УДК 517.968

М. Аскаров, асп. (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ МЕТОДОВ ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАТИВНОГО ТИПА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ АНАЛИТИЧЕСКИМИ ЯДРАМИ

Optimal convergence rates of projection-iterative methods and Sokolov's type methods were found for some class of Fredholm equations with analytic kernels arising within the framework of method of boundary integral equations.

Для певного класу рівнянь Фредгольма з аналітичними ядрами, що виникають у методі граничних інтегральних рівнянь, знайдено оптимальні швидкості збіжності проекційно-ітеративних методів та методів типу метода Ю. Д. Соколова.

1. В [1] показано, что интегральные уравнения Фредгольма второго рода с периодическими аналитическими ядрами естественно возникают в рамках метода граничных интегральных уравнений при решении краевых задач в областях, ограниченных замкнутыми аналитическими кривыми. Говоря о периодических аналитических функциях, естественно рассматривать 2π-периодические функции, допускающие аналитическое продолжение в некоторую полосу $\sigma_h = \{z = t + i\tau,\ t \in (-h; h),\ t \in (-\infty, \infty)\}$ комплексной плоскости шириной $2h$.

Пусть L_2 — пространство суммируемых в квадрате на $(0, 2\pi)$ функций с обычной нормой $\|\cdot\|$ и скалярным произведением $(\cdot\,,\cdot)$. Через $\mathcal{A}_2^h$ обозначим пространство непрерывных 2π-периодических функций $f(t)$, допускающих аналитическое продолжение в полосу σ_h. Норма в $\mathcal{A}_2^h$ определяется соотношением $\|f\|_{\mathcal{A}_2^h} = \|f\| + \|A^h f\|$, где A^h — оператор, сопоставляющий каждой функции $f \in \mathcal{A}_2^h$ элемент вида

$$A^h f(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{ch}(kh)\left(a_k(f)\cos kt + b_k(f)\sin kt\right),$$

а $a_k(f)$, $b_k(f)$ — коэффициенты Фурье функции f по тригонометрической системе. Рассмотрим класс $\mathcal{H}_h^* = \mathcal{H}_h^*(\beta)$ интегральных операторов вида

$$Hz(t) = \int_0^{2\pi} H(t;\tau)\, z(\tau)\, d\tau, \tag{1}$$

которые вместе со своими сопряженными операторами H^* действуют из L_2 в $\mathcal{A}_2^h$ и удовлетворяют условиям

$$\|(I-H)^{-1}\|_{L_2 \to L_2} \le \beta_1, \quad \|H\|_{L_2 \to \mathcal{A}_2^h} \le \beta_2, \quad \|H^*\|_{L_2 \to \mathcal{A}_2^h} \le \beta_3,$$
$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3). \tag{2}$$

В настоящей работе исследуются некоторые методы приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$z(t) = Hz(t) + f(t) \equiv \int_0^{2\pi} H(t,\tau)\, z(\tau)\, d\tau + f(t) \tag{3}$$

с операторами $H \in \mathcal{H}_h^*$ и свободными членами из единичного шара в L_2. Класс таких уравнений (3) будем обозначать $\Psi_h^* = \Psi_h^*(\beta)$.

Как отмечалось, классы Ψ_h^*, $0 < h < \infty$, содержат граничные интегральные уравнения (3), возникающие при решении краевых задач в областях, ограниченных аналитическими замкнутыми кривыми.

2. Широкий класс итерационных методов приближенного решения уравнений вида (3) образуют проекционно-итеративные методы [2–4], возникающие на базе известного метода осреднения функциональных поправок, предложенного Ю. Д. Соколовым, и некоторые их обобщения [5], называемые иногда методами типа Соколова. Применительно к уравнениям (3), рассматриваемым в пространстве L_2, суть этих итерационных методов состоит в следующем.

Пусть F_N — подпространство в L_2, $\dim F_N = N$, а P — проектор, действующий из L_2 на F_N. Предположим, что на k-м шаге итерационного процесса в качестве приближенного решения уравнения (3) получена функция $z_k(t)$. Тогда на следующем $(k+1)$-м шаге приближенное решение $z_{k+1}(t)$ строится по формуле

$$z_{k+1} = f + H(z_k + \delta_{k,N}), \tag{4}$$

где $\delta_{k,N}$ — некоторое приближенное решение уравнения для поправок

$$\Delta_k = z - z_k: \quad \Delta_k = H\Delta_k + f + Hz_k - z_k. \tag{5}$$

Если приближенное решение (5) ищется с помощью проекционного метода, построенного на базе проектора P, т. е. $\delta_{k,N}$ определяется из уравнений

$$\delta_{k,N} = PH\delta_{k,N} + P(f + Hz_k - z_k), \tag{6}$$

$$\delta_{k,N} = PH\delta_{k,N} + f + Hz_k - z_k, \tag{7}$$

то соотношения (4), (7) описывают схему итерационного метода, называемого в [5] методом типа Ю. Д. Соколова.

Следуя В. И. Лебедеву [6, с. 254], можно показать, что метод (4), (6) и метод (4), (7) эквивалентны итерационному процессу метода последовательных приближений

$$z_{k+1} \le Tz_k + \psi, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{8}$$

где в случае метода (4), (6)

$$T = T_1 = T_1(H, P) = H(I - PH)^{-1}(I - P), \tag{9}$$

а в случае метода (4), (7)

$$T = T_2 = T_2(H, P) = H(I - PH)^{-1}(H - PH) \tag{10}$$

(ψ — некоторый фиксированный элемент, не зависящий от k). Заметим, что для $H \in \mathcal{H}_h^*$ операторы (9), (10) являются вполне непрерывными операторами из L_2 в L_2. Но тогда (см., например, [7, с. 27]) метод последовательных приближений (8), а следовательно, и методы (4), (6) и (4), (7) сходятся в L_2 к решению уравнения (3) со скоростью геометрических прогрессий, знаменатели $\mu_1(P, H)$ и $\mu_2(P, H)$ которых равны спектральным радиусам операторов (9) и (10) соответственно, т. е.

$$\mu_m(P, H) = \lim_{k\to\infty} \left\| T_m^k(H, P) \right\|_{L_2 \to L_2}^{1/k}, \quad m = 1, 2.$$

Таким образом, при фиксированом H величины $\mu_m(P, H)$, а следовательно, и скорости сходимости методов (4), (6) $(m=1)$ и (4), (7) $(m=2)$ определяются лишь выбором проектора P. Естественно осуществить этот выбор с точки зрения оптимизации скорости сходимости.

Пусть $\mathcal{P}_N$ — множество всевозможных проекторов на различные подпространства L_2 размерности N. Следуя [8], рассмотрим величины

$$\mu_{m,N}(\mathcal{H}_h^*) = \sup_{H\in\mathcal{H}_h^*} \inf_{P\in\mathcal{P}_N} \mu_m(P, H), \quad m = 1, 2,$$

характеризующие оптимальную скорость сходимости методов (4), (6) и (4), (7) на классе уравнений (3) с операторами $H \in \mathcal{H}_h^*$.

Лемма 1. *Справедливо неравенство*

$$\mu_{m,N}(\mathcal{H}_h^*) \geq c \exp(-Nmh/2),$$

где $m = 1, 2$, *а постоянная* c *зависит лишь от параметров, входящих в определение класса* $\mathcal{H}_h^*(\beta)$.

Доказательство. Обозначим через $F_{2\nu+1}^T$ подпространство тригонометрических многочленов порядка не выше ν, $\dim F_{2\nu+1}^T = 2\nu+1$, и пусть, как обычно, S_ν — ортопроектор на $F_{2\nu+1}^T$, сопоставляющий каждой функции $f \in L_2$ частную сумму ее ряда Фурье порядка ν. Известно, что S_ν имеет вид интегрального оператора (1) и допускает представление

$$S_\nu f(t) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\nu} \cos k(t-\tau) \right] f(\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\nu} a_k(f) \cos kt + b_k(f) \sin kt.$$

Кроме того, с учетом [9, с. 187] выполняются соотношения

$$\left\| S_\nu \right\|_{L_2 \to \mathcal{A}_2^h} \asymp \exp(\nu h),$$
$$\left\| I - S_\nu \right\|_{\mathcal{A}_2^h \to L_2} \asymp \exp(-\nu h). \tag{11}$$

Зафиксируем N и положим $\nu = [N/2] + 1$, т. е. $2\nu + 1 > N + 1$. Рассмотрим интегральный оператор $H_\alpha = \alpha \exp(-\nu h) S_\nu$, где параметр α известен и не зависит от ν. Легко видеть, что в силу самосопряженности оператора S_ν

$$\left\| H_\alpha \right\|_{L_2 \to \mathcal{A}_2^h} = \left\| H_\alpha^* \right\|_{L_2 \to \mathcal{A}_2^h} = \alpha \exp(-\nu h) \left\| S_\nu \right\|_{L_2 \to \mathcal{A}_2^h}.$$

Но тогда из первого соотношения (11) следует, что параметр $\alpha = \alpha(\beta)$ можно выбрать так, чтобы $H_\alpha \in \mathcal{H}_h^*(\beta)$. Дальнейший ход рассуждений является модификацией доказательства теоремы 1 из [8].

Пусть F_N — произвольное N-мерное подпространство в L_2 с базисом

$e_1(t), e_2(t), \ldots, e_N(t)$, а P_N — проектор на F_N. Как и в [8], можно показать, что оператор $(I-P_N H_\alpha)^{-1}$ существует и может быть представлен в виде $I-B_N$, $B_N: L_2 \to F_N$. Но тогда из (9) и (10) для $m = 1, 2$ находим

$$T_m^k(H_\alpha, P_N) = \left[H_\alpha^m - H_\alpha B_{N,0}\right]^k = H_\alpha^{km} - \sum_{i=1}^{k} H_\alpha^{mi} B_{N,i},$$

где $B_{N,i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, — некоторые конечномерные операторы, действующие из L_2 в F_N. Заметим, что оператор

$$H_N = \sum_{i=1}^{k} H_\alpha^{mi} B_{N,i} = \sum_{i=1}^{k} \alpha^{mi} \exp(-\nu hmi) S_\nu B_{N,i}$$

действует из L_2 в подпространство F_N^0, являющееся линейной оболочкой функций $S_\nu e_1(t), S_\nu e_2(t), \ldots, S_\nu e_N(t)$, $\dim F_N^0 \le N$. Обозначим через U_{L_2} единичный шар в L_2. Тогда

$$\left\|T_m^k(H_\alpha, P_N)\right\|_{L_2 \to L_2} = \sup_{\varphi \in U_{L_2}} \left\|H_\alpha^{km}\varphi - H_N\varphi\right\| >$$

$$> \sup_{\varphi \in U_{L_2}} \inf_{g \in F_N^0} \left\|H_\alpha^{km}\varphi - g\right\| >$$

$$> \inf_{\substack{F_N \\ \dim F_N = N}} \sup_{\varphi \in U_{L_2}} \inf_{g \in F_N} \left\|H_\alpha^{km}\varphi - g\right\| = d_N\left(H_\alpha^{km} U_{L_2}, L_2\right),$$

где последняя величина — это N-й поперечник по Колмогорову образа единичного шара U_{L_2} при действии оператора H_α^{km}. Если φ пробегает множество $U_{L_2} \cap F_{2\nu+1}^T$, то элементы $H_\alpha^{km}\varphi(t) = \alpha^{km}\exp(-km\nu h)\varphi(t)$ в подпространстве $F_{2\nu+1}^T$ заполняют шар радиуса $\alpha^{km}\exp(-km\nu h)$. Вследствие теоремы о поперечнике шара [10, с. 258] справедливо соотношение

$$\left\|T_m^k(H_\alpha, P_N)\right\|_{L_2 \to L_2} > d_N\left(H_\alpha^{km} U_{L_2}, L_2\right) \ge \alpha^{km}\exp(-km\nu h).$$

Тогда $\mu_m(P_N, H_\alpha) \ge \alpha^m \exp(-m\nu h)$. Поскольку последняя оценка выполняется для любого N-мерного подпространства F_N и любого проектора P_N, то, принимая во внимание включение $H_\alpha \in \mathcal{H}_h^*$, имеем

$$\mu_{m,N}\left(\mathcal{H}_h^*\right) \ge \inf_{P_N \in \mathcal{P}_N} \mu_m(P_N, H_\alpha) \ge \alpha^m \exp(-m\nu h) \asymp$$

$$\asymp (-mNh/2).$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Справедливо соотношение*

$$\mu_{1,N}\left(\mathcal{H}_h^*\right) \asymp \exp\left(-\frac{Nh}{2}\right).$$

Оптимальный порядок скорости сходимости проекционно-итеративных методов на классе $\mathcal{H}_h^*$ обеспечивается тогда, когда в рамках схемы (4), (6) *в качестве проектора P выбран S_ν, $\nu = [(N-1)/2]$.*

Доказательство. Искомая оценка снизу следует из леммы 1 при $m=1$. Для получения соответствующей оценки сверху достаточно воспользоваться вторым соотношением (11) и применить общую теорему 1 из [11], в которой $X = L_2$, $Y = \mathcal{A}_2^h$ и $F_N = F_{2\nu+1}^T$, $\nu = [(N-1)/2]$.

Теорема 2. *Справедливо соотношение*

$$\mu_{2,N}\left(\mathcal{H}_h^*\right) \asymp \exp(-Nh).$$

Оптимальный порядок скорости сходимости методов типа метода Ю. Д. Соколова на классе $\mathcal{H}_h^*$ *обеспечивается тогда, когда в рамках схемы* (4), (7) *в качестве проектора* P *выбран* S_ν, $\nu = [(N-1)/2]$.

Доказательство. Искомая оценка снизу следует из леммы 1 при $m=2$. Для получения соответствующей оценки сверху достаточно показать, что при $\nu = [(N-1)/2]$ для любого оператора $H \in \mathcal{H}_h^*$

$$\| T_2(H, S_\nu) \|_{L_2 \to L_2} \le c \exp(-Nh), \tag{12}$$

где постоянная c зависит лишь от параметров, входящих в определение класса $\mathcal{H}_h^*(\beta)$. В самом деле,

$$\mu_{2,N}\left(\mathcal{H}_h^*\right) \le \sup_{H \in \mathcal{H}_h^*} \mu_2(S_\nu, H) = \sup_{H \in \mathcal{H}_h^*} \lim_{k \to \infty} \left\| T_2^k(H, S_\nu) \right\|_{L_2 \to L_2}^{1/k} \le$$

$$\le \sup_{H \in \mathcal{H}_h^*} \| T_2(H, S_\nu) \|_{L_2 \to L_2}. \tag{13}$$

Таким образом, если соотношение (12) установлено, то искомая оценка сверху следует из (12) и (13). Перейдем к доказательству неравенства (12). Из теоремы 1 [11] и соотношения (11) следует, что для достаточно больших N и $\nu = [(N-1)/2]$ таких, что

$$\omega = \beta_1 \beta_2 \left\| I - S_\nu \right\|_{\mathcal{A}_2^h \to L_2} \asymp \exp(-\nu h) < 1,$$

для любого $H \in \mathcal{H}_h^*$ выполняется неравенство

$$\| (I - S_\nu H)^{-1} \|_{L_2 \to L_2} < \frac{\beta_1}{1-\omega}.$$

Воспользовавшись теперь представлением (14) из [5], находим

$$T_2(H, S_\nu) = (I-H)^{-1} H (I - S_\nu) H +$$

$$+ (I-H)^{-1} H (S_\nu - I) H (I - S_\nu H)^{-1} (I - S_\nu) H. \tag{14}$$

Оценим норму каждого слагаемого в (14). В силу (2) и (11) для любого $H_\alpha \in \mathcal{H}_h^*(\beta)$ получаем

$$\| (I-H)^{-1} H (I - S_\nu) H \|_{L_2 \to L_2} \le$$

$$\le \beta_1 \| H (I - S_\nu)(H - S_\nu H) \|_{L_2 \to L_2} \le$$

$$\le \beta_1 \left\| I - S_\nu \right\|_{\mathcal{A}_2^h \to L_2} \|H\|_{L_2 \to \mathcal{A}_2^h} \sup_{\substack{g, f \in L_2, \\ \|g\| \le 1, \|f\| \le 1}} |(H(I - S_\nu) g, f)| \le$$

$$\leq \beta_1 \beta_2 \left\| I - S_\nu \right\|_{\mathcal{A}_2^h \to L_2} \sup_{\|g\| \leq 1,\, \|f\| \leq 1} |(g, (I - S_\nu) H^* f)| \leq$$

$$\leq \beta_1 \beta_2 \left\| I - S_\nu \right\|^2_{\mathcal{A}_2^h \to L_2} \left\| H^* \right\|_{L_2 \to \mathcal{A}_2^h} \leq \beta_1 \beta_2 \beta_3 \left\| I - S_\nu \right\|^2_{\mathcal{A}_2^h \to L_2} \asymp$$

$$\asymp \exp(-2\nu h) \asymp \exp(-Nh). \tag{15}$$

Аналогично

$$\| (I-H)^{-1} H (S_\nu - I) H (I - S_\nu H)^{-1} (I - S_\nu) H \|_{L_2 \to L_2} \leq$$

$$\leq \beta_1 \beta_2 \beta_3 \left\| I - S_\nu \right\|^2_{\mathcal{A}_2^h \to L_2} \left\| (I - S_\nu H)^{-1} \right\|_{L_2 \to L_2} \left\| I - S_\nu \right\|_{\mathcal{A}_2^h \to L_2} \| H \|_{L_2 \to \mathcal{A}_2^h} \leq$$

$$\leq \frac{\beta_2^1 \beta_2^2 \beta_3}{1 - \omega} \left\| I - S_\nu \right\|^3_{\mathcal{A}_2^h \to L_2} \asymp \exp(-3\nu h) \asymp \exp(-3Nh/2). \tag{16}$$

Неравенство (12) вытекает теперь из (14)–(16). Теорема доказана.

Из теорем 1 и 2 следует, что на классе $\mathcal{H}_h^*$ оптимальная скорость сходимости проекционно-итеративных методов (4), (6) в два раза меньше по порядку, чем оптимальная скорость сходимости методов типа метода Ю. Д. Соколова (4), (7). Однако, как отмечалось в [6, с. 259], эффективность того или иного итерационного метода определяется не только скоростью сходимости, но и числом операций, произведенных до того момента, когда оказалось выполненным некоторое условие и итерационный процесс был остановлен. В качестве такого условия остановки можно рассматривать условие достижения заданной точности на фиксированном классе уравнений $\Psi_h^*(\beta)$, т. е. итерационный процесс останавливается на k-м шаге, если

$$\sup_{\substack{z = Hz + f, \\ H \in \mathcal{H}_h^*,\, f \in U_{L_2}}} \| z - z_k \| \asymp \varepsilon. \tag{17}$$

С другой стороны, итерационные методы (4), (6) и (4), (7), определяемые проектором $P = S_\nu$, $\nu = [(N-1)/2]$, сходятся на классе $\mathcal{H}_h^*$ с оптимальными по порядку скоростями геометрических прогрессий со знаменателями

$$\mu_m(S_\nu, \mathcal{H}_h^*) = \sup_{H \in \mathcal{H}_h^*} \mu_m(S_\nu, H) \asymp \exp(-Nmh/2), \quad m = 1, 2,$$

соответственно, т. е. для этих методов

$$\sup_{\substack{z = Hz + f, \\ H \in \mathcal{H}_h^*,\, f \in U_{L_2}}} \| z - z_k \| \asymp \exp(-Nmkh/2), \quad m = 1, 2.$$

Зафиксируем теперь N и пусть $\gamma > 0$ таково, что $\varepsilon \asymp \exp(-Nh\gamma)$. Тогда в силу теоремы 1 $(m = 1)$ для проекционно-итеративного метода (4), (6), определяемого проектором $P = S_\nu$, условие (17) будет удовлетворено после выполнения $k = [2\nu)$ итераций, где $[p)$ — минимальное целое число не меньше p. Кроме того, из теоремы 2 следует, что для метода (4), (7), определяемого тем же проектором $P = S_\nu$, условие (17) будет удовлетворено после выполнения $k = [\gamma)$ итераций.

Оценим число основных операций, которые нужно выполнить при рассматриваемых итерационных методах для удовлетворения условия (17). Следуя [6, с. 261], к таким основным операциям отнесем K-операцию определения вспомогательного элемента $H\varphi$ и P-операцию решения уравнений вида (6), (7) с N-мерным оператором $S_\nu H$. Подчеркнем, что в рамках методов (4), (6) и (4), (7), определяемых проектором $P = S_\nu$, операция P сводится, по сути дела, к решению системы $(2\nu+1)$ линейных алгебраических уравнений с одной и той же матрицей.

Проанализируем методы (4), (6) и (4), (7) при $P = S_\nu$, $\nu = [(N-1)/2]$. Если до начала итерационного процесса $(2\nu+1)$-раз выполнить K-операцию для нахождения функций $H\cos kt$, $H\sin kt$, $k = 0, 1, \ldots, \nu$, то в рамках метода (4), (6) на каждой итерации нужно выполнить две K-операции (найти Hz и $H(f+Hz_k-z_k)$) и одну P-операцию. Таким образом, с учетом изложенного выше для выполнения условия (17) при методе (4), (6) требуется выполнить $(2\nu+1+[2\gamma))$ K-операций и $[2\gamma)$ P-операций, а при методе (4), (7) для выполнения того же условия необходимо $(2\nu+1+2[\gamma))$ K-операций и $[\gamma)$ P-операций. Иными словами, для достижения заданной точности на классе $\mathcal{H}_h^*$ при рассматриваемых итерационных методах необходимо выполнить примерно равное число K-операций но при этом проекционно-итеративный метод (4), (6) требует выполнения в два раза большего числа P-операций.

1. *Зализняк С. Н., Мельник Ю. И., Подлипенко Ю. К.* О приближенном решении интегральных уравнений теории потенциала // Укр. мат. журн. – 1991. – **33**, № 3. – С. 382–391.
2. *Лучка А. Ю.* Теория и применение метода осреднения функциональных поправок. – Киев: Изд-во АН УССР, 1963. – 128 с.
3. *Курпель Н. С.* Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1968. – 244 с.
4. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративые методы. – Киев: Наук. думка, 1993. – 287 с.
5. *Переверзев С. В.* О скорости сходимости методов типа метода Ю. Д. Соколова для интегральных уравнений с дифференцируемыми ядрами // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 5. – С. 605–609.
6. *Марчук Г. И., Лебедев В. И.* Численные методы в теории переноса нейтронов. – М.: Атомиздат, 1971. – 492 с.
7. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 496 с.
8. *Переверзев С. В., Синенко М. А.* Об оптимальной скорости КР-метода и некоторых его обобщений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1991. – **31**, № 10. – С. 1452–1460.
9. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.
10. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
11. *Синенко М. А.* О связи между проекционно-итеративным методом и КР-методом для уравнений второго рода // Совр. вопр. теории приближения и комплекс. анализа. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. – С. 112–113.

Получено 04.05.94