УДК 519.21

В. Л. Гірко, д-р фіз.-мат. наук (Київ. ун-т)

КАНОНІЧНЕ СПЕКТРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ДЛЯ ЕМПІРИЧНИХ КОВАРІАЦІЙНИХ МАТРИЦЬ

With general assumptions, a canonical equation for the entries of empirical covariance matrices is found.

За загальних умов одержано канонічне рівняння для елементів емпіричних коваріаційних матриць.

Нехай вектори $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ розмірності m_n — вибірка незалежних спостережень, $\vec{x}_k = R_{m_n}^{1/2} \vec{\nu}_k + \vec{a}$; $k = 1, \ldots, n$, R_{m_n} — коваріаційна матриця, $\vec{a}$ — математичне сподівання вектора $\vec{x}_k$, $\vec{\nu}_k^T = \{\nu_{ik}, i = 1, \ldots, m_n\}$; $\mathbf{E}\vec{\nu}_k \vec{\nu}_k^T = I$, $\mathbf{E}\vec{\nu}_k = 0$, $\lambda_1(R_{m_n}) \leq \ldots \leq \lambda_{m_n}(R_{m_n})$, $\vec{u}_i$, $i = 1, \ldots, m_n$, — власні числа і відповідні власні вектори коваріаційної матриці R_{m_n},

$$\hat{R}_{m_n} = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \left(\vec{x}_k - \hat{\vec{a}}\right)\left(\vec{x}_k - \hat{\vec{a}}\right)^T$$

— емпірична коваріаційна матриця,

$$\hat{\vec{a}} = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \vec{x}_k; \qquad \mu_{m_n}(x, R_{m_n}) = m_n^{-1} \sum_{p=1}^{m_n} \chi\left(\lambda_p(R_{m_n}) < x\right)$$

— так звана нормалізована спектральна функція матриці R_{m_n}, де χ — індикатор випадкової події.

Дослідження асимптотичної поведінки розподілів нормалізованих спектральних функцій є важливою проблемою у багатовимірному статистичному аналізі [1–6]. У цій статті одержано так зване канонічне спектральне рівняння для перетворень Стільтьєса нормалізованих спектральних функцій $\mu_{m_n}\left(x, \hat{R}_{m_n}\right)$.

Будемо позначати символом „$\approx$" рівність розподілів величин, векторів і матриць. Будемо використовувати позначення $Q \geq 0$ для невід'ємно означених дійсних матриць Q. Символ ε_n у різних формулах означає деякі величини, що прямують до нуля при $n \to \infty$. З метою спрощення формул індекс n в деяких виразах будемо опускати і, наприклад, замість $\mu_{m_n}\left(x, R_{m_n}\right)$; m_n будемо писати $\mu_{m_n}(x)$; m, константи будено позначати символом c. Під виразом „$:=$" будемо розуміти рівність за означенням.

Розглянемо перетворення Стільтьєса

$$b(z) = m_n^{-1} \operatorname{Tr}\left[\hat{R}_{m_n} - zI_{m_n}\right]^{-1} = \int_0^\infty \frac{d\mu_{m_n}(x, \hat{R}_{m_n})}{x - z}, \qquad z = t + is, \quad s > 0,$$

і канонічне спектральне рівняння

$$C(z) = \left\{-zI_m + R_{m_n}^{1/2}\left[\delta_{ij} n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E} \frac{\nu_{ik}^2}{1 + n^{-1}\sum_{p=1}^{m_n} \nu_{pk}^2 \left[R^{1/2} C(z) R^{1/2}\right]_{pp}}\right] R_{m_n}^{1/2}\right\}^{-1},$$

© В. Л. ГІРКО, 1995

де I_m — одинична матриця, $s>0$, δ_{ij} — символ Кронекера і $r_{qp}^{(1/2)}$ — елементи матриці $R_{m_n}^{1/2}$, $C(z) = \left(c_{pl}(z)\right)_{p,\,l=1}^{m_n}$.

Нехай виконуються такі умови:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_n}{n} = \gamma, \quad 0<\gamma<\infty, \tag{1}$$

для кожної симетричної дійсної матриці $C_{m_n} = \left(c_{pl}\right)_{p,\,l=1}^{m_n}$, модулі власних чисел якої обмежені деякою константою,

$$\lim_{n,m\to\infty} n^{-1}\mathbf{E}\left|\vec{\nu}_k^T C_{m_n}\vec{\nu}_k - \sum_{p=1}^{m_n}\nu_{pk}^2 c_{pp}\right| = 0, \quad k=1,\ldots,m_n; \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{m_n}{n} < \infty; \tag{2}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \max_{k=1,\ldots,n}\ \max_{p,l=1,\ldots,m_n} \mathbf{E}\nu_{pk}^2\nu_{lk}^2 < \infty; \tag{3}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \max_{k=1,\ldots,m_n} \sum_{p=1}^{m_n}\left[\left|r_{pk}^{(1/2)}\right| + \left|r_{pk}^{(-1/2)}\right|\right] < \infty, \tag{4}$$

де $r_{pk}^{(p)}$ — елементи матриці $R_{m_n}^p$, $p=1/2,-1/2$;

$$0 < c_1 \le \lambda_1\left(R_{m_n}\right) \le \ldots \le \lambda_{m_n}\left(R_{m_n}\right) \le c_2 < \infty. \tag{5}$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (1)–(5). *Тоді для майже всіх* x

$$p\lim_{n\to\infty}\left|\mu_n\left(x,\hat{R}_{m_n}\right) - F_n(x)\right| = 0, \tag{6}$$

де $F_n(x)$ — *функція розподілу, перетворення Стільтьєса якої дорівнює*

$$\int_0^\infty (x-z)^{-1}\,dF_n(x) = m_n^{-1}\operatorname{Tr}C(z) = m_n^{-1}\sum_{p=1}^{m_n}c_{pp}(z), \quad z=t+is, \; s\ne 0,$$

і матриця $C(z) = \left\{c_{pl}(z)\right\}_{p,l=1,\ldots,m_n}$ *є розв'язком канонічого спектрального рівняння. Розв'язок* $C(z) = \left\{c_{pl}(z)\right\}_{p,l=1,\ldots,m_n}$ *канонічного спектрального рівняння існує і єдиний у класі матриць-функцій*

$$L = \left\{C(z)\colon\ \operatorname{Re}C(z) > 0;\ \operatorname{Im}C(z) > 0,\ \operatorname{Re}z < 0,\ \operatorname{Im}z > 0\right\},$$

$$c_{pl}(z) = \int (u-z)^{-1}\,d\nu_{pl}(u),$$

де $\nu_{pl}(u)$ — *деякі функції обмеженої варіації.*

Доведення. Очевидно,

$$\hat{R}_{m_n} = \tilde{R}_{m_n} - \left(\hat{\vec{a}} - \vec{a}\right)\left(\hat{\vec{a}} - \vec{a}\right)^T; \qquad \tilde{R}_{m_n} = n^{-1}\sum_{k=1}^{n}(\vec{x}_k - \vec{a})(\vec{x}_k - \vec{a})^T. \tag{7}$$

Позначимо $M = \left(\hat{R}_{m_n} - zI_{m_n}\right)^{-1}$; $G = \left(\tilde{R}_{m_n} - zI_{m_n}\right)^{-1}$, $z=t+is$, $s>0$.

Лема 1. *Для кожного* $s>0$ $\left|\operatorname{Tr}M - \operatorname{Tr}G\right| \le s^{-1}$

Доведення. Використовуючи формулу

$$\operatorname{Tr}\left(A+\bar{x}\bar{x}^T-zI_{m_n}\right)^{-1}-\operatorname{Tr}\left(A-zI_{m_n}\right)^{-1}=-\frac{\partial}{\partial z}\ln\left[1+\bar{x}^T(A-zI_{m_n})^{-1}\bar{x}\right], \qquad (8)$$

де A — невід'ємно означена матриця порядку m_n, $\vec{x}$ — вектор розмірності m_n, і рівність (7), маємо

$$|\operatorname{Tr}M-\operatorname{Tr}G|\le\left|\frac{\left(\hat{\bar{a}}-\bar{a}\right)^T M^2\left(\hat{\bar{a}}-\bar{a}\right)}{1+\left(\hat{\bar{a}}-\bar{a}\right)^T M\left(\hat{\bar{a}}-\bar{a}\right)}\right|\le s^{-1}. \qquad (9)$$

Лему 1 доведено.

Розглянемо матриці $\Xi=\left(\xi_{pl}\right)_{p=1,\ldots,m_n;\,l=1,\ldots,n}$, де випадкові величини $\xi_{pl}=n^{-1/2}\nu_{pl}\eta_{pl}$ і η_{pl}, $p,l=1,2,\ldots$, незалежні, не залежать від величин ν_{pl}, $p,l=1,2,\ldots$, і $\mathbf{E}\eta_{pl}=0$, $\mathbf{E}\eta_{pl}^2=1$, $\mathbf{E}\eta_{pl}^4\le c$, $p,l=1,2,\ldots$.

Лема 2. *Нехай виконуються умови* (1)–(3). *Тоді*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\left|m^{-1}\operatorname{Tr}\left[-zI_m+\tilde{R}_{m_n}\right]^{-1}-m^{-1}\operatorname{Tr}\left[-zI_m+n^{-1}R_{m_n}^{1/2}\,\Xi\Xi^T R_{m_n}^{1/2}\right]^{-1}\right|=0.$$

Доведення. Розглянемо матриці

$$H_k=\left[\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_k,\bar{\bar{x}}_{k+1},\ldots,\bar{\bar{x}}_n\right];\quad \bar{\bar{x}}_k=\bar{x}_k-\bar{a}_k,\quad \bar{y}_k=R_{m_n}^{1/2}\left(\xi_{pk},p=1,\ldots,m\right)^T,$$

$$H_0=\left[\bar{\bar{x}}_1,\ldots,\bar{\bar{x}}_n\right];\quad H_n=\left[\bar{y}_1\ldots,\bar{y}_n\right];\quad D_{(k)}=\left(-zI_m+n^{-1}H_kH_k^T-n^{-1}\bar{\bar{x}}_{k+1}\bar{\bar{x}}_{k+1}^T\right)^{-1}.$$

Тоді, використовуючи (8), маємо

$$\beta_n:=\mathbf{E}\left|m^{-1}\operatorname{Tr}\left[-zI_m+\tilde{R}_{m_n}\right]^{-1}-m^{-1}\operatorname{Tr}\left[-zI_m+n^{-1}R_{m_n}^{1/2}\Xi\Xi^TR_{m_n}^{1/2}\right]^{-1}\right|\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}\left|m^{-1}\operatorname{Tr}\left[-zI_m+n^{-1}H_kH_k^T\right]^{-1}-m^{-1}\operatorname{Tr}\left[-zI_m+n^{-1}H_{k+1}H_{k+1}^T\right]^{-1}\right|=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}\left|m^{-1}\frac{\partial}{\partial z}\ln\frac{\left[1+n^{-1}\bar{\bar{x}}_{k+1}^TD_{(k)}\bar{\bar{x}}_{k+1}\right]}{\left[1+n^{-1}\bar{y}_{k+1}^TD_{(k)}\bar{y}_{k+1}\right]}\right|\le\frac{n}{m}\max_{k=0,\cdots,n-1}\mathbf{E}\tau_k,$$

де

$$\tau_k=\left|\frac{n^{-1}\bar{y}_{k+1}^TD_{(k)}^2\bar{y}_{k+1}}{1+n^{-1}\bar{y}_{k+1}^TD_{(k)}\bar{y}_{k+1}}-\frac{n^{-1}\bar{\bar{x}}_{k+1}^TD_{(k)}^2\bar{\bar{x}}_{k+1}}{1+n^{-1}\bar{\bar{x}}_{k+1}^TD_{(k)}\bar{\bar{x}}_{k+1}}\right|.$$

Легко перевірити, що $\tau_k\le 2s^{-1}$ (див. (9)) і за умови (2)

$$p\lim_{n\to\infty}n^{-1}\left[\bar{\bar{x}}_{k+1}^TD_{(k)}^2\bar{\bar{x}}_{k+1}-\sum_{p=1}^{m_n}\nu_{pk}^2\left(R^{1/2}D_{(k)}^2R^{1/2}\right)_{pp}\right]=0,$$

$$p\lim_{n\to\infty}n^{-1}\left[\bar{\bar{x}}_{k+1}^TD_{(k)}\bar{\bar{x}}_{k+1}-\sum_{p=1}^{m_n}\nu_{pk}^2\left(R^{1/2}D_{(k)}R^{1/2}\right)_{pp}\right]=0.$$

Крім того, використовуючи (3) і (5), маємо

$$n^{-2}\,\mathbf{E}\left|\,\vec{y}_{k+1}^{T} D_{(k)}^{i}\,\vec{y}_{k+1}-\sum_{p=1}^{m_n}\nu_{pk}^{2}\,\eta_{pk}^{2}\left(R^{1/2} D_{(k)}^{i} R^{1/2}\right)_{pp}\right|^{2} \le$$

$$\le\; n^{-2}\sum_{p,\,l=1}^{m_n}\mathbf{E}\nu_{pk}^{2}\nu_{lk}^{2}\left|\,R^{1/2} D_{(k)}^{i} R^{1/2}\,\right|_{pl}^{2} \le \frac{c}{s^{2}n},$$

$$n^{-2}\mathbf{E}\left|\,\sum_{p=1}^{m_n}\nu_{pk}^{2}\left[\eta_{pk}^{2}-1\right]\left(R^{1/2}D_{(k)}^{i}R^{1/2}\right)_{pp}\right|^{2} \le$$

$$\le\; n^{-2}\sum_{p=1}^{m_n}\mathbf{E}\nu_{pk}^{2}\nu_{lk}^{2}\left|\left(R^{1/2}D_{(k)}^{i}R^{1/2}\right)_{pp}\right|^{2} \le \frac{c}{s^{2}n};\quad i=1,2.$$

Тому $p\lim_{n\to\infty}\tau_k=0$. Отже,

$$\lim_{n\to\infty} nm^{-1}\max_{k=0,\dots,\,n-1}\mathbf{E}\tau_k=0.$$

Це завершує доведення леми 2.

Лемма 3. *Якщо виконується умова* (1), *то*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\left|\,b(z)-n^{-1}\,\mathbf{E}\,\mathrm{Tr}\,R_{m_n}^{-1}\,Q(z)\,\right| = 0, \tag{10}$$

де $Q(z)=\left[-zR_{m_n}^{-1}+n^{-1}\,\Xi\Xi^{T}\right]^{-1}$.

Доведення. Розглянемо основну рівність

$$\mathrm{Tr}\,R_{m_n}^{-1}\,Q(z)-\mathbf{E}\,\mathrm{Tr}\,R_{m_n}^{-1}\,Q(z) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1}\left\{\mathbf{E}_k R_{m_n}^{-1}\,Q(z)-\mathbf{E}_{k+1}\,R_{m_n}^{-1}\,Q(z)\right\},$$

де символ $\mathbf{E}_k$ означає умовне математичне сподівання за умови, що вектори $\vec{x}_p$, $p=k+1,\dots,n$, фіксовані. Тому, використовуючи (8) і (9), маємо

$$\mathbf{E}\left|\,\mathrm{Tr}\,R_{m_n}^{-1}\,Q(z)-\mathbf{E}\,\mathrm{Tr}\,R_{m_n}^{-1}\,Q(z)\,\right|^{2} \;=$$

$$=\;\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}\left|\,\mathbf{E}_k\;\mathrm{Tr}\,R_{m_n}^{-1}\left(Q-Q_{(k)}\right)-\mathbf{E}_{k+1}\;\mathrm{Tr}\,R_{m_n}^{-1}\left(Q-Q_{(k)}\right)\right|^{2} \;=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\left|\mathbf{E}_k\,\frac{n^{-1}\vec{y}_k^{\,T}Q_k^{2}\vec{y}_k}{1+n^{-1}\vec{y}_k^{\,T}Q_k\vec{y}_k}-\mathbf{E}_{k-1}\,\frac{n^{-1}\vec{y}_k^{\,T}Q_k^{2}\vec{y}_k}{1+n^{-1}\vec{y}_k^{\,T}Q_k\vec{y}_k}\right|^{2}\le\frac{c}{ns},$$

де $Q_{(k)}=\left[-zI+n^{-1}R_{m_n}^{1/2}\,\Xi\Xi^{T}R_{m_n}^{1/2}-n^{-1}\,\vec{y}_k\vec{y}_k^{\,T}\right]^{-1}$. Тоді, використовуючи леми 1 і 2, одержуємо (10). Лему 3 доведено.

З [1, с. 194] для елементів q_{ij} матриці $Q(z)$ маємо

$$q_{ji}\;=(-1)^{i+j}\,\det\left(n^{-1}\,\Xi\Xi^{T}-z\,R_{m_n}^{-1}\right)_{i}^{j}\left[\det\left(n^{-1}\Xi\Xi^{T}-z\,R_{m_n}^{-1}\right)\right]^{-1} \;=$$

$$=\;(-1)^{i+j}\,\frac{\det\left(n^{-1}\Xi\Xi^{T}-zR_{m_n}^{-1}\right)_{i}^{j}}{\det\left(n^{-1}\Xi\Xi^{T}-zR_{m_n}^{-1}\right)_{ij}^{ij}}\,\frac{\det\left(n^{-1}\Xi\Xi^{T}-zR_{m_n}^{-1}\right)_{ij}^{ij}}{\det\left(n^{-1}\Xi\Xi^{T}-zR_{m_n}^{-1}\right)_{i}^{i}}\,\frac{\det\left(n^{-1}\Xi\Xi^{T}-zR_{m_n}^{-1}\right)_{i}^{i}}{\det\left(n^{-1}\Xi\Xi^{T}-zR_{m_n}^{-1}\right)},$$

де верхній індекс i означає, що викреслено i-й вектор-стовпчик, а нижній індекс j означає, що викреслено j-й вектор-рядок матриці $n^{-1}\Xi\Xi^T - zR_{m_n}^{-1}$.

Тоді з наведеної вище рівності та співвідношень

$$\left(n^{-1}\Xi\Xi^T - zR_{m_n}^{-1}\right)_i^i = n^{-1}\Xi_{(i)}\Xi_{(i)}^T - z\left(R_{m_n}^{-1}\right)_i^i, \; (n^{-1}\Xi\Xi^T - zR_{m_n}^{-1})_{ij}^{ij} = n^{-1}\Xi_{(ij)}\Xi_{(ij)}^T - z(R_{m_n}^{-1})_{ij}^{ij}$$

випливає

$$q_{ij}(\alpha) = \left\{\left(n^{-1}\Xi\Xi^T - zR_{m_n}^{-1} - i\alpha I_{m_n}\right)^{-1}\right\}_{ij} = \Big[-zr_{ij}^{(-1)} - i\alpha\delta_{ij} + n^{-1}\bar{\xi}_i\bar{\xi}_j^T - \left(n^{-1}\bar{\xi}_i\,\Xi_{(ij)}^T - z\,\bar{r}_i^{(-1)}\right)Q_\alpha^{(ij)}\left(n^{-1}\bar{\xi}_j\Xi_{(ij)}^T - z\,\bar{r}_j^{(-1)}\right)^T\Big]q_{ii}q_{jj}^{(i)}, \tag{11}$$

$$q_{pp}(\alpha) = \left[-zr_{pp}^{(-1)} - i\alpha + n^{-1}\xi_p\xi_p^T - \left(n^{-1}\bar{\xi}_p\,\Xi_{(p)}^T - z\,\bar{r}_p^{(-1)}\right)Q_\alpha^{(pp)}\left(n^{-1}\bar{\xi}_p\Xi_{(p)}^T - z\,\bar{r}_p^{(-1)}\right)^T\right]^{-1}, \tag{12}$$

де $\bar{\xi}_i$, $\bar{r}_i^{(-1)}$ — вектор-рядки відповідно матриць Ξ, $R_{m_n}^{-1}$, $\alpha \geq 0$, — дійсний параметр, $\Xi_{(ij)}$ — матриці, одержані з матриці Ξ викресленням вектор-рядків з номерами i і j;

$$Q_\alpha^{(ij)} = \left(q_{pl}^{(ij)}(\alpha)\right) = \left(n^{-1}\Xi_{(ij)}\Xi_{(ij)}^T - z\left(R_{m_n}^{-1}\right)_{ij}^{ij} - i\alpha I_{m_n-2}\right)^{-1},$$

$q_{pl}^{(i)}(\alpha)$ — елементи матриці

$$Q_\alpha^{(i)} = \left(q_{pl}^{(i)}(\alpha)\right) = \left(n^{-1}\Xi_{(i)}\Xi_{(i)}^T - z\left(R_{m_n}^{-1}\right)_i^i - i\alpha I_{m_n-1}\right)^{-1}.$$

Розглянемо матриці

$$T = \left(t_{ij}\right) = \left\{\left(\left(\delta_{ij}\theta_i\right) - zR_{m_n}^{-1} - i\alpha I_{m_n}\right)^{-1}\right\}, \qquad \theta_i = n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\frac{\nu_{ik}^2}{1 + n^{-1}\sum_{p=1}^{m_n}\nu_{pk}^2\mathbf{E}q_{pp}(\alpha)}.$$

Аналогічно одержуємо

$$t_{ij} = \left(\left(\delta_{ij}\theta_i\right) - zR_{m_n}^{-1} - i\alpha I_{m_n}\right)_{ij}^{-1} = \left[-zr_{ij}^{(-1)} + \delta_{ij}(\theta_i - i\alpha) - z\,\bar{r}_i^{(-1)}T^{(ij)}\left(z\,\bar{r}_j^{(-1)}\right)^T\right]t_{ii}t_{jj}^{(i)}, \tag{13}$$

$$t_{pp} = \left[-zr_{pp}^{(-1)} + \left(\theta_p - i\alpha\right) - z\,\bar{r}_p^{(-1)}T^{(p)}\left(z\,\bar{r}_p^{(-1)}\right)^T\right]^{-1}, \tag{14}$$

$$T^{(ij)} = \left(t_{pl}^{(ij)}\right) = \left(\left(\delta_{ij}\theta_i\right)_{ij}^{ij} - z\left(R_{m_n}^{-1}\right)_{ij}^{ij} - i\alpha I_{m_n-2}\right)^{-1},$$

$$T^{(i)} = \left(t_{pl}^{(i)}\right) = \left(\left(\delta_{ij}\theta_i\right)_i^i - z\left(R_{m_n}^{-1}\right)_i^i - i\alpha I_{m_n-1}\right)^{-1}.$$

Позначимо

$$\varepsilon_{ij} = n^{-1}\vec{\xi}_i\vec{\xi}_j^T - n^{-1}\vec{\xi}_i\,\Xi_{(ij)}^T Q_\alpha^{(ij)}\,n^{-1}\Xi_{(ij)}\vec{\xi}_j^T -$$
$$- n^{-1}\vec{\xi}_i\,\Xi_{(ij)}^T Q_\alpha^{(ij)}\left(z\vec{r}_j^{(-1)}\right)^T - \left(z\vec{r}_i^{(-1)}\right)Q_\alpha^{(ij)}n^{-1}\Xi_{(ij)}\vec{\xi}_j^T - \delta_{ij}\theta_i.$$

Лема 4. *Якщо виконуються умови теореми,* $t<0,\ s>0$ і $a>0$, *то*

$$\lim_{n\to\infty}\max_{i,j=1,\dots,m}\mathbf{E}\left|\varepsilon_{ij}\right| = 0.$$

Доведення. Використовуючи умови (3) і (4), маємо

$$\mathbf{E}\left|n^{-1}\vec{\xi}_i\,\Xi_{(ij)}^T Q_\alpha^{(ij)}\left(z\vec{r}_j^{(-1)}\right)^T\right| \le \left[n^{-1}\sum_{p=1}^n \mathbf{E}\nu_{pi}^2\left|b_p\right|^2\right]^{1/2} \le$$

$$\le \left\{\left[n^{-1}\sum_{p=1}^n \mathbf{E}\nu_{pi}^4\left|b_p\right|^2\right]^{1/2}\left[n^{-1}\sum_{p=1}^n \mathbf{E}\left|b_p\right|^4\right]^{1/2}\right\}^{1/2} \le cn^{-1/4}\left[n^{-1}\sum_{p=1}^n \mathbf{E}\left|b_p\right|^2\right]^{1/2}, \tag{15}$$

де b_p — компоненти вектора $\vec{b} = n^{-1/2}\,\Xi_{(ij)}^T Q_\alpha^{(ij)}\left(z\vec{r}_j^{(-1)}\right)^T$.

Очевидно,

$$\sum_{p=1}^n\left|b_p\right|^2 = \left|z\vec{r}_j^{(-1)}Q_\alpha^{(ij)}\,n^{-1}\Xi_{(ij)}\Xi_{(ij)}^T\,\overline{Q}_\alpha^{(ij)}\left(\bar{z}\bar{\vec{r}}_j^{(-1)}\right)^T\right| =$$

$$= \left|z\vec{r}_j^{(-1)}Q_\alpha^{(ij)}\,n^{-1}\left\{\Xi_{(ij)}\Xi_{(ij)}^T - zR_m^{-1} - i\alpha I + zR_m^{-1} + i\alpha I\right\}\overline{Q}_\alpha^{(ij)}\left(\bar{z}\bar{\vec{r}}_j^{(-1)}\right)^T\right| \le$$

$$\le |z|^2\left|\vec{r}_j^{(-1)}Q_\alpha^{(ij)}n^{-1}\left\{zR_m^{-1} + i\alpha I\right\}\overline{Q}_\alpha^{(ij)}\left(\bar{z}\bar{\vec{r}}_j^{(-1)}\right)^T\right| + |z|^2\left|\vec{r}_j^{(-1)}\,\overline{Q}_\alpha^{(ij)}\left(\bar{z}\bar{\vec{r}}_j^{(-1)}\right)^T\right| \le$$

$$\le |z|^2\alpha^{-2}\left|\vec{r}_j^{(-1)}\left\{|z|\lambda_{\min}^{-1}\left(R_m\right) + \alpha\right\}\left(\bar{\vec{r}}_j^{(-1)}\right)^T\right| + |z|^2\alpha^{-1}\left|\vec{r}_j^{(-1)}\left(\bar{\vec{r}}_j^{(-1)}\right)^T\right| \le c.$$

Тому з (15) випливає

$$\mathbf{E}\left|n^{-1}\vec{\xi}_i\,n^{-1/2}\,\Xi_{(ij)}^T Q_\alpha^{(ij)}\left(z\vec{r}_j^{(-1)}\right)^T\right| \le cn^{-1/4}. \tag{16}$$

Аналогічно,

$$\mathbf{E}\left|n^{-1}\vec{\xi}_j\,n^{-1/2}\,\Xi_{(ij)}^T Q_\alpha^{(ij)}\left(z\vec{r}_i^{(-1)}\right)^T\right| \le cn^{-1/4}. \tag{17}$$

Крім того, для $i \ne j$ виконується співвідношення

$$\mathbf{E}\left|n^{-1}\vec{\xi}_i\,n^{-1}\,\Xi_{(ij)}^T Q_\alpha^{(ij)}\,\Xi_{(ij)}\vec{\xi}_i^T\right| \le \left[\mathbf{E}\sum_{p,l=1}^n n^{-2}\,\nu_{ip}^2\nu_{jl}^2\left|b_{pl}\right|^2\right]^{1/2} = \left[\mathbf{E}n^{-2}\vec{\nu}^T B\overline{B}\,\vec{\nu}\right]^{1/2}, \tag{18}$$

де $B = \left(b_{pl}\right) = n^{-1}\,\Xi_{(ij)}^T Q_\alpha^{(ij)}\,\Xi_{(ij)}$; $\vec{\nu}^T = \left(\nu_{ip}^2,\ p = 1,\dots,n\right)$.

Легко перевірити, що власні числа ермітової матриці $B\overline{B}$ обмежені. Тому, використовуючи (3) і (18), одержуємо *де* $G_n(x)$ — *функція розподілу, перетворення Стільтьєса якої має вигляд*

$$\int_0^\infty (x-z)^{-1}\, dG_n(x) =$$

$$= m^{-1}\sum_{k=1}^{m}\left[-z+\lambda_k n^{-1}\sum_{k=1}^{m_n}\mathbf{E}\beta_k^2\left[1+\beta_k^2\gamma c(z)\right]^{-1}\right]^{-1}, \quad z=t+is, \; s\neq 0,$$

і функція $c(z)$ *є розв'язком канонічного спектрального рівняння*

$$c(z) = m^{-1}\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k}{-z+\lambda_k n^{-1}\sum_{k=1}^{m_n}\mathbf{E}\beta_k^2\left[1+\beta_k^2\gamma c(z)\right]^{-1}},$$

причому цей розв'язок існує і єдиний у класі аналітичних функцій

$$\{\, c(z):\ \operatorname{Re} c(z)>0,\ \text{коли}\ \operatorname{Re} z<0,\ \operatorname{Im} c(z)>0;\ \operatorname{Im} z>0\,\}, \quad c(z) = \int (u-z)^{-1}\, d\nu(u),$$

де $\nu(u)$ — *деяка функція розподілу*.

Наслідок 2. *Нехай додатково до умов теореми* $\nu_{ik}^2 \equiv \beta^2$. *Тоді для майже всіх* x

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty}\left|\,\mu_n\left(x,\hat{R}_{m_n}\right)-L_n(x)\,\right| = 0,$$

де $L_n(x)$ — *функція розподілу, перетворення Стільтьєса якої має вигляд*

$$\int_0^\infty (x-z)^{-1}\, dL_n(x) = m^{-1}\sum_{k=1}^{m}\left[-z+\lambda_k\mathbf{E}\beta^2\left[1+\beta^2\gamma c(z)\right]^{-1}\right]^{-1}, \quad z=t+is, \; s\neq 0,$$

і функція $c(z)$ *є розв'язком канонічного спектрального рівняння*

$$c(z) = m^{-1}\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\left[-z+\lambda_k\mathbf{E}\beta^2\left[1+\beta^2\gamma c(z)\right]^{-1}\right]^{-1},$$

причому цей розв'язок існує і єдиний у класі аналітичних функцій

$$\{\, c(z):\ \operatorname{Re} c(z)>0,\ \text{коли}\ \operatorname{Re} z<0,\ \operatorname{Im} c(z)>0;\ \operatorname{Im} z>0\,\}, \quad c(z) = \int (u-z)^{-1}\, d\nu(u),$$

де $\nu(u)$ — *деяка функція розподілу*.

Наслідок 3. *Нехай додатково до умов теореми*

$$\lim_{|p-s|\to\infty}\ \lim_{n\to\infty}\ \max_{k=1,\dots,n}\left|\,\mathbf{E}\,\nu_{pk}^2\,\nu_{sk}^2-\mathbf{E}\,\nu_{pk}^2\,\mathbf{E}\nu_{sk}^2\,\right| = 0.$$

Тоді для майже всіх x

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty}\left|\,\mu_n\left(x,\hat{R}_{m_n}\right)-M_n(x)\,\right| = 0,$$

де $M_n(x)$ — *функція розподілу, перетворення Стільтьєса якої має вигляд*

$$\int (x-z)^{-1}\, dL_n(x) = b(z)$$

і функція $b(z)$ *є розв'язком канонічного спектрального рівняння*

$$A_1 = -zI_m + R_{m_n}^{1/2}\left[\delta_{ij} n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\frac{\nu_{ik}^2}{1+n^{-1}\sum_{p=1}^{m_n}\nu_{pk}^2\sum_{l,q=1}^{m_n} r_{pl}^{(1/2)} c_{lq}(z) r_{qp}^{(1/2)}}\right] R_{m_n}^{1/2},$$

$$A_2 = -zI_m + R_{m_n}^{1/2}\left[\delta_{ij} n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\frac{\nu_{ik}^2}{1+n^{-1}\sum_{p=1}^{m_n}\nu_{pk}^2\sum_{l,q=1}^{m_n} r_{pl}^{(1/2)} d_{lq}(z) r_{qp}^{(1/2)}}\right] R_{m_n}^{1/2},$$

$$\tau_{k1} = \left[1+n^{-1}\sum_{p=1}^{m_n}\nu_{pk}^2\sum_{l,q=1}^{m_n} r_{pl}^{(1/2)} d_{lq}(z) r_{qp}^{(1/2)}\right]^{-1},$$

$$\tau_{k2} = \left[1+n^{-1}\sum_{p=1}^{m_n}\nu_{pk}^2\sum_{l,q=1}^{m_n} r_{pl}^{(1/2)} c_{lq}(z) r_{qp}^{(1/2)}\right]^{-1}.$$

Очевидно, при $t<0$

$$n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\tau_{k1}\,\tau_{k2}\,\nu_{ik}^2\, n^{-1}\sum_{p=1}^{m_n}\nu_{pk}^2 \le c.$$

Тому, використовуючи (32), маємо при $t<0,\ s>0$

$$\max_{p,\,l=1,\dots,m_n}\left\{\left|c_{pl}(z)-d_{pl}(z)\right|\right\} \le cs^{-1}\max_{p,\,l=1,\dots,m_n}\left\{\left|c_{pl}(z)-d_{pl}(z)\right|\right\}.$$

З останньої нерівності знаходимо, що ці розв'язки співпадають при $cs^{-1}<1,\ t<0,$ $s>0$. Оскільки компоненти $\{c_{pl}(z),\ p,l=1,\dots,m_n\}$, $\{d_{pl}(z),\ p,l=1,\dots,m_n\}$ — аналітичні функції з класу L, то ці розв'язки будуть співпадати для всіх $s>0$, $t<0$. Єдиність розв'язку канонічного спектрального рівняння доведено.

Розглянемо різниці $c_{pl}(z)-\hat{c}_{pl}(z),\ p,l=1,\dots,m_n$, де $c_{pl}(z),\ \hat{c}_{pl}(z)$ — розв'язки відповідно канонічного спектрального рівняння і рівняння (30). Так само, як і при доведенні (28), використовуючи (5) і лему 4, маємо при $t<0,\ s>0$

$$\max_{p,\,l=1,\dots,m_n}\left\{\left|c_{pl}(z)-\hat{c}_{pl}(z)\right|\right\} \le cs^{-1}\max_{p,\,l=1,\dots,m_n}\left\{\left|c_{pl}(z)-\hat{c}_{pl}(z)\right|\right\} + \varepsilon_n.$$

Тому для всіх $cs^{-1}<1,\ t<0,\ s>0$

$$\lim_{n\to\infty}\max_{p,\,l=1,\dots,m_n}\left\{\left|c_{pl}(z)-\hat{c}_{pl}(z)\right|\right\} = 0. \tag{33}$$

Оскільки функції $\{c_{pl}(z),\ p,l=1,\dots,m_n\}$, $\{\hat{c}_{pl}(z),\ p,l=1,\dots,m_n\}$ аналітичні з класу L, то (33) буде виконуватися для всіх $s>0,\ t<0$. Тому з використанням лем 3 і 2, співвідношень (1) та (2) доводимо, що (6) виконується майже для всіх x. Теорему доведено.

***Наслідок* 1.** *Нехай додатково до умов теореми* $\nu_{ik}^2=\alpha_i^2\beta_k^2$ *і випадкові величини* $\alpha_i,\beta_k,\ i,k=1,2,\dots,$ *незалежні. Тоді для майже всіх* x

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty}\left|\mu_n\left(x,\hat{R}_{m_n}\right)-G_n(x)\right| = 0,$$

Позначимо $\tilde{T} = (\tilde{t}_{ij}) = \left[-zA - i\alpha I_{m\rho} + \tilde{\Theta}\right]$; $\tilde{\Theta} = \left[\Theta\delta_{ij}\right]_{i,j=1}^{\rho}$; $\Theta = \left[\theta_i\delta_{ij}\right]_{i,j=1}^{m}$. Повторюючи для матриць $\tilde{Q}$ і $\tilde{T}$ ті ж самі обчислення, що й для матриць Q і T, одержуємо при $t<0,\ s>0$

$$\hat{q}_{pl}(z,\rho) =$$

$$= \left\{-zI_{m\rho} + A_{m\rho}^{-1/2}\left[\frac{\delta_{ij}}{\rho n}\sum_{k=1}^{n\rho}\mathbf{E}\frac{h_{ik}^2}{1+(n\rho)^{-1}\sum_{p=1}^{m_n\rho}h_{pk}^2\sum_{l,q=1}^{m_n\rho}A_{pl}^{1/2}\,\hat{q}_{lq}(z,\rho)\,A_{qp}^{1/2}}\right]A_{m\rho}^{-1/2}\right\}_{pl}^{-1} + \varepsilon_\rho,$$

де

$$p,l=1,\ldots,m_n\rho;\quad \lim_{\rho\to\infty}\mathbf{E}\left|\varepsilon_\rho\right| = 0;\quad \hat{q}_{pl}(z,\rho) = \sum_{k,q=1}^{m_n\rho}A_{pk}^{-1/2}\,\tilde{q}_{kq}(z,\rho)A_{ql}^{-1/2}.$$

З цього виразу, використовуючи (31), маємо

$$\hat{q}_{jj}(z,\rho) = \hat{q}_{ii}(z,\rho)+\varepsilon_\rho,\ j=(i-1)\rho+1,\ldots,i\rho;\ i=1,\ldots,n,$$

і функція

$$\hat{q}_{ij}(z,\rho) = \rho^{-1}\sum_{l=(i-1)\rho+1,\ p=(j-1)\rho+1}^{i\rho,\ j\rho}\hat{q}_{lp}(z,\rho)$$

є перетворенням Стільтьєса $\int(x-z)^{-1}d\nu_{ij}^{(\rho)}(x)$ деякої спектральної функції $\nu_{ij}^{(\rho)}(x)$.

Вибираючи деяку збіжну підпослідовність функцій при $\rho\to\infty$ $\nu_{ij}^{(\rho)}(x)\Rightarrow$ $\Rightarrow\nu_{ij}(x)$, при фіксованих n і m_n знаходимо, що перетворення Стільтьєса $c_{ij}(z)$ спектральної функції $\nu_{ij}(x)$ є розв'язком канонічного спектрального рівняння при $t<0,\ s>0$. Але ліва і права частини канонічного спектрального рівняння для функції $c_{ij}(z)$ аналітичні при $s>0$. Тому розв'язок канонічного спектрального рівняння існує у класі аналітичних функцій L і функція $c_{pl}(z)$ є перетворенням Стільтьєса деякої функції обмеженої варіації. Доведемо, що розв'язок канонічного спектрального рівняння єдиний у класі аналітичних функцій L. Припустимо, що існують два різні розв'язки $\{c_{pl}(z),\ p,l=1,\ldots,m_n\}$, $\{d_{pl}(z),$ $p,l=1,\ldots,m_n\}$ з класу L, які не співпадають хоча б в одній точці z. Для цих розв'язків маємо рівність

$$\max_{p,l=1,\ldots,m_n}\left\{\left|c_{pl}(z)-d_{pl}(z)\right|\right\}\le \tag{32}$$

$$\le\max_{p,l=1,\ldots,m_n}\left|\left\{A_1^{-1}R_{m_n}^{1/2}\left[\frac{\delta_{ij}}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\,\tau_{k1}\,\tau_{k2}\,\nu_{ik}^2\,n^{-1}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\sum_{p=1}^{m_n}\nu_{pk}^2\sum_{l,q=1}^{m_n}r_{pl}^{(1/2)}\left|c_{lq}(z)-d_{lq}(z)\right|r_{qp}^{(1/2)}\right]_{i,j=1}^{m}R_{m_n}^{1/2}A_2^{-1}\right\}_{pl}\right|,$$

де

$$m_k(z) \le c\alpha^{-1}[\max\{m_k(z),\ m_{k+1}(z),\ m_{k+2}(z)\} + \varepsilon_n], \quad k = 0,\ 1, \dots,$$

де $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. З цієї рівності, враховуючи рівність $m_k(z) \le 2\alpha^{-1}$, знаходимо

$$m_0(z) \le \varepsilon_n\left(c\alpha^{-1}\right) + \varepsilon_n^2\left(c\alpha^{-1}\right)^2 + \ldots + \varepsilon_n^{k-1}\left(c\alpha^{-1}\right)^{k-1} + 2\left(c\alpha^{-1}\right)^k.$$

Переходячи до границі в останній нерівності, коли $n \to \infty$, а потім коли $k \to \infty$, за лемою 4 маємо при $c\alpha^{-1} < 1,\ t < 0,\ s > 0$

$$\lim_{n\to\infty} m_0(z) = 0.$$

Тому, якщо $c\alpha^{-1} < 1,\ t < 0,\ s > 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \max_{i,j=1,\dots,m} \mathbf{E}\left|t_{ij} - q_{ij}(\alpha)\right| = 0.$$

Оскільки функція $\mathbf{E}\left(t_{ij} - q_{ij}(\alpha)\right)\left(\bar{t}_{ij} - \overline{q}_{ij}(\alpha)\right)$ аналітична, $\alpha \ge 0,\ t,\ s > 0$ і кожна збіжна границя цієї функції є також аналітичною функцією, якщо $\alpha \ge 0,\ t,\ s > 0$, то для кожного $z\colon t < 0,\ s > 0$ маємо

$$\lim_{n\to\infty} \max_{i,j=1,\dots,m} \mathbf{E}\left|t_{ij} - q_{ij}(0)\right| = 0.$$

Тому при $t < 0,\ s > 0$

$$\hat{c}_{pl}(z) =$$

$$= \left\{-zI_m + R_{m_n}^{1/2}\left[\delta_{ij} n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\, \frac{\nu_{ik}^2}{1 + n^{-1}\sum_{p=1}^{m_n} \nu_{pk}^2 \sum_{l,q=1}^{m_n} r_{pl}^{(1/2)}\, \hat{c}_{lq}(z)\, r_{qp}^{(1/2)}}\right] R_{m_n}^{1/2}\right\}_{pl}^{-1} + \varepsilon_n; \tag{30}$$

$$p, l = 1, \dots, m_n,$$

де

$$\hat{c}_{pl}(z) = \sum_{k,q=1}^{m_n} r_{pk}^{(-1/2)}\, q_{kq}(0)\, r_{ql}^{(-1/2)}.$$

Доведемо, що розв'язок канонічного спектрального рівняння існує і єдиний у класі функцій L. З цією метою розглянемо матриці

$$\tilde{Q} = \left(\tilde{q}_{pl}(\alpha)\right) = \left[\tilde{H}\tilde{H}^T - zA - i\alpha I_{m\rho}\right]^{-1}, \quad \rho = 1, 2, \dots,$$

де $A = \left(R_{m_n}^{-1}\delta_{ij}\right)_{i,j=1}^{\rho}$, $\tilde{H} = (h_{ij})_{i=1,\dots,m\rho}^{j=1,\dots,\rho n}$ — матриця, елементи якої h_{ij}; $j = 1, \dots, n\rho$; $i = 1, \dots, m\rho$, незалежні і нормально розподілені (випадкові величин ν_{pl} фіксовані),

$$\mathbf{E}h_{ij} = 0, \quad \mathbf{E}h_{ij}^2 = \rho_{ij}^{(n)} = \frac{\nu_{pl}^2}{\rho n}, \quad \left\{\begin{matrix} i = [(p-1)\rho + 1, \dots, p\rho], \\ j = [(l-1)\rho + 1, \dots, l\rho] \end{matrix}\right\}; \tag{31}$$

$$p = 1, \dots, m; \quad l = 1, \dots, n.$$

$\operatorname{Re} \mathbf{E} q_{pp}(\alpha) \geq 0$ при $t < 0$, то

$$\mathbf{E}\left| \sum_{k=1}^{n} n^{-1} \nu_{ik}^{2} \left[1 + \sum_{p=1}^{n} n^{-1} \nu_{pk}^{2} \mathbf{E} q_{pp}(\alpha) \right]^{-1} - \right.$$

$$\left. - \mathbf{E} \sum_{k=1}^{n} n^{-1} \nu_{ik}^{2} \left[1 + \sum_{p=1}^{n} n^{-1} \nu_{pk}^{2} \mathbf{E} q_{pp}(\alpha) \right]^{-1} \right| \leq c n^{-1/2}.$$

Тому

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{E} \left| \sum_{p=1}^{n} n^{-1} \nu_{ip}^{2} - \sum_{p=1}^{n} n^{-1} \nu_{ip}^{2} \tilde{q}_{pp}^{(i)} - \theta_i \right| = 0.$$

Тоді з (22) маємо $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\,|\varepsilon_{ii}| = 0$. З урахуванням (21) закінчуємо доведення леми 4.

Очевидно, якщо $t < 0$, $s < 0$ і $a > 0$, то

$$\max_{i,j} \left\{ \left| t_{ij} \right|, \left| t_{ii}^{(j)} \right|, \left| q_{ij}(\alpha) \right|, \left| q_{ii}^{(j)}(\alpha) \right| \right\} \leq \alpha^{-1}. \tag{27}$$

Використовуючи формули (11) і (13), при $i \neq j$, $t < 0$, $s > 0$, $\alpha > 0$ маємо

$$\mathbf{E}\left| t_{ij} - q_{ij}(\alpha) \right| = \mathbf{E} \left| \left(z \bar{r}_j^{(-1)} \right)^T \left[T^{(ij)} - Q_\alpha^{(ij)} \right] z \bar{r}_i^{(-1)} - \varepsilon_{ij} \right| \left| q_{ii}(\alpha) q_{jj}^{(i)}(\alpha) \right| +$$

$$+ \mathbf{E} \left| \left[-z r_{ij}^{(-1)} - z \bar{r}_i^{(-1)} T^{(ij)} \left(z \bar{r}_j^{(-1)} \right) \right] \right| \left| t_{ii} t_{jj}^{(i)} - q_{ii}(\alpha) q_{jj}^{(i)}(\alpha) \right| \leq$$

$$\leq \alpha^{-2} \left[\left(\sum\nolimits_p \left| r_{ip}^{(-1)} \right| \right) \left(\sum\nolimits_p \left| r_{jp}^{(-1)} \right| \right) \max_{pl} \mathbf{E} \left| q_{pl}^{(ij)}(\alpha) - t_{pl}^{(ij)} \right| + \mathbf{E} \left| \varepsilon_{ij} \right| \right] +$$

$$+ \left[\alpha^{-2} |z| + \alpha^{-2} |z|^2 \left(\sum\nolimits_p \left| r_{ip}^{(-1)} \right|^2 \right)^{1/2} \left(\sum\nolimits_p \left| r_{jp}^{(-1)} \right|^2 \right)^{1/2} \right] \times$$

$$\times \left\{ \mathbf{E} \left| t_{ii} - q_{ii}(\alpha) \right| + \mathbf{E} \left| t_{jj}^{(i)} - q_{jj}^{(i)}(\alpha) \right| \right\} \leq$$

$$\leq \alpha^{-1} c \left[\max_{i,j} \left\{ \mathbf{E} \left| t_{pp} - q_{pp} \right|, \mathbf{E} \left| t_{pp}^{(i)} - q_{pp}^{(i)}(\alpha) \right|, \mathbf{E} \left| q_{pl}^{(ij)}(\alpha) - t_{pl}^{(ij)} \right| \right\} + \mathbf{E} \left| \varepsilon_{pl} \right| \right]. \tag{28}$$

Аналогічно з урахуванням співвідношень (12) і (14) одержуємо

$$\mathbf{E} \left| t_{ii} - q_{ii}(\alpha) \right| \leq \alpha^{-2} c \left[\max_{p,\, l} \mathbf{E} \left| q_{pl}^{(i)}(\alpha) - t_{pl}^{(i)} \right| + \mathbf{E} \left| \varepsilon_{ii} \right| \right]. \tag{29}$$

Для подальших обчислень позначимо

$$m_k(z) = \max_{p,\, l = 1, \ldots, n-k} \; \max_{1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_k \leq m} \left\{ \mathbf{E} \left| t_{pl}^{(i_1, i_2, \ldots, i_k)} - q_{pl}^{(i_1, i_2, \ldots, i_k)}(\alpha) \right|, \mathbf{E} \left| t_{pl} - q_{pl}(\alpha) \right| \right\},$$

$$m_0(z) = \max_{p, l = 1, \ldots, n} \mathbf{E} \left| t_{pl} - q_{pl}(\alpha) \right|.$$

Тоді з співвідношень (11)–(14) і $m_k(z) \leq 2\alpha^{-1}$ маємо де

$$J_1 = \sum_{l=1}^{m} \hat{\mathbf{E}} \left| \left[Q_\alpha^{(i)}(p) - \mathbf{E} Q_\alpha^{(i)}(p) \right]_{ll} \right|^2;$$

$$J_2 = \sum_{l=1}^{m} \mathbf{E} \left| \left[Q_\alpha^{(i)}(p) - Q_\alpha^{(i)} \right]_{ll} \right|^2; \quad J_3 = \sum_{l=1}^{m} \mathbf{E} \left| \left[Q_\alpha^{(i)} - Q \right]_{ll} \right|^2.$$

Тоді справедливі такі оцінки (див. позначення, введені у доведенні леми 3). Для J_1:

$$J_1 \le \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=1}^{m} \mathbf{E} \left| \left[\mathbf{E}_k Q_\alpha^{(i)}(p) - \mathbf{E}_{k+1} Q_\alpha^{(i)}(p) \right]_{ll} \right|^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=1}^{m} \mathbf{E} \left| \left[\mathbf{E}_k \left\{ Q_\alpha^{(i)}(p) - Q_\alpha^{(i)}(p,k) \right\} - \mathbf{E}_{k+1} \left\{ Q_\alpha^{(i)}(p) - Q_\alpha^{(i)}(p,k) \right\} \right]_{ll} \right|^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=1}^{m} \mathbf{E} \left| \mathbf{E}_k \frac{\left\{ n^{-1} Q_\alpha^{(i)}(p,k) \bar{\eta}_k^{(i)} \bar{\eta}_k^{(i)T} Q_\alpha^{(i)}(p,k) \right\}_{ll}}{1 + n^{-1} \bar{\eta}_k^{(i)T} Q_\alpha^{(i)}(p,k) \bar{\eta}_k^{(i)}} - \right.$$

$$\left. - \mathbf{E}_{k+1} \frac{\left\{ n^{-1} Q_\alpha^{(i)}(p,k) \bar{\eta}_k^{(i)} \bar{\eta}_k^{(i)T} Q_\alpha^{(i)}(p,k) \right\}_{ll}}{1 + n^{-1} \bar{\eta}_k^{(i)T} Q_\alpha^{(i)}(p,k) \bar{\eta}_k^{(i)}} \right|^2 \le$$

$$\le n^{-1} \operatorname{Tr} Q_\alpha^{(i)}(p,k) \overline{Q}_\alpha^{(i)T}(p,k) \le \alpha^{-1}; \tag{24}$$

для J_2:

$$J_2 \le \sum_{l=1}^{m} \mathbf{E} \left| \frac{\left\{ n^{-1} Q_\alpha^{(i)}(p) \bar{\eta}_p^{(i)} \bar{\eta}_p^{(i)T} Q_\alpha^{(i)}(p) \right\}_{ll}}{1 + n^{-1} \bar{\eta}_p^{(i)T} Q_\alpha^{(i)}(p) \bar{\eta}_p^{(i)}} \right|^2 \le n^{-1} \operatorname{Tr} Q_\alpha^{(i)}(p) \overline{Q}_\alpha^{(i)T}(p) \le \alpha^{-1}; \tag{25}$$

для J_3:

$$J_3 \le \sum_{l=1}^{m} \mathbf{E} \left| \frac{\delta_{li} + \left\{ Q_\alpha^{(ii)} \left(n^{-1} \bar{\xi}_i \, \Xi_{(i)}^T - z \bar{r}_i^{(-1)} \right) \left(n^{-1} \bar{\xi}_i \, \Xi_{(i)}^T - z \bar{r}_i^{(-1)} \right)^T Q_\alpha^{(ii)} \right\}_{ll}}{-z r_{ii}^{(-1)} - i\alpha + n^{-1} \xi_i \xi_i^T - \left(n^{-1} \bar{\xi}_i \, \Xi_{(i)}^T - z \bar{r}_i^{(-1)} \right)^T Q_\alpha^{(ii)} \left(n^{-1} \bar{\xi}_i \, \Xi_{(i)}^T - z \bar{r}_i^{(-1)} \right)} \right|^2 \le$$

$$\le \alpha^{-2} \left[1 + n^{-1} \mathbf{E} \operatorname{Tr} Q_\alpha^{(ii)} \Xi_{(i)} \Xi_{(i)}^T \overline{Q}_\alpha^{(ii)T} + |z|^2 \mathbf{E} (\bar{r}_i^{(-1)})^T Q_\alpha^{(ii)} \overline{Q}_\alpha^{(ii)} \bar{r}_i^{(-1)} \right] \le c. \tag{26}$$

Використовуючи (24)–(26), закінчуємо доведення леми 5.

Тоді з використанням леми 5, нерівностей (22) і (23), маємо

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{E} \left| \varepsilon_{ii} - \sum_{k=1}^{n} n^{-1} \nu_{ik}^2 \left[1 + \sum_{p=1}^{n} n^{-1} \nu_{pk}^2 \, \mathbf{E} q_{pp}(\alpha) \right]^{-1} + \theta_i \right| = 0.$$

Оскільки випадкові вектори $\bar{\nu}_k = \left\{ \nu_{pk};\ p = 1, \ldots, m \right\}^T$ стохастично незалежні і

$$\mathbf{E}\left| n^{-1}\xi_i\, n^{-1}\Xi_{(ij)}^T Q_\alpha^{(ij)}\Xi_{(ij)}\xi_i^T \right| \le cn^{-1/2}; \quad i \ne j. \tag{19}$$

Якщо $i \ne j$, то

$$\mathbf{E}\left| n^{-1}\xi_i\,\xi_i^T \right| \le \left[\mathbf{E}\sum_{p=1}^{n} n^{-2}\nu_{ip}^2\nu_{jp}^2\right]^{1/2} \le cn^{-1/2}. \tag{20}$$

Тоді, використовуючи співвідношення (16)–(20), для $i \ne j$ маємо

$$\mathbf{E}\left|\varepsilon_{ij}\right| \le cn^{-1/4}. \tag{21}$$

Розглянемо випадок, коли $i = j$. Використовуючи доведення співвідношень (15)–(19), маємо

$$\mathbf{E}\left|\varepsilon_{ii} - \sum_{p=1}^{n} n^{-1}\nu_{ip}^2 + \sum_{p=1}^{n} n^{-1}\nu_{ip}^2\,\tilde{q}_{pp}^{(i)} + \theta_i\right| \le cn^{-1/2}, \tag{22}$$

де $\tilde{q}_{jp}^{(i)}$ — елементи матриці $\tilde{G}^{(i)} = n^{-1/2}\,\Xi_{(i)}^T\left(n^{-1}\Xi_{(i)}\Xi_{(i)}^T - zR_{m_n}^{-1} - i\alpha I\right)^{-1}\Xi_{(i)}\,n^{-1/2}$.

Розглянемо рівність

$$\tilde{q}_{pp}^{(i)} = \sum_{l,s\ne i}^{m}\xi_{lp}\,\xi_{sp}n^{-1}q_{ls}^{(i)}(\alpha) = \operatorname{Tr}\left(n^{-1}\eta_p^{(i)}\eta_p^{(i)T}\right)\left[n^{-1}\eta_p^{(i)}\eta_p^{(i)T} + Q_\alpha^{(i)}(p)\right]^{-1} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\tau}\ln\det\left[n^{-1}\eta_p^{(i)}\eta_p^{(i)T}\tau + Q_\alpha^{(i)}(p)\right]_{\tau=1} = 1 - \left[1 + n^{-1}\eta_p^{(i)T}Q_\alpha^{(i)}(p)\eta_p^{(i)}\right]^{-1},$$

де $\eta_p^{(i)}$ — p-й вектор-стовпчик матриці $\Xi_{(i)}$,

$$Q_\alpha^{(i)}(p) = n^{-1}\Xi_{(i)}\Xi_{(i)}^T - z\left(R_{m_n}^{-1}\right)_i^i - n^{-1}\eta_p^{(i)}\eta_p^{(i)T} - i\alpha I_{m-1}.$$

З використанням умови (3) з останнього рівняння випливає

$$\mathbf{E}\left|\tilde{q}_{pp}^{(i)} - 1 + \left[1 + \sum_{l=1}^{m} n^{-1}\nu_{lp}^2\,Q_\alpha^{(i)}(p)\right]^{-1}\right| \le cn^{-1/2}. \tag{23}$$

Доведемо допоміжне твердження.

Лема 5. *Якщо виконуються умови теореми, то при* $t < 0$, $s < 0$ *і* $a > 0$ *виконується нерівність*

$$\mathbf{E}\left|\sum_{l=1}^{m} n^{-1}\nu_{lp}^2\left[Q_\alpha^{(i)}(p) - \mathbf{E}Q\right]_{ll}\right| \le cn^{-1/2}.$$

Доведення. Очевидно,

$$\mathbf{E}\left|\sum_{l=1}^{m} n^{-1}\nu_{lp}^2\left[Q_\alpha^{(i)}(p) - \mathbf{E}Q\right]_{ll}\right| \le$$

$$\le \left|\sum_{l=1}^{m} n^{-1}\mathbf{E}\nu_{lp}^4\right|^{1/2}\left|\sum_{l=1}^{m} n^{-1}\mathbf{E}\left|\left[Q_\alpha^{(i)}(p) - \mathbf{E}Q\right]_{ll}\right|^2\right|^{1/2} \le$$

$$\le cn^{-1/2}\left[J_1 + J_2 + J_3\right]^{1/2}.$$

Позначимо

$$\varepsilon_{ij} = n^{-1}\bar{\xi}_i\bar{\xi}_j^T - n^{-1}\bar{\xi}_i\,\Xi_{(ij)}^T Q_\alpha^{(ij)} n^{-1}\Xi_{(ij)}\bar{\xi}_j^T -$$
$$- n^{-1}\bar{\xi}_i\,\Xi_{(ij)}^T Q_\alpha^{(ij)}\left(z\bar{r}_j^{(-1)}\right)^T - \left(z\bar{r}_i^{(-1)}\right)Q_\alpha^{(ij)} n^{-1}\Xi_{(ij)}\bar{\xi}_j^T - \delta_{ij}\theta_i.$$

Лема 4. *Якщо виконуються умови теореми,* $t<0,\ s>0$ і $a>0$, *то*

$$\lim_{n\to\infty}\max_{i,j=1,\ldots,m}\mathbf{E}\left|\varepsilon_{ij}\right| = 0.$$

Доведення. Використовуючи умови (3) і (4), маємо

$$\mathbf{E}\left| n^{-1}\bar{\xi}_i\,\Xi_{(ij)}^T Q_\alpha^{(ij)}\left(z\bar{r}_j^{(-1)}\right)^T\right| \le \left[n^{-1}\sum_{p=1}^n \mathbf{E}\nu_{pi}^2\left|b_p\right|^2\right]^{1/2} \le$$

$$\le \left\{\left[n^{-1}\sum_{p=1}^n \mathbf{E}\nu_{pi}^4\left|b_p\right|^2\right]^{1/2}\left[n^{-1}\sum_{p=1}^n \mathbf{E}\left|b_p\right|^4\right]^{1/2}\right\}^{1/2} \le cn^{-1/4}\left[n^{-1}\sum_{p=1}^n \mathbf{E}\left|b_p\right|^2\right]^{1/2}, \tag{15}$$

де b_p — компоненти вектора $\vec{b} = n^{-1/2}\,\Xi_{(ij)}^T Q_\alpha^{(ij)}\left(z\bar{r}_j^{(-1)}\right)^T$.

Очевидно,

$$\sum_{p=1}^n\left|b_p\right|^2 = \left| z\bar{r}_j^{(-1)} Q_\alpha^{(ij)} n^{-1}\Xi_{(ij)}\Xi_{(ij)}^T\overline{Q}_\alpha^{(ij)}\left(\bar{z}\bar{\bar{r}}_j^{(-1)}\right)^T\right| =$$

$$= \left| z\bar{r}_j^{(-1)} Q_\alpha^{(ij)} n^{-1}\left\{\Xi_{(ij)}\Xi_{(ij)}^T - zR_m^{-1} - i\alpha I + zR_m^{-1} + i\alpha I\right\}\overline{Q}_\alpha^{(ij)}\left(\bar{z}\bar{\bar{r}}_j^{(-1)}\right)^T\right| \le$$

$$\le |z|^2\left|\bar{r}_j^{(-1)} Q_\alpha^{(ij)} n^{-1}\left\{zR_m^{-1} + i\alpha I\right\}\overline{Q}_\alpha^{(ij)}\left(\bar{z}\bar{\bar{r}}_j^{(-1)}\right)^T\right| + |z|^2\left|\bar{r}_j^{(-1)}\overline{Q}_\alpha^{(ij)}\left(\bar{z}\bar{\bar{r}}_j^{(-1)}\right)^T\right| \le$$

$$\le |z|^2\alpha^{-2}\left|\bar{r}_j^{(-1)}\left\{|z|\lambda_{\min}^{-1}\left(R_m\right)+\alpha\right\}\left(\bar{\bar{r}}_j^{(-1)}\right)^T\right| + |z|^2\alpha^{-1}\left|\bar{r}_j^{(-1)}\left(\bar{\bar{r}}_j^{(-1)}\right)^T\right| \le c.$$

Тому з (15) випливає

$$\mathbf{E}\left| n^{-1}\bar{\xi}_i\, n^{-1/2}\,\Xi_{(ij)}^T Q_\alpha^{(ij)}\left(z\bar{r}_j^{(-1)}\right)^T\right| \le cn^{-1/4}. \tag{16}$$

Аналогічно,

$$\mathbf{E}\left| n^{-1}\bar{\xi}_j\, n^{-1/2}\,\Xi_{(ij)}^T Q_\alpha^{(ij)}\left(z\bar{r}_i^{(-1)}\right)^T\right| \le cn^{-1/4}. \tag{17}$$

Крім того, для $i\ne j$ виконується співвідношення

$$\mathbf{E}\left| n^{-1}\bar{\xi}_i\, n^{-1}\,\Xi_{(ij)}^T Q_\alpha^{(ij)}\Xi_{(ij)}\bar{\xi}_i^T\right| \le \left[\mathbf{E}\sum_{p,l=1}^n n^{-2}\nu_{ip}^2\nu_{jl}^2\left|b_{pl}\right|^2\right]^{1/2} = \left[\mathbf{E}n^{-2}\bar{\nu}^T B\overline{B}\,\bar{\nu}\right]^{1/2}, \tag{18}$$

де $B = \left(b_{pl}\right) = n^{-1}\,\Xi_{(ij)}^T Q_\alpha^{(ij)}\Xi_{(ij)}$; $\bar{\nu}^T = \left(\nu_{ip}^2,\ p=1,\ldots,n\right)$.

Легко перевірити, що власні числа ермітової матриці $B\overline{B}$ обмежені. Тому, використовуючи (3) і (18), одержуємо

$$b(z) = m^{-1}\sum_{k=1}^{m}\{-z+\lambda_k[1-\gamma-z\gamma b(z)]\}^{-1}, \quad z=t+is, \ s\neq 0,$$

причому цей розв'язок існує і єдиний у класі аналітичних функцій

$$L = \{b(z)\colon \operatorname{Im} z \operatorname{Im} b(z)>0, \ \operatorname{Im} z>0\}, \quad c(z)=\int(u-z)^{-1}d\nu(u),$$

де $\nu(u)$ — *деяка функція розподілу.*

***Наслідок* 4.** *Нехай додатково до умов теореми* $\lambda_k\left(R_{m_n}\right)=1;\ k=1,\ldots,m.$ *Тоді для майже всіх* x

$$p\lim_{n\to\infty}\left|\mu_n\left(x,\hat{R}_{m_n}\right)-K_n(x)\right| = 0,$$

де $K_n(x)$ — *функція розподілу, перетворення Стільтьєса якої має вигляд*

$$\int_0^\infty (x-z)^{-1}dK_n(x) = m^{-1}\sum_{k=1}^{m}c_k(z), \quad z=t+is, \ s\neq 0,$$

і функція $c_k(z),\ k=1,\ldots,m,$ *є розв'язком канонічного спектрального рівняння*

$$c_p(z) = \left\{-z+n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\frac{\nu_{pk}^2}{1+n^{-1}\sum_{l=1}^{m_n}\nu_{lk}^2 c_l(z)}\right\}^{-1}; \ p=1,\ldots,m_n,$$

причому цей розв'язок існує і єдиний у класі аналітичних функцій

$$\{c_k(z)\colon \operatorname{Re} c_k(z)>0, \ \textit{коли} \ \operatorname{Re} z<0; \ \operatorname{Im} c_k(z)>0, \ \operatorname{Im} z>0, \ k=1,\ldots,m\},$$

$$c_k(z) = \int_0^\infty (u-z)^{-1}d\nu_k(u),$$

де $\nu_k(u)$ — *деяка функція розподілу.*

1. *Гирко В. Л.* Случайные матрицы. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1975. – 448 с.
2. *Гирко В. Л.* Многомерный статистический анализ. – Киев: Вища шк., 1988. – 320 с.
3. *Гирко В. Л.* Спектральная теория случайных матриц. – М.: Наука, 1988. – 376 с.
4. *Girko V. L.* Theory of random determinants. – Amsterdam: Kluwer Acad. Publ., 1990. – 677 p.
5. *Гирко В. Л.* Теория эмпирических систем уравнений. – Киев: Лыбидь. – 264 с.
6. *Пастур Л. А.* Спектры случайных самосопряженных операторов // Успехи мат. наук. – 1973. – **28**, № 1. – С. 4–63.

Одержано 01.03.94