УДК 519.41/47

П. П. Барышовец, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т граждан. авиации)

О КОНЕЧНЫХ A-ГРУППАХ, В КОТОРЫХ ДОПОЛНЯЕМЫ НЕМЕТАЦИКЛИЧЕСКИЕ ПОДГРУППЫ

We study groups G satisfying the following conditions: 1) G is finite a soluble group with abelian Sylow subgroups and nonabelian commutator subgroup; 2) all nonmetacyclic subgroups of G are completed. We give a description of the structure of these groups with nonmetacyclic second commutator subgroup.

Вивчаються групи G, які задовольняють такі умови: 1) G — скінченна розв'язна група з абелевими силовськими підгрупами і неабелевим комутантом; 2) всі неметациклічні підгрупи G доповнювані. Наведено опис будови таких груп з неметациклічним другим комутантом.

1. Метациклической называется любая группа, являющаяся расширением циклической (в частности, единичной) группы с помощью циклической. Конечные неразрешимые группы со свойством дополняемости неметациклических подгрупп описаны в [1]. Конечные группы с абелевыми силовскими подгруппами и абелевым коммутантом, имеющие такое свойство, рассмотрены в [2]. В настоящей работе доказана следующая теорема.

Теорема. *В конечной группе G с абелевыми силовскими подгруппами и неметациклическим вторым коммутантом G'' все неметациклические подгруппы дополняемы тогда и только тогда, когда* $G=((G''\leftthreetimes\langle b\rangle)\times C)\leftthreetimes\langle d\rangle$, *где* $G''=\langle a_1\rangle\times\times\langle a_2\rangle\times\langle a_3\rangle$, $|a_i|=p$, $b^{-1}a_ib=a_i^{k_i}$, $1<k_i<p$, $k_i\neq k_j$ *при* $i\neq j$, $i,j=1,2,3$, $|d|=3$, $|b|=q$, p, q, 3 — *различные простые числа,* $d^{-1}a_1d=a_2$, $d^{-1}a_2d=a_3$, $d^{-1}a_3d=a_1$, $d^{-1}Cd=C$, $\langle b,d\rangle'=\langle b\rangle$, $p\nmid|C|$, C *метациклическая,* $\langle C,d\rangle$ *вполне факторизуемая группа, а* $\langle G'',b,d\rangle$ — *минимальная не вполне факторизуемая группа.*

Пусть G — произвольная неметациклическая группа, имеющая свойство: любая неметациклическая подгруппа из G дополняема в G. Тогда все неметациклические подгруппы и неметациклические фактор-группы G имеют то же свойство. Кроме того, фактор-группа группы G по ее неметациклическому делителю вполне факторизуема.

A-группами называются конечные разрешимые группы с абелевыми силовскими подгруппами [3]. В A-группе G пересечение коммутанта G' с центром $Z(G)$ тривиально, и коммутанты всех ее нормальных подгрупп дополняемы [3].

Ниже рассматриваются только A-группы. В связи с этим силовские p-подгруппы коммутантов H' и H'' будем обозначать через H'_p и H''_p.

Для доказательства теоремы нам потребуются следующие леммы.

Лемма 1. *Если G — A-группа с неабелевым коммутантом и дополняемыми неметациклическими подгруппами, то ее второй коммутант является абелевой нециклической вполне факторизуемой группой.*

Доказательство. Пусть $G\supset G'\supset\ldots\supset G^{(k)}=1$ — ряд коммутантов группы G и $k>2$. Если $1\neq S$ — силовская подгруппа из $G^{(k-1)}$, S^* — ее централизатор в G, то $S^*\lhd G$ и G/S^* имеет разрешимую длину $k-1$ [3] и изоморфна подгруппе группы автоморфизмов группы S. Поэтому S, а значит, и $G^{(k-1)}$ — нециклическая группа. Тогда $G^{(k-1)}$ как коммутант неметациклической группы $G^{(k-2)}$ с дополняемыми неметациклическими подгруппами ввиду леммы 4 [2] является вполне факторизуемой группой. Если $|S|=p^2$, где p

— простое число, то разрешимая группа автоморфизмов группы S порядка, взаимно простого с p, не более чем двуступенно разрешима [3]. Следовательно, $k=3$. Пусть $|S|>p^2$. Тогда S — неметациклическая группа, а G/S — вполне факторизуемая и, значит, двуступенно разрешимая группа. Поэтому и в этом случае $k=3$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть G — А-группа с неабелевым коммутантом и дополняемыми неметациклическими подгруппами. Если K — минимальный нормальный делитель группы G, содержащийся в G'', то $|K|=p^2$ или p^3, где p — простое число. В первом случае $p>3$ и K — силовская p-подгруппа группы G'', во втором K — силовская p-подгруппа группы G, совпадающая с G''.*

Доказательство. Как следует из свойств A-групп [3], $(KV)''=K$, где V — дополнение к G'' в G. Отсюда ввиду леммы 1 получаем, что $|K|=p^{\alpha}$, где p — простое число, $\alpha\geq 2$. Если $|L|>p^3$, где L — силовская p-подгруппа группы G'', то подгруппа индекса p из L дополняема в G и, значит, имеет в L дополнение порядка p, нормальное в LV (см. лемму 3.3 [4]), а значит, и в G. Из полученного противоречия следует, что $|L|\leq p^3$. Если $K\neq L$, то в фактор-группе G/KT, где T — холловская p'-подгруппа из G, второй коммутант $(G/KT)''$ имеет порядок p, что невозможно. Значит, $K=L$.

При $|K|=p^2$ $p>3$ [3, с. 37]. Пусть $|K|=p^3$. Тогда G/K — вполне факторизуемая группа и, значит, $(G/K)''=1$. Отсюда следует, что $K=G''$. Предположим, что K — несиловская подгруппа группы G и G — группа минимального порядка такого рода. Так как G — A-группа, то ее подгруппа Фиттинга $F(G)$ абелева и совпадает со своим централизатором в G [5, с. 277]. Если $F(G)$ — не p-группа, то пусть Q — силовская q-подгруппа группы $F(G)$ по числу $q\neq p$. Тогда $|G/Q|<|G|$ и $|(G/Q)''|=p^3$. Нетрудно убедиться, что $(G/Q)''$ — минимальный нормальный делитель группы G/Q. Получено противоречие с выбором группы G. Значит, $F(G)$ — p-группа. Но тогда $F(G)$ совпадает с силовской p-подгруппой P группы G. Нетрудно убедиться, что P — вполне факторизуемая группа. Так как подгруппы порядка p^3 из P дополняемы в G, то отсюда ввиду леммы 3.3 из [4] следует, что $P=K$. Лемма доказана.

Замечание. Учитывая доказательство теоремы 8.4 из [3], нетрудно убедиться в справедливости более сильного утверждения.

Предложение. *Длина ряда коммутантов разрешимой группы G с метациклическими абелевыми силовскими подгруппами не превышает 3. Если $|G|$ не четен, то эта длина не превышает 2.*

Лемма 3. *Пусть G — конечная группа с неабелевым коммутантом G' и элементарными абелевыми силовскими подгруппами. Если в G дополняемы все неметациклические подгруппы, то $G=(B\times C)\leftthreetimes D$, где D — абелева группа, $B\lhd G$, $C\lhd G$, $C_G(G'')=G''\times C$ и $(BD)'=B$, $B'=G''$.*

Доказательство. В силу леммы 1 G'' — абелева группа. Ее централизатор $H=C_G(G'')$ в группе G нормален в G. По свойству A-групп $G=G''\leftthreetimes K$, где $K\subset G$. Подгруппа $C=K\cap H$ дополняет G'' в H [6, с. 287]. При этом $C\lhd K$ и $[C,G'']=1$. Следовательно, $C\lhd G$ и $H=G''\times C$. Если $G'\cap H=X$, то $X\supset G''$, $X\lhd K$ и X/G'' — абелев нормальный делитель фактор-группы $\overline{G}=G/G''$. Значит, X/G'' дополняем в $\overline{G}$ по теореме 8 из [7] поэтому имеет в подгруппе G'/G'' нормальное дополнение: $G'/G'' = X/G'' \times B/G''$, где $B/G'' \lhd \overline{G}$, $B \subset G$. Тогда $G' = XB$, $X \cap B = G''$, $B \lhd G$. Так как $G'' \subset \subset Z(C_G(G''))$, то X — абелев нормальный делитель группы G.

Подгруппа G'' дополняема в G и, значит, $X = G'' \times L$, где $L \lhd G$. Тогда $G' = B \times L$, причем $L \subset C_G(G'')$ и $C_B(G'') = G''$. Поэтому $G'' = B'$. Если M — системный нормализатор группы G, то по лемме 3.5 из [3] $G = G' \leftthreetimes M$. Группа M, очевидно, вполне факторизуема. Поэтому подгруппа $N = G'H$ дополняема в G подгруппой D из M: $G = G'H \leftthreetimes D$. Далее,

$$G'H = (B \times L)H = BH = B(G'' \times C) = B \times C.$$

Так как $(BD)' \subset B$ и $[B, C] = 1$, то $(BD)' \lhd G$. Если $(BD)' \neq B$, то $1 \neq \neq B/(BD)' \subset Z(G/(BD)') \cap G'/(BD)'$. Противоречие. Значит, $(BD)' = B$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть* $G = A \leftthreetimes B$, *где* A *— минимальный нормальный делитель группы* G *порядка* p^2, p *— простое число, и* $C_B(A) = 1$. *Если* B *— А-группа, то* B *содержит абелеву подгруппу индекса* ≤ 2.

Утверждение леммы следует из результатов о примитивных и импримитивных подгруппах группы $GL(2, p)$ [8].

Лемма 5. *Если в А-группе с неабелевым коммутантом дополняемы все неметациклические подгруппы, то она дисперсивна.*

Доказательство. Пусть G — контрпример к лемме минимального порядка. По лемме 2 [2] холловская $\{2, 3\}$-подгруппа H группы G имеет вид $H = = A \times B \times C$, где $A \simeq A_4$, $B \simeq S_3$ и $|C| = 1$ или 3. В силу леммы 1 G'' — абелева группа, причем ввиду леммы 2 $(|G''|, G) = 1$. Следовательно, G/G'' — не вполне факторизуемая группа, а G'' — метациклическая группа. Если собственная подгруппа K из G'' нормальна в G, то, рассматривая фактор-группу G/K, получаем противоречие с выбором G. Значит, $|G''| = p^2$, где p — простое число, $p > 2$. По свойству A-групп $G = G'' \leftthreetimes (L \leftthreetimes M)$, где $L = (LM)'$. Пусть N — холловская $2'$-подгруппа из L. Так как $G''N \lhd G$ и $G''N \cap A = 1$, то $(G''N)' = 1$ ввиду минимальности нормального делителя G'' в группе G. Значит, $(G''A')' \neq 1$ и потому $(G''A')' = G''$. Тогда $G''A$ — A-группа с неабелевым коммутантом, а это противоречит лемме 4.

Лемма 6. *Пусть* G *— конечная разрешимая группа с неабелевым коммутантом и дополняемыми неметациклическими подгруппами. Если силовские подгруппы у* G *элементарные абелевы, то* G/G'' *— вполне факторизуемая группа.*

Доказательство. Пусть G — контрпример минимального порядка к лемме. Тогда $G = G'' \leftthreetimes (L \leftthreetimes M)$, где G'' — абелева группа, $L = (LM)'$ и $(G''L)' = = G''$. Согласно выбору G G'' — примарная группа. Так как при $|G''| = p^3$ p — простое число, лемма очевидна, то $|G''| = p^2$. Группа L разлагается в прямое произведение минимальных нормальных делителей группы LM. Так как LM — не вполне факторизуемая группа, то хотя бы один из них, скажем, L_1, имеет непростой порядок. Если L_2 — произведение всех остальных, то $G''L_2 \lhd G$. Так как $(G''L_2)' \lhd G$, а при $(G''L_2)' = G''$ фактор-группа $G/G''L_2$ вполне факторизуема, то $(G''L_2)' = 1$. Но тогда $(G''L_1)' = G''$ и согласно выбору G $G''L_1M = G$. Так как L_1M не вполне факторизуемая группа, то она содержит группу Миллера – Морено H с нециклическим коммутантом H'. Очевидно, $H' \subset L_1$ и $H' \lhd L_1 H$. Поскольку $L_1 H \lhd L_1 M$, то $(L_1 H)' \lhd L_1 M$. Значит, $(L_1 H)' = L_1$. Тогда $G = G'' L_1 H$, и поэтому $H' \lhd \lhd L_1 H$ и $H' = L_1$. Значит, $G = G'' H$. Очевидно, $C_H(G'') = 1$, и мы получили противоречие с леммой 4, так как ввиду непростоты $|H'| \ |H/H'| \neq 2$. Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы. *Необходимость.* Нетрудно убедиться, используя леммы 1 и 2, что G'' — силовская подгруппа группы G, являющаяся ее минимальным нормальным делителем, причем $|G''| = p^3$, где p — некоторое простое число. Обозначим $G'' = K$.

По лемме 3 $G = (B \times C) \leftthreetimes D$, где B и C — нормальные подгруппы группы G, причем $G' \supseteq B \supset G'' = K$, C — дополнение к G'' в $C_G(G'')$. Рассмотрим подгруппу $A = B \leftthreetimes D$. Пусть Γ — дополнение к K в A. Подгруппу Γ можно отождествить с подгруппой группы $GL(3, p)$. Так как K — минимальный нормальный делитель группы G, то Γ — неприводимая подгруппа из $GL(3, p)$. Ввиду леммы 6 Γ — вполне факторизуемая группа.

Покажем, что $A = K \leftthreetimes (N \leftthreetimes \langle d \rangle)$, где KN — вполне факторизуемая, N — абелева группа и $|d| = 3$. Возможны два предположения.

а) Γ — примитивная подгруппа группы $GL(3, p)$. Пусть H — максимальная абелева нормальная подгруппа из Γ (подгруппа Фиттинга группы Γ). Тогда ввиду леммы 8 и следствия теоремы 2 [8] подгруппу Γ можно включить в такую содержащую ее подгруппу θ, максимальный абелев нормальный делитель которой E содержит H, причем индекс централизатора V подгруппы E в группе θ не превышает числа 3, т. е. $[\theta : V] \leq 3$. Так как H совпадает со своим централизатором в группе Γ, то отсюда следует, что $[\Gamma : H] \leq 3$. Поскольку Γ — неабелева группа, то $\Gamma \neq H$. Подгруппа KH дополняема в G, поэтому $\Gamma = H \leftthreetimes \langle d \rangle$, $1 < |d| \leq 3$. Подгруппа H ввиду леммы 7 из [8] и цикличности мультипликативной группы конечного поля циклична.

Покажем, что KH — вполне факторизуемая группа. Действительно, H — циклическая вполне факторизуемая группа. Если $\langle x \rangle$ — силовская подгруппа из H, то $\langle K, x \rangle \lhd A$ и $\langle K, x \rangle' \lhd A$. Так как $C_A(K) = K$, то $\langle K, x \rangle' = K$. Отсюда следует, что если $|x| = q$, то показатель числа p по модулю q равен 3 или 1. Предположим сначала, что показатель p по модулю q равен 3, а показатель p по модулю r равен 1, где $r = |x_1|$, $\langle x_1 \rangle$ — другая силовская подгруппа из H. Тогда дополнение неметациклической подгруппы с коммутантом порядка p^2 из $\langle K, x_1 \rangle$ в группе $I = \langle K, x, x_1 \rangle$ содержало бы группу порядка pq, причем абелеву. Так как последняя содержится в силовской $\{p, q\}$-подгруппе группы I, то получили противоречие. Из него следует, что если KH — не вполне факторизуемая группа, то показатель числа p по любому простому числу $q \mid |H|$ равен 3. Так как $A'' \neq 1$, то для некоторой подгруппы $\langle y \rangle$ порядка q из H группа $R = K\langle y, d \rangle$ порядка $p^3 q |b|$ имеет коммутант R' порядка $p^3 q$. Очевидно, R' — группа Фробениуса; R не является группой Фробениуса с нормальным множителем $R'' = K$. Значит, d действует на K не регулярно [5, с. 494]. Так как $GF(p^3)$ не содержит подполей, отличных от себя и $GF(p)$, то $|C_K(\langle d \rangle)| = p$. Но тогда подгруппа $\langle K, d \rangle$ содержит неметациклическую подгруппу порядка $|d| p^2$, дополняемую в R. Отсюда следует существование в

R абелевой подгруппы порядка pq. Так как она содержится в холловской $\{p, q\}$-подгруппе группы R, являющейся группой Миллера – Морено, то из полученного противоречия следует, что группа KH вполне факторизуема.

Пусть K_1 — подгруппа порядка p из K, нормальная в KH. Тогда индекс ее нормализатора в группе Γ равен $|d|$. Поскольку K_1 содержится в минимальном нормальном делителе группы A, имеющем порядок p^3, то $|d| = 3$. Обозначим $H = N$.

б) Γ — импримитивная подгруппа группы $GL(3, p)$, т. е. $K = K_1 \times K_2 \times K_3$, $|K_i| = p$ и для любого элемента $g \in \Gamma$ подгруппа $g^{-1}K_ig$ совпадает с K_j, $i, j = 1, 2, 3$. Пусть $N_i = N_A(K_i)$. Предположим, что $N_1 \neq N_2$. Так как каждая из подгрупп K_i имеет в A не более трех сопряженных, то $[A : N_i] \leq 3$. В частности, N_i — максимальная подгруппа в A. Значит, $A = \langle N_1, N_2 \rangle$. Но тогда для любого $h \in A$ $h^{-1}K_1h = K_1$ или $h^{-1}K_1h = K_2$, т. е. подгруппа K_1 имеет в A две сопряженные подгруппы: саму себя и K_2. В таком случае $\langle K_1, K_2 \rangle = K_1 \times K_2 \lhd A$. Противоречие. Значит, $N_1 = N_2 = N_3 = \overline{N}$. Так как подгруппы N_i составляют в A класс сопряженных подгрупп, то $\overline{N} \lhd A$. Поскольку подгруппа K_1 не может иметь в A двух сопряженных, то $[A : \overline{N}] = 3$. Пусть $N = \overline{N} \cap \Gamma$. Если $C_i = C_N(K_i)$, то ввиду абелевости групп автоморфизмов циклических групп порядка p группы N / C_i абелевы. Значит, $N' \subset C_i$. Но тогда $N' \subset W = C_1 \cap C_2 \cap C_3$. Так как $W = 1$, то N — абелева группа. Подгруппа KN дополняема в A. Отсюда следует, что $A = K \leftthreetimes \Gamma = K \leftthreetimes (N \leftthreetimes \langle d \rangle)$, где $|d| = 3$.

Покажем, что $|N| = q$, где q — простое число, отличное от p и 3. Пусть A — контрпример минимального порядка к этому утверждению. Так как $N\langle d \rangle$ — вполне факторизуемая группа, то подгруппа N разлагается в прямое произведение подгрупп простых порядков, нормальных в $N\langle d \rangle$. Отсюда согласно выбору A следует $N = \langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle$, $\langle b_1, d \rangle' = \langle b_1 \rangle$, $d^{-1}\langle b_2 \rangle d = \langle b_2 \rangle$ и $|b_1| = q_1$, $|b_2| = q_2$. Числа p, q_1, q_2, 3 простые, причем p, q_1 и 3 попарно различные, $q_2 \neq p$. Так как $\langle K, b_2 \rangle \lhd A$, то $\langle K, b_2 \rangle' = K$. Пусть X — подгруппа порядка $p^2 q_2$ из $K\langle b_2 \rangle$. Очевидно, $|X'| = p^2$ и X — неметациклическая группа. Пусть F — ее дополнение в A. Тогда подгруппа $F_1 = F \cap K \lhd F$ и, значит, $F_1 \lhd KF = M$, где M — подгруппа индекса q_2 в A. По теореме Машке [5, с. 122] $K = F_1 \times F_2$, где $F_2 \lhd M$, $|F_2| = p^2$, $|F_1| = p$. Если $M'' \neq 1$, то ввиду леммы 1 $(M / F_1)'' \neq 1$, причем $M / F_1 \simeq F_2 M_{p'}$, где $M_{p'}$ — подгруппа порядка $3q_1$ из M. Так как $q_1 \neq 2$, то получили противоречие с леммой 4. Значит, $M'' = 1$. Пусть $T = M_{p'}$. Если T — неабелева группа, то в силу соотношения $C_A(K) = K$ в группе $KT \subseteq M$ коммутант неабелев. Значит, $T' = 1$. Тогда, очевидно, $\langle b_1 \rangle$ не является силовской подгруппой группы A. Так как $q_1 \neq 3$, то $q_1 = q_2 \neq 3$. Значит, $|A| = p^3 q^2 3$, где p, q, 3 — различные простые числа. Далее, $A / \langle K, b_2 \rangle \simeq \langle b_1, d \rangle$ — неабелева группа. С другой стороны, $A / \langle K, b_2 \rangle = \langle K, b_2 \rangle KF / \langle K, b_2 \rangle \simeq KF / KF \cap K\langle b_2 \rangle$ — абелева группа, так как группа порядка $3q$ в KF абелева, а $KF \cap K\langle b_2 \rangle \supset K$. Из полученного противоречия следует, что N — циклическая группа простого порядка q.

Таким образом, $G = ((G'' \leftthreetimes \langle b \rangle) \times C) \leftthreetimes \langle d \rangle$, где $G'' = K$, $|b| = q$, $|d| = 3$, p, q, 3 — различные простые числа. Так как G'' — силовская p-подгруппа группы G, то $p \nmid |C|$. Фактор-группа G/C не вполне факторизуема, поэтому C — метациклическая группа. Группа $\langle C, d \rangle$ вполне факторизуема. Остальные соотношения следуют из леммы 7 [9] и ее доказательства. Конечные минимальные не вполне факторизуемые группы описаны в [10]. Необходимость доказана.

Достаточность. Абелевость силовских подгрупп группы G очевидна. Пусть S — подгруппа из G. Рассмотрим следующие случаи.

а) $S \not\subset \langle G'', b, C \rangle = H$. Тогда $G = SH$ и из полной факторизуемости группы H следует дополняемость S в G.

б) $S \supseteq G'$. Тогда $S\langle b, C, d \rangle = G$. Так как $\langle b, C, d \rangle$ — вполне факторизуемая группа, то подгруппа S дополняема в G.

в) $S \cap G'' = 1$. Тогда подгруппа SG'', а значит, и S, дополняемы в G.

г) $S \subset H$, $|S \cap G''| = p$ или p^2. Если $S_q \not\subset C$, то $SG''C\langle d \rangle = G$. Так как $G''C\langle d \rangle$ — вполне факторизуемая группа, то отсюда следует дополняемость S в G. Пусть $S_q \subset C$. Очевидно, силовская 3-подгруппа S_3 группы S содержится в C и, значит, $S \subset K \times C$. Тогда S — метациклическая группа. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть G — конечная разрешимая не вполне факторизуемая неметациклическая группа с дополняемыми неметациклическими подгруппами. Если силовские подгруппы группы G элементарные абелевы, то ее порядок не делится на* 4-ю *степень никакого простого числа.*

Доказательство. Пусть G — контрпример к следствию минимального порядка. Тогда $|G| = p^4 n$, где $(p, n) = 1$, p — простое число. Если $\overline{K}$ — нормальный делитель группы G, фактор-группа по которому не вполне факторизуема, то

$$|\overline{K}| \,\vdots\, p. \tag{1}$$

Покажем, что

$$P \ntriangleleft G, \tag{2}$$

где P — силовская p-подгруппа группы G. В самом деле, в противном случае $G = P \leftthreetimes N$, где N — вполне факторизуемая группа и P разлагается в произведение подгрупп порядка p, нормальных в G. Тогда по теореме 3.1 из [11] G — вполне факторизуемая группа. Из полученного противоречия следует (2).

а) G' — абелева группа. С учетом свойства A-групп $G = G' \leftthreetimes M$, где $M \subset G$, причем ввиду теоремы 8 [7] G' разлагается в прямое произведение $G' = K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_n$ минимальных нормальных делителей группы G. Поскольку G не вполне факторизуема, то хотя бы одна из них, скажем, K_1, имеет непростой порядок. Обозначим $K = K_1$. Группа KM — не вполне факторизуема, поэтому K_i, $i = 2, 3, \ldots, n$, — p-группы или единичные группы. Ввиду (2) $|K| = q^\alpha$, q — простое число, $q \neq p$, $\alpha \geq 2$. Из леммы 3.3 из [4] следует, что подгруппы простого индекса из K недополняемы в G. Поэтому $\alpha = 2$ или 3. Пусть $x \in M$, $\langle K, x \rangle$ — не вполне факторизуемая группа. Тогда согласно результатам [10] $\langle K, x \rangle$ содержит группу Миллера – Морено H с нециклическим коммутантом H'. Очевидно, $H' \subset K$, $\langle K, x \rangle \lhd G_1$, где $G_1 = K_1 M$. Далее, $H' \lhd$

$\lhd \langle K, x\rangle$ и, значит, ввиду соотношения $|K/H'| = 1$ или q, $\langle K, x\rangle / H'$ — абелева группа. Тогда $H' = \langle K, x\rangle' \lhd G_1$. Но подгруппа K является минимальным нормальным делителем и в группе G_1. Значит, $K \supset H'$. Согласно выбору G $KHP = HP = G$. Если KP — не вполне факторизуемая группа, то $G = KP = HP$ и ввиду леммы 5.3 из [4] имеет центр Z порядка p^3. Фактор-группа G/Z вполне факторизуема. Так как $G/Z \simeq H$, то из полученного противоречия следует, что KP — вполне факторизуемая группа. Тогда $|G| = q^{\alpha} p^4 t$, где $t = |H/H'|$. Пусть Y — дополнение к подгруппе индекса q из KP. Тогда $|Y| = qt$ и ввиду соотношения $p / q-1$ — абелева группа. Так как Y содержится в подгруппе, сопряженной с H, то получено противоречие. Следовательно, $p^4 \nmid |G|$.

б) G' — неабелева группа. Если G'' — непримарная группа и $q \mid |G''|$, $q \neq \neq p$, то, переходя к фактор-группе G/D, где D — силовская q-подгруппа (абелевой) группы G'', получаем противоречие с выбором группы G. Следовательно, G'' — примарная группа. Ввиду леммы 5 группа G имеет нормальную силовскую подгруппу Q по числу q. В силу (2) $q \neq p$. Если $(|G''|, q) = 1$, то G/R имеет неабелев коммутант и $p^4 \mid |G/R|$. Противоречие. Значит, G'' — q-группа. Если K — минимальный нормальный делитель группы G', содержащийся в G'', то при $K \neq G''$ рассматриваем фактор-группу G/K и получаем противоречие с выбором G. Отсюда, из леммы 2 и доказанной выше теоремы получаем $|G''| = |K| = q^2$. Если $Q \neq K$, то по теореме Машке [5, с. 122] $Q = K \times Q_1$, где $Q_1 \lhd G$. Тогда, переходя к фактор-группе G/Q_1, снова получаем противоречие с выбором G. Следовательно, $Q = K$.

Пусть H — минимальная не вполне факторизуемая подгруппа из G [10]. Если H — группа Миллера – Морено с нециклическим коммутантом H', то ввиду леммы 6 $H' = K$. Если $|H/H'| = t$, то согласно выбору G $t \neq p$ и холловская $\{p, q, t\}$-подгруппа из G совпадает с G. По той же причине ввиду дисперсивности G (см. лемму 5) и полной факторизуемости фактор-группы G/G'' (лемма 6) $|G| = q^2 p^4 t$. Подгруппа KP, где P — силовская p-подгруппа из G, вполне факторизуема, в противном случае $KP = G$ вопреки условию $G'' \neq 1$. Если D — дополнение к подгруппе индекса q из KP в G, то $|D| = qt$ и D ввиду соотношения $t \nmid q-1$ — абелева группа. Так как D содержится в подгруппе, сопряженной с H, то получено противоречие. Значит, H не является группой Миллера – Морено.

Пусть H — группа с неабелевым коммутантом. Тогда $|H| = 2q^2 r$, где $r \neq \neq q$, $r \neq 2$, r — простое число. Если $p \nmid |H|$, то холловская $\{p, q\}$-подгруппа B из G вполне факторизуема ввиду выбора G и подгруппа индекса q из B имеет дополнение S в G. Тогда силовская q-подгруппа S_q из S порядка q нормальна в S и, значит, $S_q \lhd KS$, а KS содержит подгруппу, сопряженную с H. Противоречие, так как H_q — минимальный нормальный делитель в H. Значит, $p / |H|$, $p = r$ (или $p = 2$). Так как G дисперсивна, а G/K вполне факторизуема, то согласно выбору G $|G| = 2q^2 p^4$ (или $|G| = 2^4 q^2 r$). При этом $G = K \leftthreetimes (N \leftthreetimes \langle d\rangle)$, где N — абелева группа порядка p^4 (или $2^3 r$), а $|d| = 2$. Далее, $C_G(K) = K \times A$, где $A \lhd G$ и ввиду (1) A — p-группа. Из полной факторизуемости группы G' (из разложения $GL(2, p) = SL(2, p) \leftthreetimes \langle h\rangle$) [12, с. 8] при $p = r$ $(p = 2)$ следует, что $|A| \geq p^2$. При $|A| = p^3$ группа G/A вполне факторизуема, что невозможно. Значит, $|A| = p^2$. Очевидно, $A \subset N \leftthreetimes \langle d \rangle$. Если $p = r$, то $A \subset N$ как нормальная p-группа в силовской p-подгруппе из G. Если же $p = 2$, то и A, и силовская r-подгруппа F_r нормальны в группе $F = \langle N, d \rangle$. Значит, $A \subset C_F(F_r) = N$. Так как F — вполне факторизуемая группа, то $N = A \times \langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle$, где $\langle b_1 \rangle \triangleleft F$, $\langle b_2 \rangle \triangleleft F$. Обозначим $\langle b_1, b_2 \rangle = N_1$. Если $p = 2$ и $|b_1| = r$, то, очевидно, $\langle N_1, d \rangle / \langle b_1 \rangle$ — абелева группа. Пусть $\langle b_1 \rangle$ и $\langle b_2 \rangle$ не являются силовскими подгруппами из N. Тогда $\langle A, b_i \rangle = B_i$ — неметациклические группы индекса $2qr$ в G, $i = 1, 2$. Пусть X — дополнение подгруппы B_i в G. Если $K_1 = K \cap X$, то $K_1 \triangleleft X$ и по теореме Машке [5, с. 122] $K = K_1 \times K_2$, где K_2 — подгруппа порядка q; нормальная относительно X_1-подгруппы порядка $2r$ из X. Так как $KX / C_{KX}(K_1)$ и $KX / C_{KX}(K_2)$ — абелевы группы, то $KX / C_{KX}(K)$ абелева группа. Поскольку $C_{KX}(K) = K$, то $KX / K \simeq X_1$ — абелева группа порядка $2r$. Тогда из равенства $G = XB_i = X(KB_i)$ получаем, что $G / KB_i = X(KB_i) / KB_i \simeq X / X \cap KB_i$ — абелева группа. Значит, $G / KB_1 \cap KB_2$ — тоже абелева группа. Так как $KB_1 \cap KB_2 = KA$ и $H \cap KA = H''$, то получено противоречие. Следовательно, рассматриваемый случай также невозможен и $p^4 \nmid |G|$. Следствие доказано.

1. *Барышовец П. П.* Конечные неразрешимые группы с дополняемыми неметациклическими подгруппами // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 4. – С. 597–551.
2. *Барышовец П. П.* О конечных A-группах, в которых все неметациклические подгруппы дополняемы // Там же – 1988. – **40**, № 3. – С. 297–302.
3. *Taunt D.* On A-groups // Proc. Cambr. Ph. Soc. – 1949. – **45**, № 1. – P. 24–42.
4. *Барышовец П. П.* Конечные неабелевы группы, в которых дополняемы коммутанты всех собственных подгрупп // Группы с заданными свойствами подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1973. – С. 15–77.
5. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. – Berlin etc.: Springer, 1967. – 793 s.
6. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
7. *Gaschütz W.* Zur Erweiterungs theorie endlicher Gruppen // J. reine u. angew. Math. –1952. – **190**. – S. 93–107.
8. *Супруненко Д. А.* Разрешимые и нильпотентные линейные группы. – Минск. – Изд-во Белорус. ун-та, 1958. – 97 с.
9. *Алексеева Э. С.* Конечные непримарно факторизуемые группы // Группы с системами дополняемых подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1972. – С. 147–179.
10. *Маланьина Г. А., Хлебутина В. И., Шевцов Г. С.* Конечные минимальные не вполне факторизуемые группы // Мат. заметки. – 1972. – **12**, № 2. – С. 157–162.
11. *Черникова Н. В.* К основной теореме о вполне факторизуемых группах // Группы с системами дополняемых подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1972. – С. 49–58.
12. *Белоногов В. А., Фомин А. Н.* Матричные представления в теории конечных групп. – М.: Наука, 1976. – 128 с.

Получено 22.09.93