай X_1 — функціонально замкнена в X. Тоді покладемо $F_1 =$

$= (X_1 \times Y) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} h_n^{-1}(0) \right)$. З властивості ii) випливає, що E міститься в функціонально замкненій множині F_1. Виберемо довільну точку (x, y) з множини F_1. Використавши умову iii) з леми 1, отримаємо

$$|f_n(x, y) - f_n(x, e(x))| = |h_n(x, y) - h_n(x, e(x))| = 0.$$

Таким чином, $f_n(x, y) = f_n(x, e(x))$. Оскільки послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ поточково збігається на E, послідовність $(f_n(x, y))_{n=1}^{\infty}$ також є збіжною, адже $(x, e(x)) \in$ $\in E$.

До функціонально замкненої множини $F = F_1 \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} h_n^{-1}(0) \right)$ у просторі $X \times Y$ і послідовності неперервних функцій h_n застосуємо лему 3 і отримаємо локально скінченне розбиття одиниці $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ на $G = (X \times Y) \setminus F$, яке задовольняє умови a) та b).

Нехай $f_0 \equiv 0$ на $X \times Y$. Розглянемо функцію

$$f(x, y) = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x, y) f_n(x, y), & \text{якщо} \quad (x, y) \in G; \\ \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x, y), & \text{якщо} \quad (x, y) \in F. \end{cases}$$

Оскільки $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ — локально скінченне розбиття одиниці на відкритій множині G і всі функції f_n неперервні, функція f коректно означена і неперервна на множині G. Зауважимо, що $F \subseteq F_1$, а тому послідовність $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ збігається поточково на множині F, а функція f коректно означена на F. Крім того, оскільки $E \subseteq h_n^{-1}(0)$ для кожного n і $E \subseteq F_1$, то $E \subseteq F$ і $f|_E = \lim\limits_{n \to \infty} f_n|_E =$ $= \lim\limits_{n \to \infty} g_n = g$.

Залишилось перевірити, що функція f нарізно неперервна в точках множини F. Нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in F$ і $\varepsilon > 0$. Виберемо таке $n_0 \in \mathbf{N}$, що

$$\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{і} \quad |f_n(p_0) - f(p_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для кожного } n \geq n_0.$$

З умови a) випливає, що множина $W = X \times Y \setminus \left(\bigcup_{n=0}^{n_0} \overline{G}_n \right)$, де $G_n = \operatorname{supp} \varphi_n$, є відкритим околом точки p_0 в $X \times Y$. Візьмемо такий окіл U точки x_0 в X, що $U \times \{y_0\} \subseteq W$. Нехай $x \in U$. Якщо $p = (x, y_0) \in F$, то $h_n(p) = 0$ для кожного $n \in \mathbf{N}$, і згідно з властивістю iii) отримаємо

$$|f_n(p_0) - f_n(p)| = |h_n(p_0) - h_n(p)| = 0,$$

тобто $f_n(p_0) = f_n(p)$. Тому $f(p_0) = f(p)$. Якщо $p \notin F$, то $f(p) =$ $= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(p) f_n(p) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \varphi_n(p) f_n(p)$, адже $p \in W$. Тоді

$$|f(p_0) - f(p)| = \left| \sum_{n=n_0}^{\infty} \varphi_n(p)(f(p_0) - f_n(p_0)) + \sum_{n=n_0}^{\infty} \varphi_n(p) f_n(p_0) - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=n_0}^{\infty} \varphi_n(p) f_n(p) \right| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \varphi_n(p) |f(p_0) - f_n(p_0)| +$$

$$+ \sum_{n=n_0}^{\infty} \varphi_n(p) |f_n(p_0) - f_n(p)| < \sum_{n=n_0}^{\infty} \varphi_n(p) \frac{\varepsilon}{2} +$$

$$+\sum_{n=n_0}^{\infty}\varphi_n(p)\left|h_n(p_0)-h_n(p)\right| = \frac{\varepsilon}{2}+\sum_{n=n_0}^{\infty}\varphi_n(p)\left|h_n(p)\right|.$$

З властивості b) множин G_n випливає, що якщо $\varphi_n(p)\neq 0$, то $|h_n(p)|<1/n$. Отже,

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\varphi_n(p)\left|h_n(p)\right| \le \sum_{n=n_0}^{\infty}\varphi_n(p)\frac{1}{n} \le \frac{1}{n_0}\sum_{n=n_0}^{\infty}\varphi_n(p) = \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким чином, $|f(p_0)-f(p)|<\varepsilon$. Це означає, що f неперервна в точці p_0 відносно змінної x.

Аналогічно перевіряється неперервність f в точці p_0 відносно змінної y. Отже, f є нарізно неперервною.

Теорему доведено.

У випадку, коли $X=Y=X_1=Y_1$, справедлива теорема, яка узагальнює результат з [2].

Теорема 2. *Нехай X — топологічний простір і $g: E\to\mathbf{R}$ — функція першого класу Бера. Тоді існує така нарізно неперервна функція $f: X\times X\to\mathbf{R}$, що $f(x,x)=g(x)$ для кожного $x\in X$.*

4. Перейдемо тепер до розгляду випадку, коли X і Y задовольняють умови типу компактності. Множину E в добутку $X\times Y$ називатимемо *горизонтально і вертикально одноточковою,* якщо для довільних $x\in X$ і $y\in Y$ множини $E\bigcap(\{x\}\times Y)$ і $E\bigcap(X\times\{y\})$ є не більш ніж одноточковими, *горизонтально і вертикально n-точковою,* якщо відповідні множини мають не більше n елементів, і *локально горизонтально і вертикально одноточковою,* якщо для довільних $x\in X$ і $y\in Y$ існують околи U і V точок x і y в X і Y відповідно такі, що множина $E\bigcap(U\times V)$ є горизонтально і вертикально одноточковою в $U\times V$.

Теорема 3. *Нехай X і Y — компакти, E — замкнена горизонтально і вертикально одноточкова множина в $X\times Y$ і $g: E\to\mathbf{R}$ — функція першого класу Бера. Тоді існує нарізно неперервна функція $f: X\times Y\to\mathbf{R}$, для якої $f|_E=g$.*

Доведення. Оскільки множина E горизонтально і вертикально одноточкова, проектування множини E на осі X і Y є неперервними ін'єктивними відображеннями компактної множини E, а отже, є гомеоморфними вкладеннями. Тому множина E є графіком деякого гомеоморфізму $e: X_1\to Y_1$, де X_1 і Y_1 — проекції множини E на X і Y відповідно, і з теореми 1 випливає існування шуканої функції f.

Теорема 4. *Нехай X і Y — локально компактні простори такі, що $X\times Y$ — паракомпакт, E — замкнена локально горизонтально і вертикально одноточкова множина і $g: E\to\mathbf{R}$ — функція першого класу Бера. Тоді існує нарізно неперервна функція $f: X\times Y\to\mathbf{R}$, для якої $f|_E=g$.*

Доведення. Для кожної точки $p=(x,y)\in X\times Y$ виберемо такі відкриті околи U_p і V_p точок x і y в просторах X і Y відповідно, що замикання $X_p=\overline{U}_p$ і $Y_p=\overline{V}_p$ є компактами і множина $E_p=E\bigcap(X_p\times Y_p)$ є горизонтально і вертикально одноточковою. Згідно з теоремою 3 існує нарізно неперервна функція $f_p: X_p\times Y_p\to\mathbf{R}$, для якої $f_p|_{E_p}=g|_{E_p}$. Оскільки простір $X\times Y$ є паракомпактом, існує розбиття одиниці $(\varphi_i: i\in I)$ на $X\times Y$, підпорядковане відкритому покриттю $(W_p=U_p\times V_p: p\in X\times Y)$ простору $X\times Y$ [7, с. 447]. Для кожного $i\in I$ виберемо таке $p_i\in X\times Y$, що $\operatorname{supp}\varphi_i\subseteq W_{p_i}$, і покладемо

$$g_i(x, y) = \begin{cases} f_{p_i}(x, y), & \text{якщо} \quad (x, y) \in W_{p_i}; \\ 0, & \text{якщо} \quad (x, y) \notin W_{p_i}. \end{cases}$$

Зауважимо, що функції $\varphi_i g_i$ є нарізно неперервними на $X \times Y$ і $(\varphi_i g_i)|_E = (\varphi_i|_E) g$. Тоді функція $f = \sum_{i \in I} \varphi_i g_i$ є шуканою.

5. Наведемо приклад, що показує істотність умови вертикальної і горизонтальної одноточковості множини E в теоремі 3, яку навіть у випадку $X = Y = [0, 1]$ послабити не можна.

Нехай $X = Y = [0, 1]$,

$$E_1 = \left\{ \left(\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \right) : k = 1, \ldots, 2^{n-1}, n \in \mathbf{N} \right\}, \qquad E_2 = \{(x, x) : x \in X\},$$

$$E = E_1 \bigcup E_2, \; g : E \to \mathbf{R}, \; g(x) = \begin{cases} 1, & x \in E_1; \\ 0, & x \in E_2. \end{cases}$$

Зрозуміло, що E — замкнена вертикально і горизонтально двоточкова множина в $X \times Y$, а g — функція першого класу Бера. Оскільки множина E_1 є щільною в E, множина $D(g)$ точок розриву функції g збігається з E. Тому проекції множини $D(g)$ на осі X і Y збігаються з X і Y відповідно. З іншого боку, відомо, що для довільної нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbf{R}$ множина $D(f)$ точок розриву функції f належить добутку $A \times B$ деяких множин $A \subseteq X$ та $B \subseteq Y$ першої категорії в X та Y відповідно. Отже, $D(g) \not\subseteq D(f)$, і функція f не може бути продовженням функції g.

1. *Baire R.* Sur les functions de variables reélles // Ann. Mat. Pura Appl., Ser.3. – 1899. – **3**. – P. 1 – 123.
2. *Михайлюк В. В., Собчук О. В.* Функції з діагоналлю скінченного класу Бера // Мат. ст. – 2000. – **14**, № 1. – С. 23 – 28.
3. *Маслюченко В. К., Михайлюк В. В., Собчук О. В.* Побудова нарізно неперервної функції від n змінних з даною діагоналлю // Там же. – 1999. – **12**, № 1. – С. 101 – 107.
4. *Henriksen M.*, *Woods R. G.* Separate versus joint continuity: A tale of four topologies // Top. Appl. – 1999. – **97**, № 1-2. – P. 175 – 205.
5. *Михайлюк В. В.* Топологія нарізної неперервності та одне узагальнення теореми Серпінського // Мат. ст. – 2000. – **14**, №2. – С. 193 – 196.
6. *Rudin W.* Lebesgue first theorem // Mat. Analysis and Appl. Pt B. Edited by Nachbin. in Math. Supplem. Studies 78. – New York: Acad. Press, 1981. – P. 741 – 747.
7. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.

Одержано 08.10.2001