УДК 512.544

Л. А. Курдаченко (Днепропетр. нац. ун-т),
П. Соулес (Афин. ун-т, Греция)

ГРУППЫ С ГИПЕРЦИКЛИЧЕСКИМИ СОБСТВЕННЫМИ ФАКТОР-ГРУППАМИ

We continue the study of (soluble) groups whose all proper factor groups are hypercyclic. The monolithic case is completely investigated. The nonmonolithic case requires to impose some additional conditions. We study groups whose all proper factor groups possess supersoluble classes of conjugate elements.

Продовжується вивчення (розв'язних) груп, всі власні фактор-групи яких є гіперциклічними. Монолітичний випадок вивчено повністю. Але немонолітичний випадок потребує накладання деяких додаткових умов. Вивчаються групи, всі власні фактор-групи яких мають надрозв'язні класи спряжених елементів.

Во многих разделах теории групп изучается влияние тех или иных объектов, связанных с группой, на строение всей группы. В этом ряду свое место занимают и различные системы фактор-групп. Например, хорошо известна роль семейства конечных фактор-групп при решении алгоритмических проблем в конечно определенных группах, в теории многообразий, в теории полициклических групп. Другое важное семейство — фактор-группы по централизаторам главных факторов, особую роль это семейство играет в теории формаций конечных групп.

Наиболее широким семейством фактор-групп является семейство всех собственных фактор-групп. Фактор-группа G/H называется *собственной,* если нормальная подгруппа H неединична. Пусть X — класс групп. *Группа G называется JNX-группой, если $G \notin X$, но любая ее собственная фактор-группа принадлежит X.* В теории групп достаточно давно начато изучение строения группы с заданным семейством всех собственных фактор-групп. Начало этим исследованиям положил М. Ньюмен [1, 2], рассмотревший группы, все собственные фактор-группы которых абелевы. Затем они были продолжены Д. Маккарти [3, 4] и Дж. Уилсоном [5], изучавшим группы, все собственные фактор-группы которых конечны. Эти исследования были продолжены многими авторами для различных естественных обобщений как абелевых, так и конечных групп. Так, С. Франциози и Ф. де Жиованни [6] рассмотрели группы, все собственные фактор-группы которых нильпотентны, ограниченного класса нильпотентности, Л. А. Курдаченко и И. Я. Субботин [7] рассмотрели группы с собственными гиперциклическими фактор-группами. Естественным обобщением гиперцентральных групп являются гиперциклические группы. В работах [8, 9] начато изучение обобщенно разрешимых групп, все собственные фактор-группы которых гиперциклические. В частности, в работе [9] полностью рассмотрен случай монолитичных групп. Немонолитичный случай изучался в этой работе при дополнительном условии конечности 0-ранга группы. В данной работе продолжается изучение немонолитичных групп, все собственные фактор-группы которых гиперциклические при другом ограничении, которое возникает следующим образом.

Д. Робинсон и Ж. Женг [10] изучали группы, все собственные фактор-группы которых имеют конечный коммутант ($JNFA$-группы). Группы с конечным коммутантом — подкласс более широкого класса FC-групп. В работе [11] изучены (обобщенно разрешимые) группы, все собственные фактор-группы которых являются FC-группами. Класс FC-групп также может быть расширен следующим естественным образом.

Пусть G — группа, $g \in G$, положим $x^G = \{x^g = g^{-1}xg \mid g \in G\}$. Подгруппа $C_G(x^G)$ нормальна в G. Если X — класс групп, то будем говорить, что

G является XC-группой или имеет X-классы сопряженных элементов, если $C_G(x^G) \in X$ для любого элемента $x \in G$.

Если $X = E$ — класс единичных групп, то EC-группы — это класс всех абелевых групп. Если $X = F$ — класс всех конечных групп, то получаем класс FC-групп. Если $X = C$ — класс всех черниковских групп, то приходим к классу CC-групп. Группы, все собственные фактор-группы которых являются CC-группами, изучались в работах [12 – 14].

Будем говорить, что группа G имеет сверхразрешимые классы сопряженных элементов или является UC-группой, если $G / C_G(x^G)$ сверхразрешима для любого элемента $x \in G$.

Класс UC-групп является подклассом класса гиперциклических групп.

Группа G называется $JNUC$-группой, если любая ее собственная фактор-группа является UC-группой, а сама G таковой не является.

Целью данной работы является изучение (обобщенно разрешимых) $JNUC$-групп.

Установим сначала некоторые элементарные свойства UC-групп, которые указывают место этого класса внутри класса гиперциклических групп.

Лемма 1. 1. *Любая подгруппа UC-группы является UC-группой.*

2. *Любая фактор-группа UC-группы является UC-группой.*

3. *Прямое произведение UC-групп является UC-группой.*

Утверждение леммы очевидно.

Лемма 2. *Пусть G — UC-группа, M — конечное подмножество G, $X = \langle M \rangle^G$. Тогда X имеет конечный ряд G-инвариантных подгрупп с циклическими факторами.*

Доказательство. Для каждого элемента $x \in M$ фактор-группа $G/C_G(x^G)$ сверхразрешима. Поэтому

$$G/C_G(X) = G/C_G(\langle M \rangle^G) = G/(\bigcap_{x \in M} C_G(x^G)) \leq \times_{x \in M} G/C_G(x^G)$$

также сверхразрешима. Отсюда вытекает, что $X/(X \cap C_G(X))$ имеет конечный ряд G-инвариантных подгрупп с циклическими факторами. Поскольку каждая сверхразрешимая группа будет полициклической, то X — полициклическая подгруппа [15] (теорема 2.2). В частности, $A = X \cap C_G(X)$ — нормальная конечнопорожденная абелева подгруппа G. Если $A = \langle 1 \rangle$, то лемма доказана. Предположим теперь, что A неединична. Пусть B — неединичная G-инвариантная подгруппа A наименьшего ранга. Другими словами, либо B — конечная минимальная нормальная подгруппа G, либо B — абелева конечнопорожденная подгруппа и B — рационально неприводима в G. Пусть $y \in G \setminus C_G(B)$. Если B — минимальная нормальная подгруппа, то либо $C_G(y^G) \cap B = B$, либо $C_G(y^G) \cap \cap B = \langle 1 \rangle$. В первом случае $B \leq C_G(y^G)$, т. е. $y \in C_G(B)$, что невозможно. Следовательно, $C_G(y^G) \cap B = \langle 1 \rangle$, так что

$$B \approx_G B/(B \cap C_G(y^G)) \approx_G B\, C_G(y^G)/C_G(y^G).$$

Поскольку $G/C_G(y^G)$ сверхразрешима, то любая ее минимальная нормальная подгруппа — циклическая, так что B — циклическая. Пусть теперь B — подгруппа без кручения и рационально неприводима в G. Снова рассмотрим пересечение $B \cap C_G(y^G) = C$ и предположим, что $C \neq \langle 1 \rangle$. Это означает, что B/C конечна. Другими словами, найдется такой номер $k \in \mathbb{N}$, что $b^k \in C$ для любого $b \in B$. Положим $b^y = b_1$, тогда $b_1^k = (b^y)^k = (b^k)^y = b^k$, т. е. $(b_1 b^{-1})^k =$

$= 1$. Поскольку B не имеет кручения, то $b = b_1$. Отсюда опять получаем $y \in C_G(B)$, что невозможно. Итак, и в этом случае $C_G(y^G) \cap B = \langle 1 \rangle$. Как и выше, получаем теперь, что B — циклическая подгруппа. Используя приводимые уже аргументы достаточное число раз, убеждаемся, что A имеет конечный ряд G-инвариантных подгрупп, факторы которого — циклические.

Следствие. *Пусть G — UC-группа. Тогда G — гиперциклическая.*

Лемма 3. *Пусть G — гиперциклическая группа. Если $\langle x \rangle^G$ удовлетворяет* Max *для каждого элемента $x \in X$, то G — UC-группа.*

Доказательство. Подгруппа X имеет возрастающий ряд G-инвариантных подгрупп с циклическими факторами. В то же время она удовлетворяет Max, поэтому такой ряд конечен. В частности, X — полициклическая подгруппа. Тогда и $G/C_G(x^G)$ — полициклическая [15] (лемма 2.1). Поскольку $G/C_G(x^G)$ — гиперциклическая, то она сверхразрешима. Следовательно, G — UC-группа. Объединяя следствие и лемму 3, получаем следующие утверждения.

Предложение 1. *Группа G тогда и только тогда является UC-группой, когда она гиперциклическая и $\langle x \rangle^G$ удовлетворяет* Max *для каждого элемента $x \in X$.*

Лемма 4. *Пусть G — гиперциклическая группа. Тогда она включает нормальную подгруппу Q, удовлетворяющую следующим условиям:*

1) $Q = \times_{\lambda \in \Lambda} Q_\lambda$, *где либо Q_λ — G-инвариантная циклическая подгруппа простого порядка, либо Q_λ, $\lambda \in \Lambda$, — G-инвариантная бесконечная циклическая подгруппа*;

2) *если H — неединичная нормальная подгруппа G, то $H \cap Q \neq \langle 1 \rangle$.*

Доказательство. Пусть S — цоколь группы G, т. е. подгруппа, порожденная всеми минимальными нормальными подгруппами G. Поскольку G — гиперциклическая, то каждая минимальная нормальная подгруппа будет циклической простого порядка. Таким образом, S — прямое произведение циклических G-инвариантных подгрупп простого порядка. Если S удовлетворяет условию 2, то положим $Q = S$. В противном случае существует неединичная нормальная подгруппа L, для которой $L \cap S = \langle 1 \rangle$. Подгруппа L включает в себя неединичную циклическую G-инвариантную подгруппу C. Более того, C — бесконечная циклическая. Положим $S_1 = S \times C$. Если S_1 удовлетворяет условию 2, то полагаем $Q = S_1$. Если нет, то этот процесс можно продолжить. Другими словами, чтобы завершить доказательство, применим трансфинитную индукцию.

Подгруппа Q, удовлетворяющая условиям 1, 2 *леммы* 4, *называется квазицоколем гиперциклической группы G. Положим $Q = Q\,\mathrm{Soc}\,G$.*

В отличие от обычного цоколя квазицоколь определяется неоднозначно. Если Q_1 — другой квазицоколь, то он включает в себя цоколь группы и оба фактора $Q/(Q \cap Q_1)$ и $Q_1/(Q \cap Q_1)$ — периодические.

Лемма 5. *Пусть G — UC-группа. Если G почти абелева, то она сверхразрешима над центром.*

Доказательство. Пусть U — абелева нормальная подгруппа, имеющая в G конечный индекс, $\{x_1, \ldots, x_s\}$ — семейство представителей всех смежных классов группы G по подгруппе U, взятых по одному в каждом классе, $X = \langle x_1, \ldots, x_s \rangle$, $C = \bigcap_{1 \le i \le s} C_G(x_i^G)$. Тогда G/C — сверхразрешима. Из G-изоморфизма $C/(C \cap U) \approx_G CU/U$ получаем, что $C/(C \cap U)$ имеет конечный ряд G-инвариантных подгрупп с циклическими факторами. Осюда вытекает, что и $G/(C \cap U)$ — сверхразрешима. Поскольку $G = XU$ и $C \le C_G(X)$, то

$C \cap U \leq \zeta(G)$. Следовательно, и $G/\zeta(G)$ — сверхразрешима.

Лемма 6. *Пусть G — сверхразрешимая над центром группа. Тогда $[G, G]$ имеет конечный ряд G-инвариантных подгрупп с циклическими факторами.*

Доказательство. Очевидно, G — UC-группа. Поскольку $G/\zeta(G)$ — сверхразрешима, то она конечнопорождена. Пусть $\{x_1\zeta(G), \ldots, x_n\zeta(G)\}$ — некоторое множество порождающих $G/\zeta(G)$, $X = \langle x_1\rangle^G \ldots \langle x_n\rangle^G$. Поскольку $G = X\zeta(G)$, то G/X — абелева. Теперь можно применить к X лемму 2.

Перейдем к рассмотрению $JNUC$-групп.

Лемма 7. *Пусть G — $JNUC$-группа. Тогда G не может включать в себя такие неединичные нормальные подгруппы H_1, H_2, что $H_1 \cap H_2 = \langle 1\rangle$.*

В самом деле, из $H_1 \cap H_2 = \langle 1\rangle$ получаем вложение $G \leq G/H_1 \times G/H_2$.

Предложение 2. *Пусть G — $JNUC$-группа, $F = \mathrm{Fitt}\, G$. Если $F \neq \langle 1\rangle$, то либо F — элементарная абелева p-подгруппа для некоторого простого числа p, либо F — абелева подгруппа без кручения.*

(Здесь $\mathrm{Fitt}\, G$ — подгруппа Фиттинга группы G, т. е. подгруппа, порожденная всеми нормальными нильпотентными подгруппами.)

Это предложение является непосредственным следствием предложения 1 [9].

Пусть G — $JNUC$-группа, $A = \mathrm{Fitt}\, G$ и предположим, что $A \neq \langle 1\rangle$. Положим

$$\wp_G(A) = \{B \mid B \text{ — неединичная } G\text{-инвариантная подгруппа } A\}.$$

Естественно возникают следующие два случая:

$$\wp_G(A) = \langle 1\rangle \quad \text{(немонолитичный);}$$

$$\wp_G(A) \neq \langle 1\rangle \quad \text{(монолитичный).}$$

Монолитичный случай полностью рассмотрен в статье [9] для более общей ситуации (групп, все собственные фактор-группы которых гиперциклические). Поэтому основной целью данной работы является рассмотрение немонолитичного случая.

Согласно следствию 3 [9] $A = C_G(A)$. Подгруппу A можно рассматривать как ZH-модуль, где $H = G/A$ — UC-группа. Кроме того, если A — элементарная абелева p-подгруппа для некоторого простого числа p, то A можно рассматривать как F_pH-модуль.

Модуль M называется JI-модулем, если он удовлетворяет следующим условиям:

JI_1) если B — ненулевой подмодуль M, то M/B конечен;

JI_2) пересечение всех ненулевых подмодулей M — нулевое.

Следующие результаты показывают роль JI-модулей для изучения $JNUC$-групп.

Лемма 8. *Пусть G — немонолитичная $JNUC$-группа, $A = \mathrm{Fitt}\, G$, $a_1, \ldots, a_n \in A$, $B = \langle a_1\rangle^G \ldots \langle a_n\rangle^G$. Предположим, что A — неединичная элементарная абелева p-подгруппа для некоторого простого числа p. Тогда B — JI-модуль над кольцом F_pH, где $H = G/A$.*

Доказательство. F_pH-модуль B удовлетворяет условию JI_2), поскольку группа G немонолитична. Пусть C — неединичная G-инвариантная подгруппа B. Тогда G/C — UC-группа. Ввиду леммы 2 подгруппа B/C сверхразрешима и периодична. Это означает, что она конечна, так что B удовлетворяет и условию JI_1).

Пусть G — группа, $P(G)$ — максимальная нормальная периодическая *подгруппа G. Подгруппа $P(G)$ называется периодической частью группы G.*

Лемма 9. *Пусть H — гиперциклическая группа с конечной периодической частью, A — JI-модуль над кольцом F_pH, причем $C_H(A) = \langle 1 \rangle$, p — простое число. Тогда H включает в себя нормальную абелеву подгруппу без кручения конечного индекса.*

Доказательство. Ввиду леммы 5 [9] H включает в себя нормальную бесконечную циклическую подгруппу $X = \langle x \rangle$. Пусть $C = C_H(X)$, тогда $|H/C| \leq 2$. Пусть g — элемент со свойством $H = \langle g \rangle C$, тогда $g^2 \in G$. Ввиду леммы 4.2 [11] A включает в себя F_pC-подмодуль B, для которого A/B и A/Bg — JI-модули над кольцом F_pC и $B \cap Bg = \langle 0 \rangle$. Пусть $E = C_C(A/B)$. Поскольку $E^g = C_C(A/B^g)$, то $\langle x \rangle \cap E = \langle 1 \rangle = \langle x \rangle \cap E^g$. Используя лемму 4.3 [11] и рассуждения, аналогичные тем, которые проводились при доказательстве леммы 7 [9], получаем, что F_pC-модули A/B и A/Bg не имеют $F_p\langle x \rangle$-кручения. Теорема 4.4 [11] показывает, что группы C/E и C/E^g включают в себя нормальные абелевы подгруппы без кручения конечного индекса. Поскольку $E \cap E^g = \langle 1 \rangle$, то $C \leq C/E \times C/E^g$. Отсюда вытекает, что C (а значит, и H) включает в себя нормальную абелеву подгруппу без кручения конечного индекса.

Следствие. *Пусть G — немонолитичная $JNUC$-группа, $A = \mathrm{Fitt}\, G \neq \langle 1 \rangle$. Предположим, что A — элементарная абелева p-подгруппа для некоторого простого числа p. Тогда G/A включает в себя нормальную абелеву подгруппу без кручения конечного индекса.*

Пусть $1 \neq b \in A$, $B = \langle b \rangle^G$. Ввиду леммы 8 B является JI-модулем над кольцом F_pH, где $H = G/A$. Следствие 4 [9] влечет равенство $C_G(A) = C_G(B) = A$. Теперь лемма 9 показывает, что H включает в себя нормальную абелеву подгруппу без кручения конечного индекса.

Лемма 10. *Пусть G — немонолитичная $JNUC$-группа, $A = \mathrm{Fitt}\, G \neq \langle 1 \rangle$. Предположим, что A — элементарная абелева p-подгруппа для некоторого простого числа p. Тогда A — JI-модуль над кольцом F_pH, где $H = G/A$.*

Доказательство. По лемме 6 [9] подгруппа $P(G/A)$ конечна. Применяя лемму 5 [9], получаем, что G/A включает в себя нормальную бесконечную циклическую подгруппу $\langle xA \rangle$.

Пусть $1 \neq b \in A$, $B = \langle b \rangle^G$. Ввиду леммы 8 B является JI-модулем над кольцом F_pH. Поскольку $B \neq \langle 1 \rangle$, то G/B — UC-группа. Положим $X/B = \langle xB \rangle^{G/B}$. Лемма 2 показывает, что $X/B \cap A/B$ конечно, так что X/B — расширение конечной группы с помощью циклической. Отсюда следует, что $Y/B = (X/B)^k$ — подгруппа без кручения для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Другими словами, $Y/B = \langle yB \rangle$ — G-инвариантная бесконечная циклическая подгруппа G/B. Положим $C/B = C_{G/B}(Y/B)$, тогда $|G/C| \leq 2$. Пусть g — элемент, для которого $G = \langle g \rangle C$, тогда $g^2 \in C$. Поскольку $A/B \cap Y/B = \langle 1 \rangle$, то $A/B \leq C/B$, в частности, $[A, y] \leq B$. Поэтому отображение $\phi: a \to [a, y]$, $a \in A$, будет F_pC-эндоморфизмом A. Лемма 4 [9] доказывает равенство $C_A(y) = \langle 1 \rangle$, так что $A \approx_{F_pC} [A, y]$. По лемме 3 [9] подгруппа $E = [A, y]$ — G-инвариантна. Отсюда следует, что E является JI-модулем над кольцом F_pG, поскольку $E \leq B$. Из леммы 4.2 [11] получаем, что E включает такой F_pC-подмодуль D, что E/D и E/D^g — JI-модули над кольцом F_pC и $D \cap D^g = \langle 1 \rangle$. Отсюда следует, что D и D^g — JI-

подмодули над кольцом F_pC. Поскольку DD^g — F_pG-подмодуль, то DD^g имеет конечный индекс в E.

Пусть U — полный прообраз D в A, V — ненулевой F_pG-подмодуль A. Предположим, что $V \cap U = \langle 1 \rangle$. Так как ϕ — F_pC-мономорфизм, то $V\phi \cap U\phi = V\phi \cap D = \langle 1 \rangle$. Но $V\phi = [V, y]$ — G-инвариантная подгруппа E ввиду леммы 3 [9]. Из бесконечности D получаем, что $[V, y]$ имеет бесконечный индекс в E. Однако E — JI-модуль над кольцом F_pG, а это означает, что $[V, y] = \langle 1 \rangle$, что противоречит следствию 4 [9]. Это противоречие показывает, что $V \cap U = W \neq \langle 1 \rangle$. Поскольку $U \approx_{F_pC} D$, то U — JI-модуль над кольцом F_pC. В частности, U/W конечна. Тогда и U^g/W^g конечна. Имеем теперь $(U^g)\phi = [U^g, y]$. С другой стороны, $(U\phi)^g = [U, y]^g = [U^g, y^g] = [U^g, y^{-1}]$. Однако $[U^g, y] = [U^g, \langle y \rangle] = [U^g, y^{-1}]$. Отсюда следует, что $(U^g)\phi = (U\phi)^g = D^g$. Поскольку DD^g имеет конечный индекс в E, то UU^g имеет конечный индекс в A. Это означает, что и WW^g имеет конечный индекс в A. Включение $WW^g \leq V$ показывает, что и V имеет конечный индекс в A. Условие JI_2) также выполняется, ибо G — немонолитичная группа.

Лемма 11. *Пусть G — немонолитичная $JNUC$-группа, $A = \mathrm{Fitt}\, G \neq \langle 1 \rangle$. Предположим, что A — JI-модуль над кольцом ZG. Тогда существует такая абелева подгруппа U без кручения, что $A \cap U = \langle 1 \rangle$, AU нормальна в G и индекс $|G : AU|$ конечен.*

Доказательство этого утверждения почти дословно повторяет доказательство теоремы 3.6 [10].

Пусть H — группа, A — ZH-модуль. Будем говорить, что A — JNU-модуль, если A — JI-модуль и каждый собственный фактор-модуль A имеет конечный ряд ZH-подмодулей с циклическими (как группы) факторами.

Теорема 1. *Пусть G — немонолитичная группа, подгруппа Фиттинга A которой неединична и не является группой без кручения. Группа G тогда и только тогда будет $JNUC$-группой, когда она удовлетворяет следующим условиям:*

1) *A – элементарная абелева p-подгруппа для некоторого простого числа p;*
2) *$A = C_G(A)$;*
3) *$G/A = H$ — сверхразрешимая над центром группа;*
4) *A — JNU-модуль над кольцом F_pH;*
5) *существует абелева подгруппа без кручения U, для которой AU — нормальная подгруппа конечного индекса.*

Доказательство. Пусть G — $JNUC$-группа. Предложение 2 доказывает, что A — элементарная абелева p-подгруппа для некоторого простого числа p. По следствию 3 [9] $A = C_G(A)$. Следствие леммы 9 показывает, что G/A почти абелева. В этом случае она сверхразрешима над центром ввиду леммы 5. По лемме 10 A — JI-модуль над кольцом F_pH, что вместе с леммой 2 показывает, что A — JNU-модуль над кольцом F_pH. Наконец, условие 5 вытекает из леммы 11.

Наоборот, пусть группа G удовлетворяет условиям 1 – 5, L — неединичная нормальная подгруппа G. Тогда из условия 2 вытекает $L \cap A = B \neq \langle 1 \rangle$. Пусть $K/A = [G/A, G/A]$, ввиду леммы 6 K/A имеет конечный ряд G-инвариантных подгрупп с циклическими факторами. Ввиду условия 4 и A/B имеет конечный ряд G-инвариантных подгрупп с циклическими факторами. Отсюда вытекает, что и $[G/B, G/B]$ имеет такой же ряд. В частности, G/B — гиперциклическая и $[G/B, G/B]$ удовлетворяет Max. Но тогда $\langle xB\rangle^{G/B}$ удовлетворяет Max для любого элемента $x \in G$. Из леммы 3 получаем, что G/B — UC-группа, а потому и G/L также будет UC-группой.

Следующим естественным шагом будет рассмотрение случая, когда Fitt G — абелева подгруппа без кручения.

Лемма 12. *Пусть G — немонолитичная $JNUC$-группа, $A = \operatorname{Fitt} G$, $a_1, \ldots$ $\ldots, a_n \in A$, $B = \langle a_1\rangle^G \ldots \langle a_n\rangle^G$. Предположим, что A — неединичная абелева подгруппа без кручения. Тогда B включает в себя такую G-инвариантную подгруппу C, что C — JI-модуль над кольцом ZG и B/C конечнопорождена и не имеет кручения.*

Доказательство. Ввиду предложения 2 A — абелева подгруппа без кручения. Пусть p — простое число. Так как $B^p \neq \langle 1\rangle$, то G/B^p — UC-группа. Ввиду леммы 2 B/B^p конечна.

Предположим, что подгруппа B рационально неприводима в G. Пусть C — неединичная G-инвариантная подгруппа B, тогда B/C — периодическая и лемма 2 снова доказывает конечность B/C. Поскольку группа G немонолитична, то и условие $JI_2)$ также выполнено.

Допустим теперь, что B не является рационально неприводимой в G. Тогда B включает в себя неединичную G-инвариантную подгруппу G, для которой B/C — непериодическая. По той же лемме 2 B/C конечнопорождена. Обозначим через B_1/C периодическую часть B/C, тогда B/B_1 конечнопорождена и не имеет кручения, а B_1/C конечна. Если B_1 не является рационально неприводимой в G, то, используя предыдущие рассуждения, выберем в B_1 такую неединичную G-инвариантную подгруппу B_2, что B_1/B_2 конечнопорождена и не имеет кручения, и т. д. Предположим, что процесс выбора подгрупп B_i бесконечен. Это означает, что B имеет бесконечную строго убывающую цепочку таких неединичных G-инвариантных подгрупп $B = B_0 > B_1 > \ldots$ $\ldots > B_n > \ldots$, что B/B_n конечнопорождена и не имеет кручения для любого $n \in \mathbb{N}$, в частности $r_0(B/B_n) > r_0(B/B_{n+1})$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Положим $E =$ $= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$, тогда E — G-инвариантная подгруппа B, причем B/E не имеет кручения. Пусть p — простое число, тогда

$$\left|(B/B_n)/(B/B_n)^p\right| < \left|(B/B_{n+1})/(B/B_{n+1})^p\right|$$

для каждого $n \in \mathbb{N}$. Отсюда вытекает, что B/B^p не может быть конечной. Но выше отмечалось, что этот фактор конечен. Полученное противоречие показывает, что B включает такую неединичную G-инвариантную подгруппу U, что B/U конечнопорождена и не имеет кручения, а U рационально неприводима в G. Выше отмечалось, что в этом случае U — JI-модуль над кольцом ZG.

Лемма 13. *Пусть G — немонолитичная $JNUC$-группа, $A = \operatorname{Fitt} G$. Предположим, что A — неединичная абелева подгруппа без кручения. Тогда A рационально неприводима в G.*

Доказательство. Предположим противное, тогда A включает в себя неединичную G-инвариантную подгруппу A_1, для которой A/A_1 — непериодическая. Пусть bA_1 — элемент бесконечного порядка в A/A_1. Положим $\langle b\rangle^G$. Тогда B не может быть рационально неприводимой. Ввиду леммы 12 B включает в себя такую G-инвариантную подгруппу C, что C — JI-модуль над кольцом ZG и B/C конечнопорождена и не имеет кручения. Так как G/C —

UC-группа, то B/C включает в себя G-инвариантную бесконечную циклическую подгруппу E/C.

Рассмотрим сначала случай, когда $r_0(C)=1$. Подгруппа C не может быть циклической. Положим $S=C_G(E)$. Поскольку периодические группы автоморфизмов абелевой группы без кручения конечного ранга конечны (см., например, [16], теорема 9.3), то $P(G/S)$ конечна и $G/S \neq P(G/S)$. Ввиду леммы 5 [9] G/S включает в себя бесконечную циклическую подгруппу $\langle xS \rangle$. Можно допустить, что $[x, E] \leq C$. Отображение $\phi: a \to [x, a]$, $a \in E$, будет эндоморфизмом E. Ввиду леммы 3 [8] $C_E(x) = \operatorname{Ker} \phi$ и $[x, E] = \operatorname{Im} \phi$ — G-инвариантные подгруппы E. Поскольку $[x, E] \leq C$, то $r_0([x, E]) = 1$ и ввиду изоморфизма $[x, E] \approx E/C_E(x)$ и $r_0(E/C_E(x)) = 1$. Отсюда вытекает, что $C_E(x) \neq \langle 1 \rangle$, что противоречит лемме 4 [9].

Предположим теперь, что $r_0(C) > 1$. Положим $H = G/S$, $U = E \otimes_Z Q$, $V = C \otimes_Z Q$. Можно рассматривать U как QH-модуль, а V как его QH-подмодуль. Так как C рационально неприводима в G, то V — простой QH-подмодуль. Более того, $\dim_Q V > 1$, $\dim_Q (U/V) > 1$. Ввиду следствия 1 леммы 1 [17] U включает в себя такой QH-подмодуль W, что $U = V \oplus W$. Поскольку U — существенное расширение E, то $W_1 = W \cap E \neq \langle 1 \rangle$. Однако $C \cap W_1 = \langle 1 \rangle$ и мы получаем противоречие с леммой 7.

Таким образом, оба случая приводят к противоречию. Следовательно, A рационально неприводима в G.

***Следствие* 1.** *Пусть G — немонолитичная $JNUC$-группа, $A = \operatorname{Fitt} G$ и предположим, что A — неединичная абелева подгруппа без кручения. Пусть $a_1, \ldots, a_n \in A$, $B = \langle a_1 \rangle^G \ldots \langle a_n \rangle^G$. Тогда B — JI-модуль над кольцом ZG.*

***Следствие* 2.** *Пусть G — немонолитичная $JNUC$-группа, $A = \operatorname{Fitt} G$ и предположим, что A — неединичная абелева подгруппа без кручения. Если C — неединичная G-инвариантная подгруппа A, то $C_G(C) = A$.*

Доказательство. Лемма 13 показывает, что A/C — периодическая. Пусть $a \in A$, $g \in C_G(C)$, $a_1 = a^g$. Найдется такое число k, что $a^k \in C$. Тогда $a_1^k = (a^g)^k = (a^k)^g = a^k$, т. е. $(a_1 a^{-1})^k = 1$. Это означает, что $a = a_1$, а значит, $g \in C_G(A) = A$.

***Следствие* 3.** *Пусть G — немонолитичная $JNUC$-группа, $A = \operatorname{Fitt} G$ и предположим, что A — неединичная абелева подгруппа без кручения. Тогда G/A включает в себя нормальную абелеву подгруппу без кручения конечного индекса.*

Доказательство. Пусть $1 \neq b \in A$, $B = \langle b \rangle^G$. Тогда B — JI-модуль над кольцом ZG по следствию 1. Следствие 2 показывает, что $C_G(B) = A$, так что можно рассматривать B как ZH-модуль, где $H = G/A$ — гиперциклическая группа. Используя теорему 4.4 [11], убеждаемся, что H включает в себя абелеву подгруппу без кручения конечного индекса.

***Следствие* 4.** *Пусть G — немонолитичная $JNUC$-группа, $A = \operatorname{Fitt} G$ и предположим, что A — неединичная абелева подгруппа без кручения. Тогда A — JI-модуль над кольцом ZG.*

Доказательство дословно повторяет доказательство леммы 10.

Теорема 2. *Пусть G — немонолитичная группа, подгруппа Фиттинга A которой неединична и является группой без кручения. Группа G тогда и только тогда будет $JNUC$-группой, когда она удовлетворяет следующим условиям:*

6) A — *абелева подгруппа без кручения;*

7) $A = C_G(A)$;

8) $G/A = H$ — *сверхразрешимая над центром группа;*

9) A — JNU*-модуль над кольцом* ZH;

10) *существует абелева подгруппа без кручения* U, *для которой* $A \cap U = \langle 1 \rangle$ *и* AU — *нормальная подгруппа конечного индекса.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

1. *Newman M. F.* On a class of metabelian groups // Proc. London Math. Soc. – 1960. – **10**. – P. 354–364.
2. *Newman M. F.* On a class of nilpotent groups // Ibid. – P. 365–375.
3. *McCarthy D.* Infinite groups whose proper quotient groups are finite // Communs Pure and Appl. Algebra. – 1968. – **21**. – P. 545–562.
4. *McCarthy D.* Infinite groups whose proper quotient groups are finite // Ibid. – 1970. – **23**. – P. 767–789.
5. *Wilson J. S.* Groups with every proper quotients finite // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1971. – **69**. – P. 373–391.
6. *Franciosi S., de Giovanni F.* Soluble groups with many nilpotent quotients // Proc. Roy. Irish. Acad. A. – 1989. – **89**. – P. 43–52.
7. *Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya.* Groups whose proper quotients are hypercentral // J. Austral. Math. Soc. A. – 1998. – **65**. – P. 224–237.
8. *Kurdachenko L. A., Soules P.* Just-non-SRI^*-groups // Proc. second Panhellenic Conference in Algebra and Number Theory: Bull. Greek Math. Soc. – 1999. – **42**. – P. 33–42.
9. *Kurdachenko L. A., Soules P.* Groups with proper hypercyclic homomorphic images // Ric. mat. – 2001. – **50**, № 1. – P. 59–65.
10. *Robinson D. J. S., Zhang Z.* Groups whose proper quotients have finite derived subgroups // J. Algebra. – 1988. – **118**. – P. 346–368.
11. *Franciosi S., de Giovanni F., Kurdachenko L. A.* Groups whose proper quotient are FC-groups // Ibid. – 1996. – **186**. – P. 544–577.
12. *Kurdachenko L. A., Otal J.* Some Noetherian modules and non-monolithic just-non-CC-groups // J. Group Theory. – 1999. – **2**, № 1. – P. 53–64.
13. *Kurdachenko L. A., Otal J.* Simple modules over CC-groups and monolithic just-non-CC-groups // Boll. Unione mat. ital. – 2001. – **4 B**, № 8. – P. 381–390.
14. *Курдаченко Л. А., Отал Х.* Группы, все собственные фактор-группы которых имеют черниковские классы сопряженных элементов // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 3. – С. 346–353.
15. *Franciosi S., de Giovanni F., Tomkinson M. J.* Groups with polycyclic-by-finite conjugacy classes // Boll. Unione mat. ital. – 1990. – **4 B**, № 7. – P. 35–55.
16. *Wehrfritz B. A. F.* Infinite linear groups. – Berlin: Springer, 1973.
17. *Зайцев Д. И.* Гиперциклические расширения абелевых групп // Группы, определяемые свойствами систем подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979. – С. 16–37.

Получено 03.09.2001