УДК 517.9

О. В. Капустян (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка),
Д. В. Шкундін (Ін-т прикл. систем. аналізу НАН України, Київ)

ГЛОБАЛЬНИЙ АТРАКТОР ОДНОГО НЕЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ*

We apply the theory of multivalued semiflows to a nonlinear parabolic reaction-diffusion equation in the case where it is impossible to prove the uniqueness of solution of this equation. The multivalued semiflow is generated by solutions that satisfy certain time-global estimate. We prove the existence of a global compact attractor in the phase space for multivalued semiflow generated by nonlinear parabolic equations. We prove that this attractor is an upper semicontinuous function of a parameter.

Теорія багатозначних напівпотоків застосовується до нелінійного параболічного рівняння типу „реакція-дифузія" у випадку, коли для останнього не вдається довести єдиність розв'язку. Багатозначний напівпотік породжується розв'язками, що задовольняють певну глобальну за часом оцінку. Отримано існування глобального компактного атрактора у фазовому просторі для багатозначного напівпотоку, породженого нелінійним параболічним рівнянням. Доведено, що цей атрактор є напівнеперервною зверху функцією параметра.

1. Теорема існування розв'язку. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область з гладкою межею $\partial\Omega$, $\Omega_T = \Omega \times [0, T]$. Норму і скалярний добуток в $L_2(\Omega)$ будемо позначати через $\|\cdot\|$ і $(\cdot, \cdot)$, простір $L_2(\Omega)$ — через H. Нехай (X, ρ) — метричний простір, $2^X(P(X); \beta(X))$ — сукупність всіх (непорожніх; непорожніх і обмежених) підмножин простору X. Означення основних функціональних просторів запозичено в [1].

Розглянемо в області Ω_T задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u - f(u) + \lambda u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} - g(x), \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad u_0 \in L_2(\Omega). \tag{3}$$

Припускаємо, що $a > 0$, $\lambda > 0$,

$$|b_i(x)| \le C, \tag{4}$$

$f \in C(\mathbb{R})$ та задовольняє вимоги

$$f(u)u \ge \mu_0|u|^p, \quad |f(u)u| \le \mu_1|u|^{p-1} + C, \quad p > 2, \tag{5}$$

$$g \in L_2(\Omega).$$

Теорема 1. *При сформульованих вище умовах задача* (1) – (3) *має принаймні один розв'язок* $u(x, t)$, *що належить до класу* $L_2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right) \cap L_p(\Omega_T)$.

Означення 1. *Рівняння* (1) *розуміється як рівність в* $L_q\left(0, T; H^{-s}(\Omega)\right)$, *де* q *є спряженим індексом до* p *із* (5).

Це означає, що для кожного $v \in L_p(0, T; H^s(\Omega))$

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, v \right\rangle = \langle a\Delta u, v\rangle - \langle f(u), v\rangle + \langle \lambda u, v\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}, v \right\rangle - \langle g(x), v\rangle$$

* Виконана при фінансовій підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень (грант № 01.07-00081).

для майже всіх (м. в.) $t \in [0, T]$. Поклавши $s = 1$, отримаємо, що рівняння розуміється як рівність у просторі $L_q(0, T; H^{-1}(\Omega))$.

***Доведення теореми* 1.** Існування розв'язку встановлюється за допомогою методу гальоркінських апроксимацій.

Розглянемо апроксимуючий розв'язок $u_n(t)$, що належить скінченновимірному простору, натягненому на перші n власних функцій оператора $-\Delta$:

$$u_n(t) = \sum_{j=1}^{n} u_{nj}(t) e_j, \tag{6}$$

і розв'язує задачу

$$\left\langle \frac{\partial u_n}{\partial t}, e_j \right\rangle - \left\langle a\Delta u_n, e_j \right\rangle = \left\langle -f(u_n), e_j \right\rangle + \left\langle \lambda u_n, e_j \right\rangle -$$

$$- \left\langle g, e_j \right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u_n}{\partial x_i}, e_j \right\rangle,$$

$$1 \le j \le n,$$

з $(u_n(0), e_j) = (u_0, e_j)$. Останнє має місце, оскільки $e_j \in H_0^1(\Omega)$. Із (6) маємо $u_{nj} = (u_n, e_j)$. Позначимо $Au_n = a\Delta u_n$. Тоді $(Au_n, e_j) = \lambda u_{nj}$. Таким чином, маємо n диференціальних рівнянь для компоненти u_n:

$$\begin{gathered} \frac{\partial u_n}{\partial t} - Au_n = -\Pi_n B u_n, \\ u_n\big|_{t=0} = u_{n0}, \end{gathered} \tag{7}$$

де

$$Bu_n = f(u_n) - \lambda u_n - \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} + g.$$

Аналогічно [1] отримуємо диференціальну нерівність

$$\frac{d}{dt}\| u_n(t) \|^2 \le -\| u_n(t) \|^2 + \| g \|^2 + C_1, \tag{8}$$

з якої випливає оцінка

$$\| u_n(t) \|^2 \le \| u_n(0) \|^2 e^{-t} + (1 - e^{-t})\left(\| g \|^2 + C_1\right). \tag{9}$$

З останньої, зокрема, випливає, що розв'язок $u_n(t)$ рівняння (7) продовжується по t на піввісь $0 \le t < \infty$. Також аналогічно [1] отримуємо

$$\| u_n(T) \|^2 + 2\mu_0 \int_0^T \int_\Omega | u_n(x,t) |^p \, dx\, dt + \int_0^T \| u_n(t) \|^2_{H_0^1(\Omega)} dt \le \| u_n(0) \|^2 + C_2 T.$$

З останньої нерівності випливає

$$\sup_{t \in [0, T]} \| u_n(t) \|^2 \le K,$$

$$\int_0^T |u_n(t)|^2_{H_0^1(\Omega)}\, dt \le K,$$

$$\int_0^T \int_\Omega |u_n(x,t)|^p\, dx\, dt \le \frac{K}{2\mu_0},$$

де $K = \| u_n(0) \|^2 + C_2 T$.

Отже, можемо записати:

u_n рівномірно обмежена в $L_\infty(0, T; H)$;

u_n рівномірно обмежена в $L_2(0, T; H_0^1)$;

u_n рівномірно обмежена в $L_p(\Omega_T)$.

Використаємо обмеженість u_n в $L_p(\Omega_T)$ для доведення обмеженості $f(u_n)$ в $L_q(\Omega_T)$, де $1/p + 1/q = 1$:

$$\| f(u_n) \|^q_{L_q(\Omega_T)} = \int_0^T \left(\int_\Omega |f(u_n)|^q\, dx \right) dt \le$$

$$\le \int_0^T \left(\int_\Omega \left(\mu_1 |u_n|^{p-1} + C \right)^q dx \right) dt \le \int_0^T \int_\Omega \left(\mu_1^q |u_n|^{q(p-1)} + C^q \right) dx\, dt \le$$

$$\le \int_0^T \int_\Omega \left(\mu_1^q |u_n|^p + C^q \right) dx\, dt.$$

Отже, $f(u_n)$ рівномірно обмежена в $L_q(\Omega_T)$.

Доведемо, що похідні $\dfrac{\partial u_n}{\partial t}$ також рівномірно обмежені. По-перше, зауважимо, що $L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ та $L_q(0, T; L_q(\Omega))$ неперервно вкладені в $L_q(0, T; H^{-s}(\Omega))$. Таким чином, оскільки

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = a\Delta u_n - f(u_n) + \lambda u_n + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - g(x),$$

то $\dfrac{\partial u_n}{\partial t}$ рівномірно обмежена в $L_q(0, T; H^{-s}(\Omega))$. Отже, вибравши підпослідовність, можемо гарантувати, що $\dfrac{\partial u_n}{\partial t} \rightharpoonup \dfrac{\partial u}{\partial t}$. Зауважимо, що

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L_2\left(0, T; H_0^1\right) + L_q(\Omega_T).$$

Виділимо слабку підпослідовність із послідовності u_n. Цю підпослідовність будемо також позначати u_n. Маємо

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad L_2\left(0, T; H_0^1\right),$$

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad L_p(\Omega_T),$$

$$f(u_n) \rightharpoonup \chi \quad \text{в} \quad L_p(\Omega_T).$$

Неважко бачити, що

$$u_n \to u \quad \text{в} \quad L_2(0, T; H). \tag{10}$$

Справді, u_n рівномірно обмежена в $L_2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right)$, а $\dfrac{\partial u_n}{\partial t}$ — в $L_q(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Оскільки $H_0^1(\Omega) \subset\subset L_2(\Omega) \subset H^{-s}(\Omega)$ та $H_0^1(\Omega)$ є рефлексивним, застосувавши теорему про компактність [2], отримаємо (10).

Для завершення доведення теореми залишилось показати, що $\eta = f(u)$. Оскільки $u_n \to u$ в $L_2(\Omega_T)$, існує підпослідовність u_{n_i} така, що $u_{n_i}(x, t) \to \to u(x, t)$ для м. в. $(x, t) \in \Omega_T$. Із неперервності функції f випливає, що $f\left(u_{n_i}(x, t)\right) \to f(u(x, t))$ для м. в. $(x, t) \in \Omega_T$. Беручи до уваги обмеженість $f\left(u_{n_i}\right)$ в $L_q(\Omega_T)$, отримуємо $f\left(u_{n_i}\right) \rightharpoonup f(u)$ в $L_q(\Omega_T)$, а враховуючи єдиність слабкої границі, приходимо до висновку, що $\eta = f(u)$.

***Зауваження* 1.** Із оцінки (8) неважко отримати оцінку

$$\|u(t)\|^2 \le \|u(s)\|^2 e^{-(t-s)} + C_3. \tag{11}$$

Лема 1. *Якщо*

$$u \in L_2(0, T; H^1) \cap L_p(\Omega_T)$$

та

$$\frac{du}{dt} \in L_2\left(0, T; H^{-1}\right) + L_q(\Omega_T),$$

то $u \in C(0, T; L_2(\Omega))$.

Доведення. Апроксимуємо u послідовністю $u_n \in C^1([0, T]; H^1)$, яка збігається до u в сенсі:

$$u_n \to u \quad \text{в} \quad L_2(0, T; H^1) \cap L_p(\Omega_T),$$
$$\frac{du_n}{dt} \to \frac{du}{dt} \quad \text{в} \quad L_2(0, T; H^{-1}) + L_q(\Omega_T).$$

Тоді для кожного t^0

$$|u_n(t)|^2 = \left|u_n(t^0)\right|^2 + 2\int_{t^0}^{t} \langle \dot{u}_n(s), u_n(s)\rangle\, ds.$$

Виберемо t^0 так, щоб

$$\left|u_n(t^0)\right|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |u_n(t)|^2\, dt.$$

Позначимо через $X(t_1, t_2)$ простір $L_2(t_1, t_2; H^1) \cap L_p(\Omega \times (t_1, t_2))$, а через $X^*(t_1, t_2)$ простір $L_2(t_1, t_2; H^{-1}) + L_q(\Omega \times (t_1, t_2))$. Отримаємо оцінку

$$\int_\Omega |u_n(t)|^2\, dx = \frac{1}{T}\int_\Omega \int_0^T |u_n(t)|^2\, dt\, dx + 2\int_\Omega \int_{t^0}^{t} \dot{u}_n(s) u_n(s)\, ds\, dx \le$$

$$\le \frac{1}{T}\int_\Omega \int_0^T |u_n(t)|^2\, dt\, dx + 2\|\dot{u}_n\|_{X^*(t^0, t)} \|u_n\|_{X(t^0, t)} \le$$

$$\le \frac{1}{T}\int_\Omega \int_0^T |u_n(t)|^2\, dt\, dx + 2\|\dot{u}_n\|_{X^*(0, T)} \|u_n\|_{X(0, T)}.$$

Отже, u_n є послідовністю Коші в $C([0, T]; L_2(\Omega))$. Таким чином, доведено, що $u \in C([0, T]; L_2(\Omega))$.

Зауваження 2. В умовах леми 1 справедлива оцінка

$$\int_0^T |u_t(s)|^2\, ds + \|u(t)\|^2 \le C_*\left(1 + \|u(0)\|^2\right). \tag{12}$$

Справді, розглядаючи гальоркінські апроксимації і повторюючи міркування [1], отримуємо для них оцінку (12).

2. Існування глобального атрактора. У цьому пункті вивчається поведінка розв'язків задачі (1), отриманих за допомогою теореми 1, при великих t. По-перше, умови теореми 1 ні в якому разі не гарантують єдиності розв'язку задачі (1), оскільки ми не накладаємо ніяких умов на похідну функції f. Тому застосуємо апарат теорії багатозначних напівпотоків [3–5], який дозволяє перенести значну кількість результатів теорії динамічних систем.

Означення 2. *Відображення*

$$G(\cdot,\cdot)\colon [0,+\infty) \times L_2(\Omega) \to 2^{L_2(\Omega)}$$

називається м-напівпотоком, якщо:

1) $G(0, x) = x$ *для довільних* $x \in L_2(\Omega)$;

2) $G(t_1 + t_2, x) \subset G(t_1, G(t_2, x))$ *для довільних* $x \in L_2(\Omega)$, $t_1, t_2 \ge 0$.

Утворимо таке багатозначне відображення:

$$G(t, u_0) = \{u(t) \,|\, u(\cdot) \text{ — розв'язок (1),}$$

$$\text{для якого справджується оцінка (11), } u(0) = u_0\},$$

$$G(\cdot,\cdot)\colon R_+ \times L_2(\Omega) \to 2^{L_2(\Omega)}.$$

Теорема 1 стверджує, що так побудоване відображення G непорожнє для довільних $u_0 \in L_2(\Omega)$ і $t \ge 0$, зокрема воно охоплює всі розв'язки, отримані за допомогою гальоркінських апроксимацій.

Лема 2. *Так побудоване багатозначне відображення G є м-напівпотоком.*

Доведення. Перевіримо умови означення м-напівпотоку. Умова 1 очевидна. Перевіримо умову 2. Для цього рівняння (1) перепишемо у вигляді

$$\begin{gathered} \frac{\partial u(t)}{\partial t}(x) = Au(t)(x), \\ [u(0)](x) = u_0(x), \end{gathered} \tag{13}$$

де

$$Au = a\Delta u - f(u) + \lambda u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} - g(x).$$

Нехай $u \in G(t_1 + t_2, x)$. Тоді $u = u(t_1 + t_2)$, де $u(\cdot)$ — розв'язок рівняння (13), що задовольняє оцінку (11) та початкову умову $u(0) = u_0$. Оскільки $u(t_2) \in G(t_2, x)$, то достатньо показати, що $u \in G(t_1, u(t_2))$. Нехай $y(t) = y(t + t_2)$ $\forall t \ge 0$. Очевидно, що для будь-якого $T > 0$ існує розв'язок $y(\cdot)$ системи

$$\frac{\partial y(t)}{\partial t} = Ay(t), \quad t \in [0, T],$$

$$y(0) = u(t_2).$$

Таким чином, $u = y(t_1) \in G(t_1, u(t_2))$.

Означення 3. *Множина* $\Psi \subset L_2(\Omega)$ *називається глобальним атрактором м-напівпотоку* G, *якщо*:

Ψ — *притягуюча множина, тобто* $\operatorname{dist}(G(t, B), \Psi) \to 0$ *при* $t \to \infty$ *для довільної множини* $B \in \beta(L_2(\Omega))$;

Ψ — *напівінваріантна, тобто* $\Psi \subset G(t, \Psi)$ *для довільних* $t \geq 0$;

$\Psi \neq L_2(\Omega)$ *і якщо* Φ — *довільна притягуюча множина, то* $\Psi \subset \overline{\Phi}$.

Теорема 2. *Для м-напівпотоку* G *існує глобальний атрактор, компактний у просторі* $L_2(\Omega)$.

Доведення. Згідно з теоремою 3 [3] потрібно перевірити такі умови:

1) G — точково дисипативний;

2) $G(t, \cdot)$ — замкнене відображення для довільного $t \in R_+$, тобто якщо для довільного $t \geq 0$ $\xi_n \to \xi$, $\eta_n \to \eta$, $\xi_n \in G(t, \eta_n)$, то $\xi \in G(t, \eta)$;

3) G — асимптотично напівкомпактний зверху, тобто якщо $\xi_n \in G(t, B)$, $t_n \to +\infty$, B — обмежена множина у фазовому просторі X, то послідовність $\{\xi_n\}$ передкомпактна в X.

Лема 3. *Рівняння реакції-дифузії має поглинаючу множину в* $L_2(\Omega)$; *існують константа* C_4 *та час* $t_0(\| u_0 \|)$ *такі, що для розв'язку* $u(t, \cdot) = G(t, u(0, \cdot))$

$$\| u(t) \| \leq C_4 \quad \forall t \geq t_0(\| u_0 \|).$$

Доведення. Із нерівності (9) випливає

$$\| u(t) \|^2 \leq \| u(0) \|^2 e^{-t} + (1 - e^{-t})(\| g \|^2 + C_2).$$

Отже, якщо

$$t \geq t_0(\| u_0 \|) = \ln \frac{\| u_0 \|^2}{\| g \|^2 + C_2},$$

то

$$\| u(t) \|^2 \leq C_4^2 = 2\left(\| g \|^2 + C_2\right).$$

1. Із леми 3 випливає, що G є точково дисипативним в $L_2(\Omega)$. За поглинаючу множину B_0 можна взяти кулю B_r, де $r^2 = 2(\| g \|^2 + C + 1)$.

2. Нехай

$$\xi_n \in G(t, \eta_n), \qquad T > t, \qquad \xi_n \to \xi, \qquad \eta_n \to \eta.$$

Тоді $\xi_n = u_n(t)$, $\eta_n = u_n(0)$, u_n — розв'язки рівняння (1), що задовольняють умову (11). Згідно з теоремою про компактність [2] можемо стверджувати, що існує функція u така, що деяка підпослідовність послідовності u_n (залишимо за нею те саме позначення) слабко збігається до u в $L_2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right)$, u_{n_t} слабко збігається до u_t в $L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, $u_n(t) \to u(t)$ в $L_2(\Omega)$ для м. в. $t \in [0, T]$ і слабко збігається в $L_2(\Omega)$ для кожного $t \in [0, T]$. Тоді для того щоб перейти до границі в означенні 1, записаному для u_n, залишається довести, що $f(u_n(x, t)) \rightharpoonup f(u(x, t))$ в $L_2(\Omega_T)$. Оскільки $u_n(t) \to u(t)$ в $L_2(\Omega)$ для м. в. $t \in [0, T]$, можна вибрати підпослідовність таку, що $u_n(x, t) \to u(x, t)$ для м. в. $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$. Таким чином, з неперервності $f(u)$ маємо, що $f(u_n(x, t)) \rightharpoonup f(u(x, t))$ для м. в. $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$. Беручи до уваги умову (5), отримуємо шукане. Враховуючи, що $u_n(t) \rightharpoonup u(t)$ в $L_2(\Omega)$ для довільного $t \in [0, T]$, маємо $\xi = u(t)$, $\eta = u(0)$. Для того щоб стверджувати, що $\xi \in G(t, s)$, потрібно переконатись у тому, що для u виконується (11) для довільних t, s, $t \geq s$.

Лема 4. *Нехай g_n, $g : [0, T] \to R$, — вимірні, скрізь визначені, монотонно незростаючі (або монотонно неспадні) функції, $n \geq 1$, g — неперервна і $g_n(t) \to g(t)$ для м. в. $t \in [0, T]$. Тоді $g_n(t) \to g(t)$ для довільних $t \in (0, T)$.*

Доведення. Припустимо, що g_n, g — монотонно незростаючі (для монотонно неспадних функцій доведення аналогічне), $t_0 \in (0, T)$. Існує послідовність $t_m \subset (0, T)$ така, що для довільного $m \geq 1$ $g_n(t_m) \to g(t_m)$ і $t_m \to t_0$, $t_m < t_0$. Тоді

$$g_n(t_0) - g(t_0) = g_n(t_0) - g_n(t_m) + g_n(t_m) - g(t_m) + g(t_m) - g(t_0),$$

і оскільки для довільного $n \geq 1$ $g_n(t_m) \geq g_n(t_0)$, для довільного $\varepsilon > 0$ існують $N \geq 1$, $m \geq 1$ такі, що для довільних $n \geq N$

$$g_n(t_0) - g(t_0) \leq |g_n(t_m) - g(t_m)| + |g(t_m) - g(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Аналогічно, вибираючи $t_m > t_0$, приходимо до висновку, що для довільного ε існує $N \geq 1$ таке, що для довільних $n \geq N$ $g(t_0) - g_n(t_0) < \varepsilon$. Отже, $g_n(t_0) \to$ $\to g(t_0)$ і на підставі довільності $t_0 \in (0, T)$ одержуємо шукане.

Лема 5. *Нехай функції u_n, u, $n \geq 1$, належать $C(0, T; L_2(\Omega))$, $u_{n_t} \rightharpoonup u_t$ в $L_2(\Omega_T)$, $u_n(t) \to u(t)$ в $L_2(\Omega)$ сильно для м. в. $t \in [0, T]$ і слабко для довільних $t \in [0, T]$ і для довільних $t \geq s$, для м. в. $s \geq 0$ виконуються нерівності*

$$\frac{a}{2}\|u_n(t)\|^2 - \frac{a}{2}\|u_n(s)\|^2 \leq \int_s^t (u_n, u_{n_t})\, d\tau -$$

$$- \int_s^t \left(g(x), u_{n_t}\right) d\tau + \int_s^t \left(\sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}, \frac{\partial u_n}{\partial t}\right) d\tau + \int_s^t \mu C\, d\tau,$$

$$\frac{a}{2}\|u(t)\|^2 - \frac{a}{2}\|u(s)\|^2 \leq \lambda\int_s^t (u, u_t)\, d\tau -$$

$$- \int_s^t (g(x), u_t)\, d\tau + \int_s^t \left(\sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) d\tau + \int_s^t \mu C\, d\tau.$$

Тоді $u_n(t) \to u(t)$ для довільних $t \in (0, T)$.

Доведення. Введемо функції

$$F_n(t) = \frac{a}{2}\|u_n(t)\|^2 - \lambda\int_0^t (u_n, u_{n_t})\, d\tau +$$

$$+ \int_0^t \left(g(x), u_{n_t}\right) d\tau - \int_0^t \left(\sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}, \frac{\partial u_n}{\partial t}\right) d\tau - \int_0^t \mu C\, d\tau,$$

$$F(t) = \frac{a}{2}\|u(t)\|^2 - \lambda\int_0^t (u, u_t)\, d\tau +$$

$$+\int_0^t (g(x), u_t)\,d\tau - \int_0^t \left(\sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) d\tau - \int_0^t \mu C\,d\tau.$$

Тоді з умов леми маємо $F_n(t) \le F_n(s)$, $F(t) \le F(s)$ для довільних $t \ge s$, для м. в. $s \ge 0$. Але з умов леми і вигляду функцій F_n, F отримуємо, що F_n, $F \in C([0, T])$, отже, наведені вище нерівності виконуються для довільних t, s, $t \ge s \ge 0$. На підставі попередніх результатів можемо стверджувати, що для довільного $T > 0$ $F_n(t) \to F(t)$ для м. в. $t \in [0, T]$. Тоді з леми 4 випливає, що $F_n(t) \to F(t)$ для довільних $t \in (0, T)$. Тепер врахуємо, що

$$\underline{\lim}(x_n + y_n) \ge \underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n,$$

і перейдемо до нижньої границі в $F_n(t)$. З одного боку,

$$\underline{\lim}\, F_n(t) = F(t) = \frac{a}{2}\|u(t)\|^2 - \lambda\int_0^t (u, u_t)\,d\tau +$$

$$+\int_0^t (g(x), u_t)\,d\tau - \int_0^t \left(\sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) d\tau - \int_0^t \mu C\,d\tau,$$

а з іншого —

$$\underline{\lim}\, F_n(t) \ge \frac{a}{2}\underline{\lim}\|u(t)\|^2 - \lambda\int_0^t (u, u_t)\,d\tau +$$

$$+\int_0^t (g(x), u_t)\,d\tau - \int_0^t \left(\sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) d\tau - \int_0^t \mu C\,d\tau.$$

Отже, $\underline{\lim}\|u_n(t)\| \le \|u(t)\|$, але внаслідок слабкої збіжності $u_n(t)$ до $u(t)$ маємо обернену нерівність. Лему доведено.

Для завершення доведення п. 2 теореми залишилося перейти до границі в оцінці (11).

3. Згідно з (11) існує обмежена в $L_2(\Omega)$ множина B_0 (п. 1) така, що для довільної обмеженої в $L_2(\Omega)$ множини B існує таке $T_B > 0$, що для довільного $t \ge T_B$ $G(t, B) \subset B_0$. Тоді, використовуючи властивість м-напівпотоку $G(t_1 + t_2, B) \subset G(t_1, G(t_2, B))$, маємо

$$\xi_n \in G(t_n, B) = G(t_n - t_* + t_*, B) \subset G(t_*, G(t_n - t_*, B)) \subset G(t_*, B_0)$$

для досить великих $n \ge 1$. Оскільки існує $R > 0$ таке, що $B_0 \subset B_R(0)$, то $\xi_n \in G\big(t_*, \overline{B_R(0)}\big)$, починаючи з деякого n.

Лема 6. *Для довільних* $R \ge 0$, $t_* > 0$ $G\big(t_*, \overline{B_R(0)}\big)$ *— компакт в* $L_2(\Omega)$.

Доведення. Виберемо $T > t_*$. Як і в п. 2, існують u_n: $\xi_n = u_n(t_*)$, $u_n(0) \in \overline{B_R(0)}$,. а також u така, що деяка підпослідовність послідовності u_n (залишимо за нею те саме позначення) слабко збігається до u в $L_2\big(0, T; H_0^1(\Omega)\big)$, u_{n_t} слабко збігається до u_t в $L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, $u_n(t) \to u(t)$ в $L_2(\Omega)$ для м. в. $t \in [0, T]$ і слабко збігається в $L_2(\Omega)$ для кожного $t \in [0, T]$. Безпосередньо переходячи до границі при $n \to \infty$, переконуємось, що u — розв'язок рівняння (1) на $[0, T]$. Крім того, $u_n(0) \in \overline{B_R(0)}$, отже, внаслідок слабкої збіжності $u_n(t)$ до $u(t)$ в $L_2(\Omega)$ для довільних $t \in [0, T]$ маємо $u(0) \in \overline{B_R(0)}$. Застосовуючи лему 1, отримуємо $u \in C(0, T; L_2(\Omega))$. Після цього, повторюючи міркування попереднього пункту, впевнюємось, що $u_n(t)$ сильно збігається до $u(t)$ в $L_2(\Omega)$ для довільних $t \in (0, T)$. Для того щоб стверджувати компактність $G(t_*, \overline{B_R(0)})$, залишається довести, що для u справджується оцінка (11). Те, що ця оцінка має місце при $t \geq s > 0$, встановлюється граничним переходом. Перевіримо (11) при $s = 0$. Для $t \in (0, T)$ можна вибрати послідовність $t_m \in (0, T)$ таку, що $t_m \to 0$, $m \to \infty$, та

$$\| u(t) \|^2 \leq \| u(t_m) \|^2 e^{-(t - t_m)} + C.$$

Оскільки $u \in C(0, T; L_2(\Omega))$, то в наведеній нерівності можна перейти до границі при $m \to \infty$ і отримати (11) для u при $s = 0$.

З леми 6 випливає, що $\xi_n = u_n(t_*)$ має збіжну підпослідовність, отже, передкомпактна. Теорему доведено.

3. Напівнеперервна зверху залежність атрактора від параметра. Розглянемо послідовність задач

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u - f_n(u) + \lambda u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} - g(x), \tag{14}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad u_0 \in L_2(\Omega), .$$

де $\Omega \subset R^n$ — обмежена область з досить гладкою межею і виконуються умови:

1) для м. в. $x \in R$ $f_n(x)$ рівномірно збігається до деякої функції $f(x)$ на кожному скінченному відрізку;

2) $g \in L_2(\Omega)$;

3) $f_n(u)u \geq \mu_0 |u|^p$, $|f_n(u)u| \leq \mu_1 |u|^{p-1} + C$, $p > 2$.

На підставі умов 1 – 3 за теоремою 1 одержуємо, що кожна задача (14) для довільного $T > 0$ має принаймні один розв'язок на $[0, T]$, що задовольняє оцінку (11). Утворюючи на цих розв'язках м-напівпотік G_n, за теоремою 2 отримуємо існування глобального компактного атрактора Ψ_n. За умови 1 маємо, що для м. в. $x \in R$ функція $f(x)\colon R \to R$ неперервна. Тоді можемо стверджувати, що умови 1 – 3 виконуються для функції f, отже, за теоремою 2 існує глобальний компактний атрактор Ψ для м-напівпотоку G.

Теорема 3. *За умов* 1 – 3 $\operatorname{dist}(\Psi_n, \Psi) \to 0$, $n \to +\infty$.

Для $A, B \subset X$ покладемо

$$\operatorname{dist}(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \rho(x, y).$$

Доведення. Спочатку на множині натуральних чисел з нескінченно віддаленою точкою $\Xi = \{n, n \geq 1, +\infty\}$ введемо метрику

$$\sigma(m, n) = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right|.$$

(Ξ, σ) є метричним компактом і $\xi_0 = +\infty$ — єдина гранична точка. Достатньо перевірити, що

$$B_1 = \left(\bigcup_{n \geq 1} \Psi_n \right) \bigcup \Psi \in \beta(X)$$

і для деякого досить великого $t > 0$ і $B_r(0) \supset B_1$ відображення

$$\Xi \ni \xi \mapsto G_\xi\left(t, \overline{B_r(0)}\right)$$

є слабко напівнеперервним зверху (сл. н. н. зв.) у точці ξ_0.

Що стосується умови $B_1 \in \beta(X)$, то вона отримується з таких міркувань:

$$\Psi_n \subset G(t, \Psi_n) \subset B_0, \qquad \Psi \subset G(t, \Psi) \subset B_0$$

для досить великих t, де

$$B_0 = \left\{u, \|u\|^2 \leq C+1\right\}.$$

Звідси $B_1 \subset B_0 \in \beta(X)$.

Для перевірки другої умови потрібен такий результат.

Твердження [6]. *Нехай X_1, X_2 — метричні простори, X_1 — компакт, F: $X_1 \to P(X_2)$ — компактнозначне відображення. Тоді F — сл. н. н. зв., якщо*

$$\operatorname{graph} F = \{(x, y) \mid x \in X_1, y \in F(x)\}$$

є компактом в $X_1 \times X_2$.

У розглядуваному випадку (Ξ, σ) — метричний компакт, з леми 6 для довільних $\xi \in \Xi$, $t > 0$, $r > 0$ випливає, що $G_\xi(t, B_r(0))$ — компакт в X. Отже, потрібно довести, що $\left\{(\xi, y_\xi) \mid \xi \in \Xi,\ y_\xi \in G_\xi\left(t, \overline{B_r(0)}\right)\right\}$ — компакт в $\Xi \times X$, або що з послідовності $y_n \in G_n\left(t, \overline{B_r(0)}\right)$ можна вибрати подпослідовність, яка збігається до $y \in G\left(t, \overline{B_r(0)}\right)$. Нехай $y_n = \{u_n(t)\}$, $u(\cdot)$ — розв'язки задачі (14), що задовольняють (11), причому $y_n(0) = \{u_n(0)\} \in \overline{B_r(0)}$. Тому, застосовуючи міркування, аналогічні наведеним у п. 2, отримуємо, що для $T > t$ існує u таке, що деяка підпослідовність послідовності u_n (залишимо за нею те саме позначення) слабко збігається до u в $L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$, u_{n_t} слабко збігається до u_t в $L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, $u_n(t) \to u(t)$ в $L_2(\Omega)$ для м.в. $t \in [0, T]$ і слабко збігається в $L_2(\Omega)$ для кожного $t \in [0, T]$, $y(0) = \{u(0)\} \in \overline{B_r(0)}$. Тепер для того щоб стверджувати, що u — розв'язок рівняння (1) на $[0, T]$, потрібно довести, що $f_n(u_n(x, t)) \rightharpoonup f(u_n(x, t))$ в $L_2(\Omega_T)$. Справді, оскільки $u_n(x, t) \to u(x, t)$ для м. в. $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$, то для кожного (x, t) існують $a > 0$, $N \geq 1$ такі, що для довільних $n \geq N$ маємо $u_n(x, t) \in [-a, a]$, і внаслідок рівномірної збіжності для довільного $l > 0$ існує $N_1 \geq N$ таке, що для довільного $n \geq N_1$

$$|f_n(u_n) - f(u)| \leq |f_n(u_n) - f(u_n)| + |f(u_n) - f(u)| \leq l.$$

Отже, $f_n(u_n(x, t)) \to f(u(x, t))$ для м. в. $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$. Застосовуючи умову 3, отримуємо шукане. Звідси також випливає, що $u \in C(0, T; L_2(\Omega))$. Тоді на підставі лем 4 та 5 отримуємо $u_n(t) \to u(t)$ в X і $y = y(t) = u(t) \in G\left(t, \overline{B_r(0)}\right)$.

1. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений. – М.: Наука, 1989. – 294 с.
2. *Лионс Ж.- Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 587 с.
3. *Melnik V. S., Valero J.* On attractors of multivalued semi-flows and differential inclusions // Set-Valued Analysis. – 1998. – **6**. – P. 83 – 111.
4. *Капустян О. В.* Атрактор напівпотоку, породженого системою фазово-польових рівнянь без єдиності розв'язку // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 7. – С. 23 – 30.
5. *Мельник В. С.* Многозначные полупотоки и их аттракторы // Докл. РАН. – 1994. – **337**, № 4. – С. 876 – 881.
6. *Обен Ж.-П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. – М.: Мир, 1988. – 510 с.

Одержано 11.09.2001