УДК 517.53

А. П. Голуб (Ін-т математики НАН України, Київ)

МЕТОД УЗАГАЛЬНЕНИХ МОМЕНТНИХ ЗОБРАЖЕНЬ В ТЕОРІЇ РАЦІОНАЛЬНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ. ОГЛЯД

A survey is presented of the method of generalized moment representations introduced by V. K. Dzydyk in 1981 and its applications to Padé approximants. In particular, some properties of bi-orthogonal polynomials are investigated and a number of important examples are given. Applications to simultaneous Padé approximants, Padé – Chebyshev approximants, Hermite – Padé approximants and two-point Padé approximants are considered as well.

Наведено огляд методу узагальнених моментних зображень, запропонованого В. К. Дзядиком у 1981 р., та його застосувань до апроксимацій Паде. Зокрема, досліджено деякі властивості біортогональних поліномів та наведено ряд важливих прикладів. Розглянуто також застосування цього методу до сумісних апроксимацій Паде, апроксимацій Паде – Чебишова, Паде – Ерміта та двоточкових апроксимацій Паде.

1. Вступ. В теорії раціональної апроксимації аналітичних функцій одну з центральних ролей відіграють так звані апроксиманти (або ж поліноми) Паде, які є природними узагальненнями многочленів Тейлора в тому розумінні, що вони здійснюють найкращі локальні раціональні наближення функцій.

Означення 1 (див. [1, с. 31]). *Будемо говорити, що раціональна функція*

$$[M/N]_f(z) = \frac{P_M(z)}{Q_N(z)},$$

де $P_M(z)$ *та* $Q_N(z)$ *— алгебраїчні многочлени степенів* $\le M$ *та* $\le N$ *відповідно, є апроксимантою Паде порядку* $[M/N]$ *формального степеневого ряду*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k, \tag{1}$$

якщо

$$f(z) - [M/N]_f(z) = O(z^{M+N+1}) \quad \textit{при} \quad z \to 0,$$

тобто розвинення раціональної функції $[M/N]_f(z)$ *в степеневий ряд збігається з розвиненням* (1) *до члена, що містить* z^{M+N} *включно.*

Надалі будемо позначати через $\mathcal{R}[M/N]$ клас всіх раціональних функцій вигляду $\dfrac{P_M(z)}{Q_N(z)}$ таких, що $\deg P_M(z) \le M$ і $\deg Q_N(z) \le N$.

Апроксиманти Паде було запроваджено німецьким математиком К. Якобі у 1846 р. [2], і ним же було побудовано детермінантні вирази для апроксимант Паде через коефіцієнти степеневого розвинення функції.

Нехай $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ — послідовність коефіцієнтів степеневого ряду $f(z)$ вигляду (1). Розглянемо визначники

$$H_{L,N} = \det\|s_{L+k+j}\|_{k,j=0}^{N} = \begin{vmatrix} s_L & s_{L+1} & \cdots & s_{L+N} \\ s_{L+1} & s_{L+2} & \cdots & s_{L+N+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{L+N} & s_{L+N+1} & \cdots & s_{L+2N} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Будемо називати такі визначники визначниками Ганкеля послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$. Введемо також до розгляду алгебраїчні доповнення $A_{L,N,j}$, $j = \overline{0, N}$, елементів останнього рядка визначника (2). Результат К. Якобі полягає в тому, що у випадку відмінності від нуля визначника

$$H_{M+1-N,N-1} \neq 0$$

для функції $f(z)$ вигляду (1) існує її апроксиманта Паде порядку $[M/N]$, яку можна зобразити у вигляді

$$[M/N]_f(z) = \frac{P_M(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{j=0}^{N} A_{M+1-N,N,j} z^{N-j},$$

$$P_M(z) = \sum_{j=0}^{N} A_{M+1-N,N,j} \sum_{m=0}^{M-N+j} s_m z^{N+m-j}.$$

Зазначимо, що в наведених формулах $s_m = 0$, якщо $m < 0$. Німецький математик Ф. Фробеніус у 1881 р. дослідив алгебраїчні властивості поліномів Паде і встановив тотожності для поліномів Паде, чисельники та знаменники яких мають степені, що відрізняються не більше, ніж на одиницю [3]. Нарешті, у серії праць, опублікованих у 1892 – 1907 рр., французький математик Анрі Паде розташував поліноми Паде в двопараметричну напівнескінченну таблицю, що тепер називається таблицею Паде, вивчив структуру цієї таблиці, а також побудував і дослідив першу піддіагональ таблиці Паде для гіпергеометричної функції Гаусса ${}_2F_1(1,\sigma;\rho+1;z)$ та виродженої гіпергеометричної функції ${}_1F_1(1;\nu+1;z)$ [4, 5].

Означення 2. *Нехай $f(z)$ — формальний степеневий ряд. Таблицею Паде, що відповідає $f(z)$, будемо називати двопараметричну напівнескінченну таблицю, елементами якої є апроксиманти Паде $[M/N]_f(z)$ (якщо вони існують)*

$$\begin{array}{ccccc}
[0/0]_f(z) & [1/0]_f(z) & \cdots & [M/0]_f(z) & \cdots \\
[0/1]_f(z) & [1/1]_f(z) & \cdots & [M/1]_f(z) & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
[0/N]_f(z) & [1/N]_f(z) & \cdots & [M/N]_f(z) & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}.$$

Верхній рядок таблиці Паде складають елементи $[M/0]_f(z)$, $M = \overline{0,\infty}$, які є многочленами Тейлора – Маклорена функції $f(z)$. Найбільший інтерес викликає вивчення поведінки елементів діагоналі та першої піддіагоналі таблиці Паде, тобто апроксимант Паде порядків $[N/N]$, $N = \overline{0,\infty}$, та $[N-1/N]$, $N = \overline{1,\infty}$.

Одним з найбільш глибоких досягнень класичного періоду розвитку теорії апроксимацій Паде стало з'ясування їх тісних зв'язків з класичною проблемою моментів та теорією ланцюгових дробів. Започаткували цей напрямок російський математик П. Чебишов [6] та голандський математик Т. Стільтьєс [7], значний внесок було зроблено російським математиком А. Марковим [8], німецькими математиками Г. Гамбургером [9] та Ф. Хаусдорфом [10].

Означення 3. *Класичною проблемою моментів на борелівській підмножині дійсної осі* $\Delta \subset \mathbb{R}$ *називається задача, яка полягає у тому, щоб за заданою числовою послідовністю* $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ *визначити невід'ємну міру* $d\mu(t)$ *на* Δ, *для якої виконувались би рівності*

$$s_k = \int_{\Delta} t^k d\mu(t), \quad k = \overline{0, \infty}. \tag{3}$$

Для функцій $f(z)$, коефіцієнти степеневих розвинень яких можуть бути зображені у вигляді (3), апроксиманти Паде порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$ (тобто елементи першої піддіагоналі таблиці Паде) можуть бути побудовані в термінах многочленів, ортогональних на Δ за мірою $d\mu(t)$. А саме, якщо позначити через $\{A_N(t)\}_{N=0}^{\infty}$ послідовність таких нетривіальних алгебраїчних многочленів, що

$$\int_{\Delta} A_N(t) A_M(t) d\mu(t) = 0 \quad \text{при} \quad M \neq N,$$

то

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = z^N A_N(1/z),$$

$$P_{N-1}(z) = z^{N-1} \int_{\Delta} \frac{A_N(1/z) - A_N(t)}{1/z - t} d\mu(t).$$

Ця обставина є визначальною для вивчення апроксимант Паде так званих марковських функцій, тобто функцій, які можна зобразити у вигляді

$$f(z) = \int_{\Delta} \frac{d\mu(t)}{1 - zt}. \tag{4}$$

Дослідженню широкого кола питань, що при цьому виникають, присвячено монографію Н. Ахієзера [11]. У подальшому значний внесок у вивчення апроксимант Паде марковських функцій, зокрема, у випадках, коли підмножина Δ є необмеженою або є об'єднанням кількох сегментів дійсної осі, що взаємно не перетинаються, було зроблено А. Гончаром, Є. Рахмановим, К. Лунгу, Я. Гілевичем, Ю. Люком, Дж. Бейкером, В. Гаучі, П. Вінном та ін. [12–21]. У роботах Е. Хендріксена, Г. ван Россума, Дж. Натолла, Г. Шталя та ін. [22–25] отримано ряд результатів, що стосуються поведінки апроксимант Паде функцій вигляду (4) у випадку знакозмінної або ж комплекснозначної міри $d\mu(t)$, а також у випадку, коли Δ є підмножиною комплексної площини.

Паралельно з вивченням класичних апроксимацій Паде багато дослідників, починаючи з 60-х рр. XX ст., стали розглядати та досліджувати їх різноманітні узагальнення.

Означення 4. *Нехай* $E = \{e_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ — *ортонормований базис у деякому функціональному гільбертовому просторі* $\mathcal{H}$. *Будемо говорити, що функція*

$$[M/N]_f^{(E)}(x) = \frac{\sum_{j=0}^{M} p_j^{(M)} e_j(x)}{\sum_{k=0}^{N} q_k^{(N)} e_k(x)}$$

є узагальненою апроксимантою Паде порядку $[M/N]$ *функції* $f(x) \in \mathcal{H}$, *якщо*

$$f(x) - [M/N]_f^{(E)}(x) \perp e_k(x)$$

для $k = \overline{0, M+N}$.

В залежності від того, який ортонормований базис використовується в означенні, розглядаються апроксиманти Паде – Чебишова, Паде – Лежандра, тригонометричні апроксиманти Паде та ін. Найбільш суттєві результати у вивченні узагальнених апроксимант Паде належать А. Гончару, С. Суєтіну, Л. Карлбергу та ін. [26 – 29].

Означення 5. *Нехай* $z_1, z_2, \ldots, z_R \in \mathcal{D}$ *— деякі точки, що належать області* $\mathcal{D}$ *комплексної площини, і* $M = (m_1, m_2, \ldots, m_R)$ *— вектор з невід'ємними цілими координатами такими, що* $m_r \geq N - 1$, $r = \overline{1, R}$, N *— деяке натуральне число. Будемо говорити, що раціональна функція*

$$[M/N]_f(z_1, \ldots, z_R; z) = \frac{P_M(z)}{Q_N(z)} \in \mathcal{R}\left[\sum_{r=1}^{R} m_r - N - 1/N\right]$$

є багатоточковою апроксимантою Паде індексу $[M/N]$ *у точках* $z_1, z_2, \ldots$ $\ldots, z_R$ *функції* $f(z)$, *аналітичної в області* $\mathcal{D}$, *якщо*

$$f(z) - [M/N]_f(z_1, \ldots, z_R; z) = O((z - z_r)^{m_r})$$

при $z \to z_r$, $r = \overline{1, R}$.

У різних публікаціях багатоточкові апроксиманти Паде називаються також раціональними інтерполянтами, апроксимантами Ньютона – Паде та ін. Багатоточкові апроксиманти Паде вивчались в роботах А. Гончара, Л. Гієрмо Лопеса, В. Русака, Є. Ровби, Л. Філозофа, А. Магнуса, О. Ньястада, Г. Волліна та ін. [30 – 37].

Означення 6. *Нехай* $F = \{f_\lambda(z)\}_{\lambda=1}^{\Lambda}$ *— набір аналітичних в околі точки* $z = 0$ *функцій, а* N *та* M *— вектори з невід'ємними цілими координатами* $N = (n_1, n_2, \ldots, n_\Lambda)$, $M = (m_1, m_2, \ldots, m_\Lambda)$. *Сумісними апроксимантами Паде набору* F *індексу* $R = [M, N]$ *називаються раціональні поліноми*

$$[M/N]_F^{(\lambda)}(z) \in \mathcal{R}[m_\lambda/|N|], \quad \lambda = \overline{1, \Lambda},$$

де $|N| = n_1 + n_2 + \cdots + n_\Lambda$, *з деяким спільним знаменником* $Q_N(z)$ *степеня* $|N|$, *для яких виконуються асимптотичні рівності*

$$f_\lambda(z) - [M/N]_F^{(\lambda)}(z) = O(z^{n_\lambda + m_\lambda + 1})$$

при $z \to 0$, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$.

Означення 7. *Нехай* $F = \{f_\lambda(z)\}_{\lambda=1}^{\Lambda}$, $\Lambda \geq 2$, *— набір аналітичних в околі точки* $z = 0$ *функцій,* M *— вектор з невід'ємними цілими координатами* $M = (m_1, m_2, \ldots, m_\Lambda)$, $|M| = m_1 + m_2 + \cdots + m_\Lambda$. *Поліномами Паде – Ерміта набору* F *індексу* $[M]$ *називаються алгебраїчні многочлени* $[M]_F^{(\lambda)}(z)$ *степенів, що не перевищують* m_λ, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$, *які не всі тотожно дорівнюють нулю, тобто*

$$\deg[M]_F^{(\lambda)}(z) \leq m_\lambda, \qquad \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} |[M]_F^{(\lambda)}(z)| \not\equiv 0,$$

і такі, що виконується співвідношення

$$\sum_{\lambda=1}^{\Lambda} f_\lambda(z)[M]_F^{(\lambda)}(z) = O(z^{|M|+\Lambda-1})$$

при $z \to 0$.

Уперше задачу, яка, фактично, привела до побудови сумісних апроксимант Паде та апроксимант Паде – Ерміта системи експонент $\{e^{\lambda z}\}_{\lambda=1}^{\Lambda}$, було поставлено і розв'язано французьким математиком Ш. Ермітом [38] у зв'язку з питанням про трансцендентність числа e. Для випадку набору марковських функцій, носії яких взаємно не перетинаються, сумісні апроксиманти Паде були вивчені в роботі М. Анжелеско [39]. Сучасна формальна теорія сумісних апроксимацій Паде побудована в працях К. Малера [40], Дж. Коатса [41] та Г. Джагера [42]. Вагомий внесок у вивчення сумісних апроксимацій Паде та апроксимацій Паде – Ерміта було зроблено А. Гончаром, Є. Нікішиним, Є. Рахмановим, В. Сорокіним, О. Аптекаревим, В. Калягіним, В. Парусниковим, М. де Брюіном, Д. Любінським, Г. Чудновським, Дж. Натоллом , Б. Бекерманом, Дж. Лабаном та ін. [43 – 62].

2. Узагальнені моментні зображення. Наприкінці 70-х рр. В. К. Дзядик на основі подальшого розвитку запропонованого ним апроксимаційного методу наближеного розв'язування звичайних лінійних диференціальних рівнянь [63 – 66] з'ясував, що в деяких випадках застосування вказаного методу до побудови раціональних наближень приводить до отримання діагональних поліномів Паде деяких елементарних функцій. У роботі [67] В. К. Дзядиком та Л. І. Філозофом було вивчено асимптотичну поведінку апроксимант Паде функцій e^z та $(1+z)^\alpha$, а згодом В. К. Дзядик [68] дослідив асимптотику діагональних апроксимант Паде функцій $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$ та $\operatorname{ch} z$ і встановив зв'язок між раціональними апроксимантами та біортогональними системами функцій. Аналіз отриманих результатів і співставлення їх з глибокою теорією класичної проблеми моментів дозволив В. К. Дзядику в роботі [69] сформулювати задачу про узагальнені моментні зображення.

Означення 8. *Узагальненим моментним зображенням числової послідовності* $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ *на добутку лінійних просторів* $\mathcal{X}$ *та* $\mathcal{Y}$ *називається двопараметрична сукупність рівностей*

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle, \quad k,\ j = \overline{0, \infty}, \tag{5}$$

де $x_k \in \mathcal{X}$, $k = \overline{0, \infty}$, $y_j \in \mathcal{Y}, j = \overline{0, \infty}$, *і* $\langle .,. \rangle$ *— деяка білінійна форма, означена на* $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Легко побачити, що коли в (5) покласти $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = L_2[\Delta, d\mu(t)]$ — простір функцій, інтегровних на Δ з квадратом за мірою $d\mu(t)$, $\langle x, y \rangle = \int_\Delta x(t)y(t)d\mu(t)$, в ролі елементів x_k вибрати функції $x_k(t) = t^k$, $k = \overline{0, \infty}$, а в ролі елементів y_j — функції $y_j(t) = t^j$, $j = \overline{0, \infty}$, то отримаємо зображення, еквівалентне класичній проблемі моментів (3).

Якщо існує такий лінійний оператор $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, що

$$Ax_k = x_{k+1}, \quad k = \overline{0, \infty}, \tag{6}$$

а в просторі $\mathcal{Y}$ існує такий лінійний оператор $A^* : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$, що

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle \quad \forall x \in \mathcal{X}, \ \forall y \in \mathcal{Y}$$

(у цьому випадку будемо називати *оператор* A^* *спряженим до оператора* A *відносно білінійної форми* $\langle .,. \rangle$), зображення (5), як показано в [70], еквівалентне зображенню

$$s_k = \left\langle A^k x_0, y_0 \right\rangle, \quad k = \overline{0, \infty}. \tag{7}$$

При цьому твірна функція $f(z)$ послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ буде мати формальне зображення

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = \left\langle R_z^{\#}(A) x_0, y_0 \right\rangle, \tag{8}$$

де $R_z^{\#}(A) = (I - zA)^{-1}$ — резольвентна функція оператора A.

Як показано в [71], для степеневих розвинень вигляду (1), у яких коефіцієнти мають зображення вигляду (5), апроксиманти Паде порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, можуть бути записані у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} z^{N-j},$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{j=1}^{N} c_j^{(N)} z^{N-j} \sum_{m=0}^{j-1} s_m z^m,$$

а коефіцієнти $c_j^{(N)}$, $j = \overline{0, N}$, визначаються із співвідношень біортогональності для узагальненого полінома $Y_N = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} y_j$ вигляду

$$\langle x_k, Y_N \rangle = 0, \quad k = \overline{0, N-1};$$

або ж із співвідношень біортогональності для узагальненого полінома $X_N = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} x_k$ вигляду

$$\langle X_N, y_j \rangle = 0, \quad j = \overline{0, N-1}.$$

У випадку, коли існують зображення (7), (8), похибка апроксимації Паде може бути подана у вигляді

$$f(z) - [N-1/N]_f(z) = \frac{z^{2N}}{Q_N(z)} \left\langle R_z^{\#}(A) x_N, Y_N \right\rangle = \frac{z^{2N}}{Q_N(z)} \left\langle R_z^{\#}(A) X_N, y_N \right\rangle.$$

В [71] також показано, що аналогічно можна побудувати діагональні та наддіагональні поліноми Паде функції (1), тобто апроксиманти Паде функції (1) порядку $[N+M/N]$, $N \geq 0$, $M \geq 0$, можуть бути зображені у вигляді

$$[N+M/N]_f(z) = \frac{P_{N+M}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} z^{N-j},$$

$$P_{N+M}(z) = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} z^{N-j} \sum_{m=0}^{j+M} s_m z^m,$$

а коефіцієнти $c_j^{(N)}$, $j = \overline{0,N}$, визначаються із співвідношень біортогональності для узагальненого полінома $Y_N = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} y_j$ вигляду

$$\langle x_{k+M+1}, Y_N \rangle = 0, \quad k = \overline{0, N-1}.$$

У випадку, коли існують зображення (7), (8), похибка апроксимації Паде може бути подана у вигляді

$$f(z) - [M+N/N]_f(z) = \frac{z^{2N+M+1}}{Q_N(z)} \left\langle R_z^{\#}(A) x_{N+M+1}, Y_N \right\rangle.$$

Отже, задача побудови апроксимант Паде з використанням узагальнених моментних зображень зводиться до задачі побудови біортогональних поліномів. У низці випадків це дозволяє не тільки побудувати, але і дослідити поведінку елементів першої піддіагоналі, діагоналі та наддіагональних послідовностей таблиці Паде ряду спеціальних функцій. Разом з тим потрібно констатувати, що задача побудови біортогональних поліномів є набагато складнішою, ніж побудова ортогональних многочленів, і не може бути вирішена в загальному випадку.

3. Теореми існування для узагальнених моментних зображень. У роботі [70] В. К. Дзядиком та автором було доведено наступний результат.

Теорема 1. *Нехай $\mathcal{H}$ — нескінченновимірний гільбертів простір і $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ — довільна ортонормована послідовність у ньому. Тоді для того щоб числова послідовність $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ мала в $\mathcal{H}$ узагальнене моментне зображення вигляду*

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle, \quad k, j = \overline{0, \infty},$$

де

$$\langle x, y \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} (x, e_m)(y, e_m),$$

елементи x_k, $k = \overline{0,\infty}$, та y_j, $j = \overline{0,\infty}$, мають вигляд

$$x_k = \sum_{m=0}^{k} \alpha_m^{(k)} e_m, \qquad y_j = \sum_{m=0}^{j} \beta_m^{(j)} e_m,$$

причому $\alpha_k^{(k)} \neq 0$, $k = \overline{0, \infty}$, $\beta_j^{(j)} \neq 0$, $j = \overline{0, \infty}$, *необхідно і достатньо, щоб всі визначники Ганкеля*

$$H_N := H_{0,N} = \det\|s_{k+j}\|_{k,j=0}^N, \quad N = \overline{0, \infty},$$

послідовності $\{s_k\}_{k=0}^\infty$ *були відмінними від* 0.

Зауваження. Оскільки відмінність від нуля визначників Ганкеля послідовності $\{s_k\}_{k=0}^\infty$ є необхідною умовою існування та невиродженості елементів першої піддіагоналі таблиці Паде функції $f(z) = \sum_{k=0}^\infty s_k z^k$, тим самим теорема 1 стверджує, що узагальнені моментні зображення послідовності $\{s_k\}_{k=0}^\infty$ можуть бути побудовані кожного разу, коли існують невироджені апроксиманти Паде порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, функції $f(z) = \sum_{k=0}^\infty s_k z^k$. Відзначимо, що для існування зображень вигляду (3) необхідною є додатність всіх визначників Ганкеля H_N, $N = \overline{0, \infty}$, послідовності $\{s_k\}_{k=0}^\infty$.

Для зображень вигляду (7), (8) справедливими є наступні твердження.

Теорема 2. *Для будь-якої функції* f, *аналітичної в крузі* $K_R = \{z : |z| \leq \leq R\}$, $0 < R < \infty$, *та будь-якого нескінченновимірного сепарабельного гільбертового простору* $\mathcal{H}$ *існують елементи* $x_0, y_0 \in \mathcal{H}$ *та лінійний обмежений оператор* $A : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$, *норма якого є меншою за* $1/R$, *такий, що* $\forall z \in K_R$

$$f(z) = (R_z^\#(A)x_0, y_0).$$

Теорема 3. *Для будь-якої цілої функції* f *та будь-якого нескінченновимірного сепарабельного гільбертового простору* $\mathcal{H}$ *існують елементи* $x_0, y_0 \in \in \mathcal{H}$ *та лінійний обмежений оператор* $A : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ *з нульовим спектральним радіусом такий, що* $\forall z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = (R_z^\#(A)x_0, y_0).$$

Зауваження. Теорема 2 випливає з результату Д. З. Арова [72]. Результат, що узагальнює теореми 2 та 3, отримав Г. В. Радзієвський (приватне повідомлення).

4. Приклади. Ми вже зазначали, що зображення послідовності $\{s_k\}_{k=0}^\infty$ у вигляді степеневих моментів деякої міри (3), або, що те ж саме, зображення функції $f(z) = \sum_{k=0}^\infty s_k z^k$ у вигляді інтеграла Маркова – Стільтьєса (4) можна розглядати як частковий випадок узагальненого моментного зображення (5), (7), (8). Зауважимо, що в цьому випадку в якості лінійного оператора (6) вибирається оператор множення на незалежну змінну

$$(A\varphi)(t) = t\varphi(t).$$

Розглянемо ряд прикладів, які не зводяться до вказаного випадку і тим самим дозволяють будувати та досліджувати апроксиманти Паде функцій, що не є марковськими.

Приклад 1. У просторі інтегровних на відрізку $[0, 1]$ функцій $\mathcal{X} = L[0, 1]$ розглянемо лінійний обмежений оператор

$$(A\varphi)(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau. \tag{9}$$

Його резольвентна функція має зображення

$$\left(R_z^{\#}(A)\varphi\right)(t) = \varphi(t) + z\int\limits_0^t \varphi(\tau)e^{z(t-\tau)}d\tau.$$

Степені оператора A, як легко переконатися, можуть бути записані у

$$(A^k\varphi)(t) = \int\limits_0^t \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}\varphi(\tau)d\tau, \quad k = \overline{1,\infty}.$$

Нехай

$$x_0(t) \equiv 1, \qquad y_0(t) \equiv 1 \in \mathcal{Y} = C[0,1], \qquad \langle x, y\rangle = \int_0^1 x(t)y(t)dt.$$

Тоді

$$s_k = \int\limits_0^1 (A^k x_0)(t)dt = \int\limits_0^1 \frac{t^k}{k!}dt = \frac{1}{(k+1)!},$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = \frac{e^z - 1}{z}.$$

Узагальнене моментне зображення має вигляд

$$s_{k+j} = \frac{1}{(k+j+1)!} = \int\limits_0^1 \frac{t^k}{k!}\cdot\frac{(1-t)^j}{j!}dt, \quad k, j = \overline{0,\infty}.$$

Залишимо $y_0(t) \equiv 1$ і покладемо $x_0(t) = t^\nu$, $\nu > -1$. В результаті отр

$$s_k = \int\limits_0^1 (A^k x_0)(t)dt = \int\limits_0^1\int\limits_0^t \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}\tau^\nu d\tau dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{t^{k+\nu}}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k)}dt =$$

$$= \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k+1)} = \frac{1}{(\nu+1)_{k+1}}, \quad k = \overline{0,\infty},$$

де через $(\alpha)_k$ позначено символ Похгаммера

$$(\alpha)_k := \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1) \quad \text{для} \quad k \geq 1,$$

$$(\alpha)_0 := 1.$$

Відповідна функція матиме вигляд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(\nu+1)_{k+1}} = \frac{{}_1F_1(1;\nu+1;z)-1}{z},$$

де

$${}_1F_1(\alpha;\beta;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\beta)_k k!} z^k$$

— вироджена гіпергеометрична функція. Відповідне узагальнене моментне зображення має вигляд

$$s_{k+j} = \frac{1}{(\nu+1)_{k+j+1}} = \int_0^1 \frac{t^{k+\nu}}{(\nu+1)_k} \cdot \frac{(1-t)^j}{j!} dt, \quad k, j = \overline{0,\infty}.$$

Оскільки отримані функції є цілими, то для відповідних послідовностей класична проблема моментів не може бути розв'язана (див. [65, с. 253]).

Приклад 2. Розглянемо в просторі $\mathcal{X} = L[0,1]$ оператор

$$(A\varphi)(t) = \varkappa \int_0^t \varphi(\tau)d\tau + t\varphi(t),$$

що є лінійною комбінацією оператора, який розглядався в попередньому прикладі, та оператора множення на незалежну змінну, який відповідає класичній степеневій проблемі моментів на сегменті $[0,1]$. Його резольвентна функція має зображення

$$\left(R_z^{\#}(A)\varphi\right)(t) = \left((I-zA)^{-1}\varphi\right)(t) = \frac{\varphi(t)}{1-zt} + \varkappa z \int_0^t \varphi(t) \frac{(1-\tau z)^{\varkappa-1}}{(1-tz)^{\varkappa+1}} d\tau.$$

Розвиваючи праву частину цього зображення за степенями z, отримуємо

$$(A^k\varphi)(t) = \varkappa \int_0^t \varphi(\tau) \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(-\varkappa+1)_m(\varkappa+1)_{k-1-m}}{m!(k-m-1)!} \tau^m t^{k-m-1} d\tau + t^k\varphi(t).$$

Покладемо

$$x_0(t) \equiv 1, \qquad y_0(t) \equiv 1 \in \mathcal{Y} = C[0,1], \qquad \langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t)y(t)dt.$$

Тоді

$$f(z) = \int_0^1 \left(R_z^{\#}(A)x_0\right)(t)dt = \frac{(1-z)^{-\varkappa}-1}{\varkappa z}.$$

Неважко переконатися, що отримана функція буде марковською лише для $|\varkappa| < 1$. При цьому узагальнене моментне зображення буде мати вигляд

$$s_{k+j} = \frac{(\varkappa+1)_{k+j}}{(k+j+1)!} =$$

$$= \int_0^1 \frac{(\varkappa+1)_k t^k}{k!} \sum_{m=0}^{j} \frac{(-\varkappa+1)_m (\varkappa)_{j-m}}{m!(j-m)!} t^m dt, \quad k, j = \overline{0, \infty}.$$

Якщо ж вибрати $x_0(t) = t^\nu$, $\nu > -1$, і $y_0(t) \equiv 1$, то з використанням інтегральних зображень для гіпергеометричної функції Гаусса [73, с. 373] одержимо

$$f(z) = \frac{1}{\nu+1} {}_2F_1(\nu+\varkappa+1, 1; \nu+2; z).$$

Відповідне узагальнене моментне зображення буде мати вигляд

$$s_{k+j} = \frac{(\nu+\varkappa+1)_{k+j}}{(\nu+1)_{k+j+1}} =$$

$$= \int_0^1 \frac{(\varkappa+\nu+1)_k}{(\nu+1)_k} t^{k+\nu} \sum_{m=0}^{j} \frac{(-\varkappa+1)_m (\varkappa)_{j-m}}{m!(j-m)!} t^m dt, \quad k, j = \overline{0, \infty},$$

Зауваження. Узагальнені моментні зображення, наведені в прикладах 1 та 2, було побудовано в [74].

Приклад 3. Розглянемо в просторі $\mathcal{X} = L[0,1]$ лінійний неперервний оператор

$$(A\varphi)(t) = -\int_0^t (t-\tau)\varphi(\tau)d\tau.$$

Легко побачити, що цей оператор є квадратом оператора (9), взятим зі знаком мінус. Врахувавши тотожність

$$R_z^{\#}(-A^2) = R_{i\sqrt{z}}^{\#}(A) R_{-i\sqrt{z}}^{\#}(A),$$

знайдемо його резольвентну функцію

$$\left(R_z^{\#}(A)\varphi\right)(t) = \varphi(t) - \sqrt{z} \int_0^t \varphi(\tau) \sin\sqrt{z}(t-\tau) d\tau.$$

Неважко підрахувати, що

$$(A^k\varphi)(t) = (-1)^k \int_0^t \frac{(t-\tau)^{2k-1}}{(2k-1)!} \varphi(\tau) d\tau.$$

Нехай

$$x_0(t) \equiv 1, \qquad y_0(t) \equiv 1 \in \mathcal{Y} = C[0,1], \qquad \langle x, y\rangle = \int\limits_0^1 x(t)y(t)dt.$$

Тоді

$$f(z) = \int\limits_0^1 \left(R_z^{\#}(A)x_0\right)(t)dt = \int\limits_0^1 \left\{1 - \sqrt{z}\int\limits_0^t \sin\sqrt{z}(t-\tau)d\tau\right\}dt = \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}.$$

Вибираючи $x_0(t) \equiv 1,\ y_0(t) = (1-t^2)^{\nu-1/2},\ \nu > -1/2$, отримуємо

$$f(z) = \int\limits_0^1 \cos\sqrt{z}t \cdot (1-t^2)^{\nu-1/2}dt = \frac{J_\nu(\sqrt{z})\pi^{1/2}\Gamma(\nu+1/2)}{2(\sqrt{z}/2)^\nu},$$

де

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^\infty \frac{\left(-z^2/4\right)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}$$

— функція Бесселя порядку ν (див. [73, с. 180–182]).

Візьмемо в ролі початкових елементів $x_0(t) = t,\ y_0(t) = 1/t \in \mathcal{Y} = C(0,1] \cap L([0,1], tdt)$. Тоді

$$f(z) = \int\limits_0^1 \frac{\sin\sqrt{z}t}{\sqrt{z}t}dt = \frac{\mathrm{Si}(\sqrt{z})}{\sqrt{z}},$$

де

$$\mathrm{Si}(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}$$

— інтегральний синус (див. [73, с. 59]).

Нарешті, вибравши $x_0(t) \equiv 1,\ y_0(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} \in \mathcal{Y} = C(0,1] \cap L[0,1]$, отримаємо

$$f(z) = \int\limits_0^1 \frac{\cos\sqrt{z}t}{\sqrt{t}}dt = 2\int\limits_0^1 \cos\sqrt{z}t^2 dt = \sqrt{2\pi}\frac{C\left(\sqrt{2/\pi}z^{1/4}\right)}{z^{1/4}},$$

де

$$C(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k(\pi/2)^{2k}}{(2k)!(4k+1)} z^{4k+1}$$

— інтеграл Френеля (див. [73, с. 123]).

Приклад 4. Подальшим узагальненням ситуацій, наведених у прикладі 1, є розгляд у просторі $L[0,1]$ лінійного неперервного оператора дробового інтегрування

$$(A\varphi)(t) = \int\limits_0^t \frac{(t-\tau)^{1/\rho-1}}{\Gamma(1/\rho)}\varphi(\tau)d\tau, \quad 0 < \rho < \infty.$$

Степені цього оператора можуть бути записані у вигляді

$$(A^k\varphi)(t) = \int\limits_0^t \frac{(t-\tau)^{k/\rho-1}}{\Gamma(k/\rho)}\varphi(\tau)d\tau, \quad k \geq 1,$$

звідки випливає

$$\left(R_z^{\#}(A)\varphi\right)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k (A^k\varphi)(t) = \varphi(t) + \int\limits_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{k/\rho-1}z^k}{\Gamma(k/\rho)}\varphi(\tau)d\tau =$$

$$= \varphi(t) + z\int\limits_0^t \varphi(\tau)(t-\tau)^{1/\rho-1}E_\rho(z(t-\tau)^{1/\rho}; 1/\rho)d\tau,$$

де

$$E_\rho(z;\mu) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k/\rho+\mu)}$$

— функція типу Міттаг-Леффлера (див. [75, с. 117]). Легко побачити, що при

$$x_0(t) = \frac{t^{\nu_1}}{\Gamma(\nu_1+1)}, \qquad y_0(t) = \frac{x(t)(1-t)^{\nu_2}}{\Gamma(\nu_2+1)} \in \mathcal{Y} = C[0,1) \cap L[0,1]$$

отримаємо

$$s_k = \langle x_k, y_0\rangle = \int\limits_0^1 x_k(t)y_0(t)dt = \frac{1}{\Gamma(k/\rho+\nu_1+\nu_2+2)},$$

отже,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = E_\rho(z; \nu_1+\nu_2+2).$$

Зауваження. Узагальнені моментні зображення функцій Міттаг-Леффлера побудовано та вивчено в [76]. Поширення цих результатів на функції типу Міттаг-Леффлера виконано М. Чипом [77].

Приклад 5. Ситуацію, наведену в прикладі 1, можна узагальнити ще й таким чином. Розглянемо у просторі $\mathcal{X} = L[0,1]$ для деякого $q \in (0,+\infty)$, $q \neq 1$, лінійний обмежений оператор

$$(A\varphi)(t) = \int\limits_0^{t^q} \varphi(\tau)d\tau.$$

Степені цього оператора можуть бути зображені у вигляді

$$(A^k\varphi)(t) = \int\limits_0^{t^{q^k}} \varphi(u)\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^m \frac{q^{m(m-1)/2}}{m_q!(k-m-1)_q!} t^{(k-m)_q-1}u^{m_q q^{-m}}du, \quad k=\overline{1,\infty},$$

де

$$k_q := 1+q+\dots+q^{k-1} = \frac{q^k-1}{q-1},$$

$$k_q! := \begin{cases} \prod_{i=1}^{k} i_q = (1+q)(1+q+q^2)\dots(1+q+\dots+q^{k-1}) & \text{для } k \ge 1; \\ 1 & \text{для } k = 0. \end{cases}$$

Нехай

$$x_0(t) \equiv 1, \qquad y_0(t) \equiv 1 \in \mathcal{Y} = C[0,1], \qquad \langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t)y(t)dt.$$

Тоді

$$x_k(t) = (A^k x_0)(t) = \frac{t^{(k+1)_q - 1}}{k_q!},$$

$$y_j(t) = (A^{*j} y_0)(t) = \sum_{m=0}^{j} (-1)^m \frac{q^{m(m-1)/2}}{m_q!(j-m)_q!} t^{m_q q^{-m}}.$$

Нарешті, підрахуємо узагальнені моменти:

$$s_k = \int_0^1 x_k(t)dt = \int_0^1 \frac{t^{(k+1)_q-1}}{k_q!} dt = \frac{1}{(k+1)_q!}, \quad k = \overline{0,\infty}.$$

Таким чином, ми побудували узагальнене моментне зображення послідовності коефіцієнтів степеневого розвинення функції

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)_q!} = \frac{E_q(z) - 1}{z}, \tag{10}$$

де q-аналог експоненти $E_q(z)$ визначається рядом (див. [78])

$$E_q(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k_q!}.$$

Не змінюючи $y_0(t) \equiv 1$, виберемо $x_0(t) = t^\nu$, $\nu > -1$. В результаті отримаємо

$$x_k(t) = (A^k x_0)(t) = \frac{t^{(k+1)_q - 1 + \nu q^k}}{\prod_{m=1}^{k} (m_q + \nu q^{m-1})}.$$

Відповідні узагальнені моменти будуть мати вигляд

$$s_k = \int_0^1 x_k(t)dt = \frac{1}{\prod_{m=1}^{k+1} (m_q + \nu q^{m-1})}, \quad k = \overline{0,\infty}.$$

Твірну функцію цієї послідовності можна зобразити у вигляді

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(1+\nu)(1+q+\nu q)\dots(1+q+\dots+q^k+\nu q^k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{q})^{k(k+1)/2}(\frac{q-1}{\nu(q-1)+q})^{k+1} z^k}{(\frac{1}{\nu(q-1)+1}; \frac{1}{q})_{k+1}},$$

де $(a;q)_k$ є q-символом Похгаммера і визначається формулою (див. [79, с. 31])

$$(a;q)_k := \begin{cases} (1-a)(1-aq)\dots(1-aq^{k-1}) & \text{для } k \geq 1; \\ 1 & \text{для } k = 0. \end{cases}$$

Приклад 6. Розглянемо у просторі $\mathcal{X} = L[0,1]$ для деякого $q \in (0,\infty)$ лінійний неперервний оператор

$$(A\varphi)(t) = \varkappa \int_0^{t^q} \varphi(\tau)d\tau + t^q \varphi(t^q). \tag{11}$$

Його степені можуть бути зображені у вигляді

$$(A^k\varphi)(t) = \int_0^{t^{q^k}} \varphi(\tau) \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m t^{(k-m)_q - 1} \tau^{m_q q^{-m}} \times$$

$$\times \frac{\prod_{r=0}^{k-1-m} (\varkappa + r_q) \prod_{p=1}^{m} (\varphi q^p - p_q)}{m_q!(k-1-m)_q! q^m} d\tau + t^{(k+1)_q - 1} \varphi(t^{q^k}), \quad k = \overline{1,\infty}.$$

Нескладно отримати зображення для оператора, спряженого до оператора (11) відносно білінійної форми $\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t)y(t)dt$, та його степенів:

$$(A^*\psi)(t) = \varkappa \int_{t^{1/q}}^1 \psi(\tau)d\tau + \frac{1}{q}\psi(t^{1/q})t^{1/q},$$

$$(A^{*j}\psi)(t) = \int_{t^{1/q^j}}^1 \psi(\tau) \sum_{m=0}^{j-1} (-1)^m \tau^{(j-m)_q - 1} t^{m_q q^{-m}} \times$$

$$\times \frac{\prod_{r=0}^{j-1-m} (\varkappa + r_q) \prod_{p=1}^{m} (\varkappa q^p - p_q)}{m_q!(j-1-m)_q! q^m} d\tau + \frac{1}{q^j}\psi(t^{1/q^j}) t^{j_q q^{-j}}, \quad j = \overline{1,\infty}.$$

Покладемо $x_0(t) \equiv 1$. Тоді отримаємо

$$x_k(t) = (A^k x_0)(t) = \frac{\prod_{r=1}^{k} (\varkappa + r_q)}{k_q!} t^{(k+1)_q - 1}.$$

Аналогічно, для $y_0(t) \equiv 1$

$$y_j(t) = (A^{*j} y_0)(t) = \sum_{m=0}^{j} (-1)^m \frac{\prod\limits_{r=0}^{j-1-m} (\varkappa + r_q) \prod\limits_{p=1}^{m} (\varkappa q^p - p_q)}{m_q!(j-m)_q! q^m} t^{m_q q^{-m}}.$$

Обчислимо узагальнені моменти:

$$s_k = \int_0^1 x_k(t)dt = \int_0^1 \frac{\prod\limits_{r=1}^{k} (\varkappa + r_q)}{k_q!} t^{(k+1)_q - 1} dt = \frac{\prod\limits_{r=1}^{k} (\varkappa + r_q)}{(k+1)_q!}, \quad k = \overline{0, \infty}.$$

Для $|q| < 1$ маємо (див. [79, с. 32])

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod\limits_{r=1}^{k} (\varkappa + r_q)}{(k+1)_q!} z^k = \frac{\prod\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(1 - zq^k)}{(1 - (\varkappa(1-q)+1)zq^k)} - 1}{\varkappa z},$$

а для $|q| > 1$

$$f(z) = \frac{1}{\varkappa z} \left\{ -1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varkappa(1-q)+1; \frac{1}{q})_k}{(\frac{1}{q}; \frac{1}{q})_k} \left(\frac{z}{q}\right)^k \right\} =$$

$$= \frac{\prod\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(1 - (\varkappa(1-q)+1)zq^{-k-1})}{(1 - zq^{-k-1})} - 1}{\varkappa z}.$$

Не змінюючи $_0(t) \equiv 1$, виберемо $x_0(t) = t^{\nu}$, $\nu > -1$. В результаті отримаємо

$$x_k(t) = (A^k x_0)(t) = \prod_{m=1}^{k} \frac{(m_q + \nu q^{m-1} + \varkappa)}{(m_q + \nu q^{m-1})} t^{(k+1)_q - 1 + \nu q^k}.$$

Відповідні узагальнені моменти мають вигляд

$$s_k = \int_0^1 x_k(t)dt = \int_0^1 \prod_{m=1}^{k} \frac{(m_q + \nu q^{m-1} + \varkappa)}{(m_q + \nu q^{m-1})} t^{(k+1)_q - 1 + \nu q^k} dt =$$

$$= \frac{\prod\limits_{m=1}^{k} (m_q + \nu q^{m-1} + \varkappa)}{\prod\limits_{m=1}^{k+1} (m_q + \nu q^{m-1})}, \quad k = \overline{0, \infty}.$$

Зауваження. Узагальнені моментні зображення, наведені в прикладах 5, 6, було побудовано в [70, 80].

Приклад 7. Функції, які розглядалися в прикладах 5 та 6, тісно пов'язані з так званими базисними гіпергеометричними рядами.

Означення 9 (див. [81, с. 196]). *Базисним гіпергеометричним рядом для деякого* q, $|q| < 1$, *називається степеневий ряд вигляду*

$$ {}_r\Phi_s \left[\begin{matrix} \alpha_1, & \alpha_2, \ldots, \alpha_r; z \\ & \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s \end{matrix} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1; q)_k (\alpha_2; q)_k \ldots (\alpha_r; q)_k}{(q; q)_k (\rho_1; q)_k \ldots (\rho_s; q)_k} z^k. $$

Інший підхід до побудови узагальнених моментних зображень базисних гіпергеометричних рядів ґрунтується на понятті q-інтеграла Ф. Джексона.

Означення 10 [82]. *Для деякого фіксованого* q, $|q| < 1$, q*-інтеграл від заданої на відрізку* $[0, 1]$ *функції* $\varphi(x)$ *визначається за формулою*

$$ \Phi(x) = \int_0^x \varphi(u) d_q u = x(1-q) \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(xq^k) q^k, \tag{12} $$

де $x \in [0, 1]$, *якщо ряд у правій частині* (12) *збігається.*

Оберненим оператором до оператора q-інтегрування (12) є оператор q-диференціювання.

Означення 11 [83]. *Для деякого фіксованого* q, $|q| < 1$, q*-похідна заданої на відрізку* $[0, 1]$ *функції* $\Phi(x)$ *визначається за формулою*

$$ \frac{d_q}{d_q x} \Phi(x) = \frac{\Phi(x) - \Phi(qx)}{(1-q)x}. $$

Очевидно, що у випадку існування q-інтеграла (12) справедлива тотожність

$$ \frac{d_q}{d_q x} \int_0^x \varphi(u) d_q u \equiv \varphi(u). $$

Розглянемо у просторі $\mathcal{X} = L[0, 1] \cap C(0, 1]$ лінійний неперервний оператор

$$ (A\varphi)(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d_q \tau = t(1-q) \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(tq^k) q^k. \tag{13} $$

Обчислимо його резольвентну функцію

$$ \left(R_z^{\#}(A)\psi \right)(t) = \varphi(t) = \psi(t) + z \int_0^t \psi(\tau) \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1 - (1-q)z\tau q^{m+1}}{1 - (1-q)ztq^m} d_q \tau. $$

Степені оператора (13) можуть бути зображені у вигляді

$$ (A^k \varphi)(t) = (1-q)^{k-1} \int_0^t \varphi(\tau) \frac{\prod_{m=1}^{k-1} (t - \tau q^m)}{(q; q)_{k-1}} d_q \tau, \quad k = \overline{1, \infty}. $$

Нехай $\mathcal{Y} = C[0, 1]$. Степені оператора, спряженого до оператора (13) відносно білінійної форми

$$\langle x, y\rangle = \int\limits_0^1 x(t)y(t)d_qt,$$

можуть бути зображені у вигляді

$$(A^{*j}\psi)(t) = (1-q)^{j-1}\int\limits_{qt}^1 \psi(\tau)\frac{\prod\limits_{m=1}^{j-1}(\tau - tq^m)}{(q;q)_{j-1}}d_q\tau, \quad j = \overline{1,\infty}.$$

Нехай $x_0(t) \equiv 1$. Тоді

$$x_k(t) = (A^k x_0)(t) = \frac{(1-q)^k}{(q;q)_k}t^k.$$

Аналогічно, вибираючи $y_0(t) \equiv 1$, отримаємо

$$y_j(t) = (A^{*j}y_0)(t) = \frac{(1-q)^j(tq;q)_j}{(q;q)_j}, \quad j = \overline{0,\infty}.$$

Відповідні узагальнені моменти будуть мати вигляд

$$s_k = \int\limits_0^1 x_k(t)d_qt = \frac{(1-q)^k}{(q;q)_k}(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^{kn+n} =$$

$$= \frac{(1-q)^{k+1}}{(q;q)_{k+1}} = \frac{1}{(k+1)_q!}, \quad k = \overline{0,\infty}.$$

Отже, ми побудували узагальнене моментне зображення послідовності коефіцієнтів степеневого розвинення функції (10) при $|q| < 1$. Не змінюючи $y_0(t)$, покладемо $x_0(t) = t^\nu$, $\nu > -1$. В результаті отримаємо

$$x_k(t) = (A^k x_0)(t) = (1-q)^k t^{k+\nu}\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1-q^{k+n+\nu+1})}{(1-q^{n+\nu+1})} = \frac{(1-q)^k}{(q^{\nu+1};q)_k}t^{k+\nu}.$$

Обчислимо узагальнені моменти

$$s_k = \int\limits_0^1 x_k(t)d_qt = \frac{(1-q)^{k+1}}{(q^{\nu+1};q)_k}\sum_{n=0}^{\infty} q^{n(k+\nu+1)} = \frac{(1-q)^{k+1}}{(q^{\nu+1};q)_{k+1}}, \quad k = \overline{0,\infty}.$$

Відповідна функція має вигляд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-q)^{k+1}z^k}{(q^{\nu+1};q)_{k+1}} = \frac{{}_1\Phi_1\left[\begin{matrix} q; & (1-q)z \\ & q^{\nu+1}\end{matrix}\right] - 1}{z}.$$

Приклад 8. Розглянемо в просторі $\mathcal{X} = L[0,1] \cap C(0,1]$ лінійний неперервний оператор

$$(A\varphi)(t) = \varkappa \int_0^t \varphi(\tau) d_q\tau + t\varphi(t).$$

Його резольвентна функція має вигляд

$$\left(R_z^{\#}(A)\psi\right)(t) = \frac{\psi(t)}{1 - zt} + \varkappa z \int_0^t \frac{\psi(\tau)\sigma(zt)}{(1 - z\tau)\left(1 - z\tau(1 + \varkappa - \varkappa q)\right)\sigma(z\tau)} d_q$$

Отримаємо вирази для степенів оператора (14):

$$(A^k\varphi)(t) = \varkappa \int_0^t \varphi(\tau) \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\left(\frac{q}{1+\varkappa-\varkappa q}; q\right)_n (q(1+\varkappa-\varkappa q); q)_{k-1-n}}{(q;q)_n (q;q)_{k-1-n}} \times$$

$$\times \left(t(1+\varkappa-\varkappa q)\right)^n \tau^{k-1-n} d_q\tau + t^k\varphi(t), \quad k = \overline{1,\infty}.$$

Степені спряженого оператора відносно білінійної форми

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t) y(t) d_q t$$

можна записати у вигляді

$$(A^{*j}\psi)(t) = \varkappa \int_{qt}^1 \psi(\tau) \sum_{n=0}^{j-1} \frac{\left(\frac{q}{1+\varkappa-\varkappa q}; q\right)_n (q(1+\varkappa-\varkappa q); q)_{j-1-n}}{(q;q)_n (q;q)_{j-1-n}} \times$$

$$\times \left(\tau(1+\varkappa-\varkappa q)\right)^n t^{j-1-n} d_q\tau + t^j\psi(t), \quad j = \overline{1,\infty}.$$

Нехай $x_0(t) \equiv 1$. Тоді

$$x_k(t) = (A^k x_0)(t) = \frac{\left(\frac{q}{1+\varkappa-\varkappa q}; q\right)_k}{(q;q)_k} (1+\varkappa-\varkappa q)^k t^k, \quad k = \overline{0,\infty}$$

Аналогічно, вибираючи $y_0(t) \equiv 1 \in \mathcal{Y} = C[0,1]$, отримуємо

$$y_j(t) = (A^{*j} y_0)(t) =$$

$$= \sum_{n=0}^{j} \frac{\left(\frac{1}{1+\varkappa-\varkappa q}; q\right)_n (q(1+\varkappa-\varkappa q); q)_{j-n}}{(q;q)_n (q;q)_{j-n}} (1+\varkappa-\varkappa q)^n t^{j-n}.$$

Відповідні узагальнені моменти дорівнюють

$$s_k = \int_0^1 x_k(t) d_q t = (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{q}{1+\varkappa-\varkappa q}; q\right)_k}{(q;q)_k} \times$$

$$\times(1+\varkappa-\varkappa q)^k q^{kn+n} = \frac{(1-q)\left(\dfrac{q}{1+\varkappa-\varkappa q};q\right)_k (1+\varkappa-\varkappa q)^k}{(q;q)_{k+1}} =$$

$$= \frac{\left(\dfrac{q}{1+\varkappa-\varkappa q};q\right)_k (1+\varkappa-\varkappa q)^k}{(q^2;q)_k}, \quad k=\overline{0,\infty}.$$

Отже, побудовано узагальнене моментне зображення послідовності коефіцієнтів степеневого розвинення функції:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = {}_2\Phi_1\left[\begin{matrix} q; & \dfrac{q}{1+\varkappa-\varkappa q}; & (1+\varkappa-\varkappa q)z \\ & q^2 & \end{matrix}\right].$$

Покладемо тепер $x_0(t) = t^{\nu}$, $\nu > -1$. Тоді

$$x_k(t) = \frac{\left(\dfrac{q^{\nu+1}}{1+\varkappa-\varkappa q};q\right)_k}{(q^{\nu+1};q)_k}(1+\varkappa-\varkappa q)^k t^{k+\nu}, \quad k=\overline{0,\infty}.$$

Не змінюючи $y_j(t)$, $j=\overline{0,\infty}$, отримуємо

$$s_k = \int_0^1 x_k(t) d_q t = (1-q)\frac{\left(\dfrac{q^{\nu+1}}{1+\varkappa-\varkappa q};q\right)_k (1+\varkappa-\varkappa q)^k}{(q^{\nu+1};q)_{k+1}}, \quad k=\overline{0,\infty},$$

і відповідна функція має вигляд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = \frac{1-q}{1-q^{\nu+1}}\ {}_2\Phi_1\left[\begin{matrix} q; & \dfrac{q^{\nu+1}}{1+\varkappa-\varkappa q}; & (1+\varkappa-\varkappa q)z \\ & q^{\nu+2} & \end{matrix}\right].$$

Зауваження. Узагальнені моментні зображення, наведені в прикладах 7, 8, побудовано в [84].

Приклад 9 [85]. Розглянемо в просторі $\mathcal{X} = L[0,1]$ лінійний неперервний оператор

$$(A\varphi)(t) = t\varphi(1-t).$$

Легко побачити, що його квадрат можна зобразити у вигляді

$$(A^2\varphi)(t) = t(1-t)\varphi(t).$$

Резольвентна функція оператора A^2 має вигляд

$$\left(R_z^{\#}(A^2)\varphi\right)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k (A^{2k}\varphi)(t) = \frac{\varphi(t)}{1-zt(1-t)}. \tag{15}$$

Оскільки виконується тотожність

$$R_z^{\#}(A^2) = R_{-\sqrt{z}}^{\#}(A) R_{\sqrt{z}}^{\#}(A),$$

то, очевидно,

$$R^{\#}_{\sqrt{z}}(A) = (I + \sqrt{z}A)R^{\#}_{z}(A^2).$$

Отже, з (15) одержуємо

$$\left(R^{\#}_{z}(A)\varphi\right)(t) = \frac{\varphi(t) + zt\varphi(1-t)}{1 - z^2t(1-t)}.$$

Степені оператора A та спряженого до нього відносно скалярного добутку $\langle x, y\rangle = \int_0^1 x(t)y(t)dt$ оператора A^* мають такі зображення:

$$(A^k\varphi)(t) = \begin{cases} t^m(1-t)^m\varphi(t), & \text{якщо } \; k = 2m - \text{ парне;} \\ t^{m+1}(1-t)^m\varphi(t), & \text{якщо } \; k = 2m+1 - \text{ непарне,} \end{cases}$$

$$(A^{*j}\psi)(t) = \begin{cases} t^n(1-t)^n\psi(t), & \text{якщо } \; j = 2n - \text{ парне;} \\ t^n(1-t)^{n+1}\psi(t), & \text{якщо } \; j = 2n+1 - \text{ непарне.} \end{cases}$$

Нехай $x_0(t) \equiv 1$, $y_0(t) \equiv 1$. Тоді

$$f(z) = \int\limits_0^1 \left(R^{\#}_{z}(A)x_0\right)(t)y_0(t)dt = \int\limits_0^t \frac{1+zt}{1-z^2t(1-t)}dt = \frac{2(2+z)}{z\sqrt{4-z^2}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{4-z^2}}.$$

Покладемо при тому ж $y_0(t)$

$$x_0(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [0, 1/2]; \\ \varphi(1-t), & t \in [1/2, 1], \end{cases}$$

де $\varphi(t)$ — деяка функція з $L[0, 1/2]$. Тоді

$$f(z) = 2\int\limits_0^{1/2} \frac{1+zt}{1-z^2t(1-t)}\varphi(t)dt.$$

Приклад 10 [85]. Розглянемо в просторі $\mathcal{X} = C[0,1]$ лінійний обмежений оператор

$$(A\varphi)(t) = \int\limits_0^{1-t} \varphi(\tau)d\tau. \tag{16}$$

Його квадрат можна зобразити у вигляді

$$(A^2\varphi)(t) = (1-t)\int\limits_0^t \varphi(\tau)d\tau + \int\limits_t^1 \varphi(\tau)(1-\tau)d\tau.$$

Покладемо $x_0(t) \equiv 1$ і знайдемо резольвентну функцію оператора A^2:

$$\left(R^{\#}_{z}(A^2)x_0\right)(t) = \frac{\cos\sqrt{z}t}{\cos\sqrt{z}}.$$

Вибираючи $y_0(t) \equiv 1 \in \mathcal{Y} = C[0,1]$, $\langle x, y\rangle = \int\limits_0^1 x(t)y(t)dt$, будуємо функцію

$$f(z)=\int\limits_0^1 \left(R_z^{\#}(A^2)x_0\right)(t)y_0(t)dt=\int\limits_0^1 \frac{\cos\sqrt{z}t}{\cos\sqrt{z}}dt=\frac{\mathrm{tg}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}. \tag{17}$$

Враховуючи розвинення

$$\frac{\cos\sqrt{z}t}{\cos\sqrt{z}}=\cos\sqrt{z}t\cdot\sec\sqrt{z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^k t^{2k}}{(2k)!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{E_m z^m}{(2m)!}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} z^k\sum_{m=0}^{k}\frac{(-1)^m t^{2m}E_{k-m}}{(2m)!(2k-2m)!},$$

де E_k — числа Ейлера, що визначаються формулами (див. [73, с. 607])

$$E_k=\frac{2^{2k+2}(2k)!}{\pi^{2k+1}}\left\{1-\frac{1}{3^{2k+1}}+\frac{1}{5^{2k+1}}-\frac{1}{7^{2k+1}}+\cdots\right\}, \tag{18}$$

отримуємо

$$x_{2k}(t)=\sum_{m=0}^{k}\frac{(-1)^m t^{2m}E_{k-m}}{(2m)!(2k-2m)!},\quad k=\overline{0,\infty}. \tag{19}$$

Оскільки оператор (16), як легко переконатись, є самоспряженим відносно білінійної форми $\langle x,y\rangle=\int_0^1 x(t)y(t)dt$, одержимо також

$$y_{2j}(t)=x_{2j}(t)=\sum_{m=0}^{j}\frac{(-1)^m t^{2m}E_{j-m}}{(2m)!(2j-2m)!},\quad j=\overline{0,\infty}. \tag{20}$$

Приклад 11 [85]. У попередньому прикладі ми побудували узагальнене моментне зображення послідовності коефіцієнтів степеневого розвинення функції (17), ґрунтуючись на застосуванні квадрата оператора (16). Тепер будемо застосовувати безпосередньо сам оператор (16). Для $x_0(t)\equiv 1$ отримаємо

$$\left(R_z^{\#}(A)x_0\right)(t)=\{(I+zA)R_{z^2}^{\#}(A^2)x_0\}(t)=$$

$$=\frac{\cos zt}{\cos z}+z\int\limits_0^{1-t}\frac{\cos z\tau}{\cos z}d\tau=\frac{\cos zt+\sin z(1-t)}{\cos z}.$$

Вибираючи $y_0(t)\equiv 1$, отримуємо функцію

$$f(z)=\int\limits_0^1\left(R_z^{\#}(A)x_0\right)(t)y_0(t)dt=\int\limits_0^1\frac{\cos zt+\sin z(1-t)}{\cos z}dt=\frac{\sin z+1-\cos z}{z\cos z}.$$

Для побудови відповідного узагальненого моментного зображення залишилось записати послідовності $\{x_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$, $\{y_j(t)\}_{j=0}^{\infty}$. Для парних показників ми вже маємо формули (19), (20). З цих же формул легко отримати формули і для непарних показників:

$$x_{2k+1}(t)=(Ax_{2k})(t)=\sum_{m=0}^{k}\frac{(-1)^m(1-t)^{2m+1}E_{k-m}}{(2m+1)!(2k-2m)!},\quad k=\overline{0,\infty},$$

$$y_{2j+1}(t) = x_{2j+1}(t) = \sum_{m=0}^{j} \frac{(-1)^m (1-t)^{2m+1} E_{j-m}}{(2m+1)!(2j-2m)!}, \quad j = \overline{0, \infty}.$$

Приклад 12 **[86].** Розглянемо в просторі $\mathcal{X} = C[0,1]$ лінійний неперервний оператор

$$(A\varphi)(t) = \varphi\left(\frac{t}{(1-\gamma)t+\gamma}\right), \qquad 0 < \gamma < \infty, \quad \gamma \neq 1.$$

Оскільки дробово-лінійне відображення

$$\sigma(t) = \frac{t}{(1-\gamma)t+\gamma}$$

для кожного $0 < \gamma < \infty$, $\gamma \neq 1$, є дифеоморфізмом відрізка $[0,1]$ на себе, то визначений цим зображенням оператор A дійсно відображає простір $C[0,1]$ в $C[0,1]$. Неважко підрахувати, що

$$(A^k\varphi)(t) = \varphi\left(\frac{t}{(1-\gamma^k)t+\gamma^k}\right), \quad k = \overline{0, \infty}.$$

Покладемо

$$x_0(t) = \frac{t}{(1-\delta)t+\delta}, \qquad 0 < \delta < \infty, \quad \delta \neq 1.$$

Тоді

$$x_k(t) = (A^k x_0)(t) = \frac{t}{(1-\delta\gamma^k)t+\delta\gamma^k}, \quad k = \overline{0, \infty}.$$

Нехай $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^*$ і $\langle x, y\rangle = y(x)$. Розглянемо лінійний неперервний функціонал на $C[0,1]$

$$y_0(x) = x(t_0),$$

де $t_0 \in (0,1)$. В результаті отримаємо

$$s_k = \langle x_k, y_0\rangle = y_0(x_k) = x_k(t_0) = \frac{t_0}{(1-\delta\gamma^k)t_0+\delta\gamma^k}, \quad k = \overline{0, \infty}.$$

Неважко переконатись, що, якщо позначити

$$t_j := \frac{t_0}{(1-\gamma^j)t_0+\gamma^j}, \; j = \overline{0, \infty},$$

і визначити лінійні неперервні функціонали

$$y_j(x) = x(t_j) = x\left(\frac{t_0}{(1-\gamma^j)t_0+\gamma^j}\right), \quad j = \overline{0, \infty},$$

отримаємо узагальнене моментне зображення

$$s_{k+j} = y_j(x_k), \quad k, j = \overline{0, \infty},$$

послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Розглянемо тепер білінійну форму

$$\langle x, y\rangle = \int_0^1 x(t)y(t)dt$$

на добутку просторів $\mathcal{X} = C[0,1]$ та $\mathcal{Y} = C[0,1]$. Покладемо $y_0(t) \equiv 1$. Тоді одержимо

$$s_k = \int_0^1 x_k(t)dt = \int_0^1 \frac{t}{(1-\delta\gamma^k)t + \delta\gamma^k}dt = \frac{1}{1-\delta\gamma^k} + \frac{(\ln\delta + k\ln\gamma)\delta\gamma^k}{(1-\delta\gamma^k)^2}, \quad k = \overline{0,\infty}.$$

Неважко підрахувати, що

$$(A^*\psi)(t) = \frac{\gamma}{(1-(1-\gamma)t)^2}\psi\left(\frac{\gamma t}{1-(1-\gamma)t}\right).$$

Степені спряженого оператора будуть мати зображення

$$(A^{*j}\psi)(t) = \frac{\gamma^j}{(1-(1-\gamma^j)t)^2}\psi\left(\frac{\gamma^j t}{1-(1-\gamma^j)t}\right), \quad j = \overline{0,\infty},$$

і, отже,

$$y_j(t) = (A^{*j}y_0)(t) = \frac{\gamma^j}{(1-(1-\gamma^j)t)^2}, \quad j = \overline{0,\infty}.$$

Приклад 13. У гільбертовому просторі $\mathcal{X} = L_2(-\infty,\infty)$ розглянемо лінійний неперервний оператор

$$(A\varphi)(t) = \varphi(t+\lambda), \quad 0 < \lambda < \infty.$$

Як легко переконатися, степені цього оператора та спряженого до нього оператора A^* мають зображення

$$(A^k\varphi)(t) = \varphi(t+k\lambda), \quad k = \overline{0,\infty},$$

$$(A^{*j}\psi)(t) = \psi(t-j\lambda), \quad j = \overline{0,\infty}.$$

Покладемо

$$x_0(t) = \exp\{-\alpha(t+\gamma)^2\}, \qquad 0 < \alpha < \infty, \quad -\infty < \gamma < \infty,$$

$$y_0(t) = \exp\{-\beta t^2\}, \quad 0 < \beta < \infty.$$

Тоді отримаємо

$$x_k(t) = (A^k x_0)(t) = \exp\{-\alpha(t+k\lambda+\gamma)^2\}, \quad k = \overline{0,\infty},$$

$$y_j(t) = (A^{*j}y_0)(t) = \exp\{-\beta(t-j\lambda)^2\}, \quad j = \overline{0,\infty}.$$

Відповідні узагальнені моменти дорівнюють

$$s_k = \int_{-\infty}^{\infty} x_k(t) y_0(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha(t + k\lambda + \gamma)^2 - \beta t^2\} dt =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{\alpha+\beta}} \exp\left\{-\frac{\alpha\beta(\gamma + k\lambda)^2}{\alpha+\beta}\right\}, \quad k = \overline{0, \infty}.$$

5. Біортогональні поліноми та їх властивості. Як вже зазначалося в п. 2, задача побудови апроксимант Паде функцій, для коефіцієнтів степеневих розкладів яких відомі узагальнені моментні зображення, зводиться до біортогоналізації певних систем функцій. Розглянемо деякі загальні властивості біортогональних поліномів. Зазначимо, що відповідні питання вивчалися рядом дослідників (див., наприклад, [87, 88]). В. К. Дзядиком [89] було встановлено наступний результат.

Теорема 4. *Нехай* $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ *— така числова послідовність, що всі її визначники Ганкеля*

$$H_N = H_{0,N} = \det\|s_{k+j}\|_{k,j=0}^{N}$$

відмінні від нуля, і нехай в лінійному просторі $\mathcal{X}$ *задано послідовність* $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, *а в лінійному просторі* $\mathcal{Y}$ *— послідовність* $\{y_j\}_{j=0}^{\infty}$, *причому справедливі рівності*

$$\langle x_k, y_j \rangle = s_{k+j}, \quad k, j = \overline{0, \infty},$$

де $\langle .,. \rangle$ *— білінійна форма, задана на добутку просторів* $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. *Тоді якщо для кожного* $N = \overline{0, \infty}$ *побудувати узагальнені поліноми*

$$X_0 = \varepsilon_0 x_0, \quad X_N = \varepsilon_N \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_N \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{N+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{N-1} & s_N & \cdots & s_{2N-1} \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_N \end{vmatrix}, \quad N = \overline{1, \infty}, \tag{21}$$

та

$$Y_0 = \varepsilon_0 y_0, \quad Y_N = \varepsilon_N \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_N \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{N+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{N-1} & s_N & \cdots & s_{2N-1} \\ y_0 & y_1 & \cdots & y_N \end{vmatrix}, \quad N = \overline{1, \infty}, \tag{22}$$

де $\varepsilon_N := \dfrac{1}{\sqrt{H_N H_{N-1}}}$, $N = \overline{0, \infty}$, $H_{-1} := 1$, *то будуть виконуватись співвідношення біортогональності*

$$\langle X_M, Y_N \rangle = \delta_{M,N}, \quad M, N = \overline{0, \infty}.$$

Побудуємо для описаних вище систем біортогональних поліномів тричленні рекурентні співвідношення при додаткових обмеженнях, пов'язаних з узагальненими моментними зображеннями.

Теорема 5 [90]. *Нехай за умов теореми 3 у просторі $\mathcal{X}$ існує лінійний обмежений оператор $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ такий, що*

$$Ax_k = x_{k+1}, \quad k = \overline{0, \infty},$$

а в просторі $\mathcal{Y}$ — оператор A^*, спряжений до оператора A відносно білінійної форми $\langle .,. \rangle$. Тоді для біортогональних поліномів (21), (22) *справедливі рекурентні співвідношення*

$$AX_N = \alpha_N X_{N+1} + \gamma_N X_N + \alpha_{N-1} X_{N-1}, \quad N = \overline{0, \infty},$$

$$A^* Y_N = \alpha_N Y_{N+1} + \gamma_N Y_N + \alpha_{N-1} Y_{N-1}, \quad N = \overline{0, \infty},$$

де $\alpha_N = \dfrac{\sqrt{H_{N-1} H_{N+1}}}{H_N}$, $N = \overline{0, \infty}$, $\alpha_{-1} := 0$,

$$\gamma_N = \frac{\tilde{H}_N}{H_N} + \frac{\tilde{H}_{N-1}}{H_{N-1}},$$

$$\tilde{H}_N := \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_N \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{N+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{N-1} & s_N & \cdots & s_{2N-1} \\ s_{N+1} & s_{N+2} & \cdots & s_{2N+1} \end{vmatrix}.$$

Зауваження. В дещо більш вузькому формулюванні аналогічний результат наведено в [1, с. 358] (див. також [91]).

При застосуванні систем біортогональних поліномів до раціональної апроксимації одним з найважливіших є питання знаходження більш ефективних критеріїв невиродженої біортогоналізованості, ніж відмінність від нуля визначників Ганкеля. Перш ніж сформулювати відповідний результат, наведемо наступне означення.

Означення 12 (див. [92, с. 18]). *Система неперервних функцій $\{x_k(t)\}_{k=0}^N$, заданих на деякій множині $\mathfrak{M}$ метричного простору, що містить принаймні $N+1$ точку, називається чебишовською на цій множині, якщо будь-який узагальнений поліном*

$$P_N(t) = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} x_k(t),$$

коефіцієнти якого $c_k^{(N)}$, $k = \overline{0, N}$, не дорівнюють нулю одночасно, має на $\mathfrak{M}$ не більше N різних коренів.

Теорема 6 [76]. *Нехай $\{x_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ та $\{y_j(t)\}_{j=0}^{\infty}$ — деякі послідовності неперервних на $[a, b]$, $-\infty \le a < b \le \infty$, функцій, а $\mu(t)$ — неспадна функція, що має нескінченну кількість точок зростання. Тоді для того щоб для будь-яких $M, N = \overline{0, \infty}$ існували поліноми вигляду*

$$X_M(t) = \sum_{k=0}^{M} c_k^{(M)} x_k(t)$$

та

$$Y_N(t) = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} y_j(t)$$

з відмінними від нуля старшими коефіцієнтами $c_N^{(N)} \neq 0$, $N = \overline{0, \infty}$, *для яких виконуються співвідношення біортогональності*

$$\int_a^b X_M(t) Y_N(t) d\mu(t) = \delta_{M,N}, \quad M, N = \overline{0, \infty},$$

достатньо, щоб для будь-яких $M, N = \overline{0, \infty}$ *системи функцій* $\{x_k(t)\}_{k=0}^M$ *та* $\{y_j(t)\}_{j=0}^N$ *були чебишовськими на* (a, b).

Перейдемо до встановлення деяких властивостей інваріантності біортогональних поліномів.

Теорема 7 [93]. *Нехай у деякому лінійному просторі* $\mathcal{X}$ *задано лінійний оператор* $A:\ \mathcal{X} \to \mathcal{X}$. *Припустимо також, що для деяких фіксованих* $x_0 \in \mathcal{X}$ *і* $y_0 \in \mathcal{Y}$ *побудовано послідовність нетривіальних узагальнених поліномів вигляду*

$$X_N = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} x_k = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} A^k x_0 = P_N(A) x_0, \quad N = \overline{0, \infty},$$

які задовольняють умови біортогональності

$$\langle X_N, y_j \rangle = \langle X_N, A^{*j} y_0 \rangle = 0, \quad j = \overline{0, N-1},$$

де $A^*: \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ — *оператор, спряжений до* A *відносно білінійної форми* $\langle .,. \rangle$. *Тоді для кожного* $N = \overline{0, \infty}$ *нетривіальний поліном* $\tilde{X}_N$ *вигляду*

$$\tilde{X}_N = \sum_{k=0}^{N} \tilde{c}_k^{(N)} A^k x_0,$$

який задовольняє умови біортогональності

$$\left\langle \tilde{X}_N, \tilde{y}_j \right\rangle = 0, \quad j = \overline{0, N-1},$$

де $\tilde{y}_j = A^{*j} \tilde{y}_0$, $j = \overline{0, \infty}$, *і*

$$\tilde{y}_0 = \prod_{m=1}^{M} (1 + \beta_m A^*) y_0, \tag{23}$$

може бути з точністю до постійного множника зображений у вигляді

$$\tilde{X}_N = \prod_{m=1}^{M} (1 + \beta_m A)^{-1} \sum_{k=N}^{M+N} \gamma_k X_k,$$

причому коефіцієнти γ_k, $k = \overline{N, M+N}$, *визначаються з однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь*

$$\sum_{k=N}^{M+N} \gamma_k P_k^{(n)} \left(-\frac{1}{\beta_m} \right) = 0, \quad n = \overline{0, \rho_m - 1}, \;\; m = \overline{1, M^*},$$

де M^* *— кількість різних між собою чисел* β_m, *а* ρ_m *— кратність числа* β_m, $m = \overline{1, M^*}$, *в зображенні* (23).

Теорема 8 [94]. *Нехай у деякому лінійному просторі* $\mathcal{X}$ *задано лінійний оператор* $A: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$. *Припустимо також, що для деяких фіксованих* $x_0 \in \in \mathcal{X}$ *і* $y_0 \in \mathcal{Y}$ *побудовано послідовність узагальнених поліномів вигляду*

$$Y_N = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} y_j = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} A^{*j} y_0, \quad N = \overline{0, \infty},$$

які задовольняють умови біортогональності

$$\langle x_k, Y_N \rangle = \langle A^k x_0, Y_N \rangle = 0, \quad k = \overline{0, N-1},$$

де $A^* : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ *— оператор, спряжений до* A *відносно білінійної форми* $\langle .,. \rangle$. *Тоді для кожного* $N \geq M+1$, $M > 0$, *нетривіальний поліном* $\tilde{Y}_N$ *вигляду*

$$\tilde{Y}_N = \sum_{j=0}^{N} \tilde{c}_j^{(N)} y_j,$$

що задовольняє умови біортогональності

$$\left\langle \tilde{x}_k, \tilde{Y}_N \right\rangle = 0, \quad k = \overline{0, N-1},$$

де $\tilde{x}_k = A^k \tilde{x}_0$, $k = \overline{0, \infty}$, $\tilde{x}_0$ *є розв'язком операторного рівняння*

$$\prod_{m=1}^{M^*} (1 - \beta_m A)^{\rho_m} \tilde{x}_0 = x_0,$$

у якому числа $\beta_m \;\; = \overline{1, M^*}$ *різні між собою і* $\sum_{m=1}^{M^*} \rho_m \; = M$, *може бути з точністю до постійного множника зображений у вигляді*

$$\tilde{Y}_N = \det \begin{Vmatrix} \varepsilon_{N-M}(\beta_1) & \varepsilon_{N-M+1}(\beta_1) & \cdots & \varepsilon_N(\beta_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varepsilon_{N-M}^{(r_1-1)}(\beta_1) & \varepsilon_{N-M+1}^{(r_1-1)}(\beta_1) & \cdots & \varepsilon_N^{(r_1-1)}(\beta_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varepsilon_{N-M}^{(r_{M^*}-1)}(\beta_{M^*}) & \varepsilon_{N-M+1}^{(r_{M^*}-1)}(\beta_{M^*}) & \cdots & \varepsilon_N^{(r_{M^*}-1)}(\beta_{M^*}) \\ Y_{N-M} & Y_{N-M+1} & \cdots & Y_N \end{Vmatrix},$$

де

$$\varepsilon_k(z) = \frac{f(z) Q_k(z) - P_{k-1}(z)}{z^k},$$

а

$$[k-1/k]_f(z) = \frac{P_{k-1}(z)}{Q_k(z)}$$

— апроксиманти Паде функції $f(z) = \langle R_z^{\#}(A) x_0, y_0 \rangle$ *порядків* $[k-1/k]$, $k \geq 1$.

Теорема 9 [95]. *Нехай у деякому лінійному просторі* $\mathcal{X}$ *задано лінійний неперервний оператор* $A: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$. *Припустимо також, що для деяких фіксованих* $x_0 \in \mathcal{X}$ *і* $y_0 \in \mathcal{Y}$ *побудовано послідовність нетривіальних узагальнених поліномів вигляду*

$$X_N = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} x_k = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} A^k x_0,$$

що задовольняють умови біортогональності

$$\langle X_N, y_j \rangle = \langle X_N, A^{*j} y_0 \rangle = 0, \quad j = \overline{0, N-1}.$$

Тоді для кожного $N = \overline{1, \infty}$ *нетривіальний поліном* $\tilde{X}_N$ *вигляду*

$$\tilde{X}_N = \sum_{k=0}^{N} \tilde{c}_k^{(N)} \tilde{x}_k = \sum_{k=0}^{N} \tilde{c}_k^{(N)} \tilde{A}^k x_0,$$

де

$$\tilde{A}x = Ax + \langle x, \lambda_{00} y_0 + \lambda_{01} y_1 \rangle x_0 + \langle x, \lambda_{10} y_0 + \lambda_{11} y_1 \rangle x_1,$$

який задовольняє умови біортогональності

$$\left\langle \tilde{X}_N, \tilde{y}_j \right\rangle = \left\langle \tilde{X}_N, \tilde{A}^{*j} y_0 \right\rangle = 0, \quad j = \overline{0, N-1},$$

якщо $1 + \lambda_{10} s_0 + \lambda_{11} s_1 \neq 0$, *може бути з точністю до постійного множника зображений у вигляді*

$$\tilde{X}_N = X_N = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} \tilde{x}_k - \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_m \sum_{k=m+1}^{N} c_k^{(N)} \times$$

$$\times \{(\lambda_{00} + \delta s_1) s_{k-m-1} + (\lambda_{01} + \lambda_{10} + \delta s_0) s_{k-m} + \lambda_{11} s_{k-m+1}\} +$$

$$+ x_0 \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} (\lambda_{10} s_k + \lambda_{11} s_{k+1}), \tag{24}$$

де $\delta = \lambda_{00}\lambda_{11} - \lambda_{01}\lambda_{10}$, $s_k = \langle A^k x_0, y_0 \rangle$, $k = \overline{0, \infty}$. *При цьому, якщо* $N \geq 2$, *остання сума в* (24) *дорівнює нулю.*

6. Властивості інваріантності апроксимацій Паде. Незважаючи на те, що апроксиманти Паде є суттєво нелінійним апаратом наближення функцій, рядом дослідників було встановлено, що при деяких перетвореннях наближуваної функції вони зберігають свій вигляд та властивості (див. [1, с. 42 – 45]). На основі підходу, що базується на застосуванні узагальнених моментних зображень, можна пов'язати властивості інваріантності апроксимант Паде з властивостями інваріантності біортогональних поліномів і певним чином узагальнити існуючі результати.

Теорема 10. *Нехай для функції*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k$$

існує та є невиродженою апроксиманта Паде порядку $[N-1/N]$, $N \geq 1$,

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)}.$$

Тоді для функції

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{1+\lambda z} f\left(\frac{z}{1+\lambda z}\right)$$

також існує та є невиродженою її апроксиманта Паде порядку $[N-1/N]$, *і при цьому*

$$[N-1/N]_{\tilde{f}}(z) = \frac{\tilde{P}_{N-1}(z)}{\tilde{Q}_N(z)},$$

де

$$\tilde{Q}_N(z) = (1+\lambda z)^N Q_N\left(\frac{z}{1+\lambda z}\right),$$

$$\tilde{P}_{N-1}(z) = (1+\lambda z)^{N-1} P_{N-1}\left(\frac{z}{1+\lambda z}\right).$$

Зауваження. Твердження теореми 10 еквівалентне твердженню теореми Бейкера, Гаммеля та Уіллса про інваріантність діагональних апроксимант Паде при дробово-лінійних перетвореннях аргументу, наведеної в [1, с. 42, 43].

Теорема 11 [95]. *Нехай для функції*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k$$

існує апроксиманта Паде порядку $[N-1/N]$, $N \geq 1$,

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)}.$$

Тоді для функції

$$\tilde{f}(z) = \left\{\left((1+\lambda_{11}s_1)z - \lambda_{11}s_0\right) f(z) + \lambda_{11}s_0^2\right\} \left\{\left(\left((\lambda_{01}\lambda_{10} - \lambda_{00}\lambda_{11})s_1 - \lambda_{00}\right) z^2 + \right.\right.$$

$$+\left((\lambda_{00}\lambda_{11} - \lambda_{01}\lambda_{10})s_0 - \lambda_{01} - \lambda_{10}\right) z - \lambda_{11}\right) f(z) +$$

$$\left.+\left((1 + (\lambda_{10}+\lambda_{01})s_0 + (\lambda_{01}\lambda_{10} - \lambda_{00}\lambda_{11})s_0^2 + \lambda_{11}s_1)z + \lambda_{11}s_0\right)\right\}^{-1},$$

де λ_{00}, λ_{01}, λ_{10}, λ_{11} *— такі константи, що* $1 + \lambda_{10}s_0 + \lambda_{11}s_1 \neq 0$, *також існує апроксиманта Паде порядку* $[N-1/N]$, *і при цьому її знаменник* $\tilde{Q}_N(z)$ *з точністю до сталого множника може бути зображений у вигляді*

$$\tilde{Q}_N(z) = Q_N(z)\left\{1 + (\lambda_{01}+\lambda_{10})s_0 + \lambda_{11}s_0\frac{1}{z} + \lambda_{11}s_1 - \delta s_0^2\right\} -$$

$$-P_{N-1}(z)\left\{\lambda_{00}z + \delta s_1 z + \lambda_{01} + \lambda_{10} + \frac{\lambda_{11}}{z} - \delta s_0\right\},$$

де $\delta = \lambda_{00}\lambda_{11} - \lambda_{01}\lambda_{10}$.

Зауваження. З теореми 11 можна вивести, як частинний випадок, теорему про інваріантність діагональних апроксимант Паде при дробово-лінійних перетвореннях функцій, наведену в [1, с. 44].

Теорема 12 [93]. *Нехай для деякої функції*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k$$

існують її апроксиманти Паде порядків $[N+m-1/N+m]$, $m = \overline{1, M}$, *і*

$$\Psi_M(t) = \prod_{m=1}^{M^*} (1 + \beta_m t)^{r_m} = \sum_{m=0}^{M} \alpha_m t^m$$

— деякий алгебраїчний многочлен степеня M. *Тоді знаменник* $\tilde{Q}_N(z)$ *апроксиманти Паде порядку* $[N-1/N]$ *функції*

$$\tilde{f}(z) = \sum_{m=0}^{M} \alpha_m \frac{f(z) - \sum_{j=0}^{m-1} s_j z^j}{z^m}$$

з точністю до сталого множника може бути зображений у вигляді

$$\tilde{Q}_N(z) = \frac{1}{z^M \Psi_M\left(\frac{1}{z}\right)} \det U_M(z),$$

де матриця $U_M(z) = \|u_{k,j}\|_{k,j=1}^{M}$ *складена з елементів*

$$u_{k,j} = \frac{d^p}{dw^p}\{w^j Q_{N+j}(w)\}\Big|_{w=-\beta_m},$$

$$k = \overline{1, M-1},\ j = \overline{1, M}, \quad m = \max\left\{l : \sum_{n=1}^{l-1} r_n \leq k\right\}, \quad p = k - \sum_{n=1}^{m} r_n,$$

$u_{M,j} = z^j Q_{N+j}(z)$, $j = \overline{1, M}$, *а* $Q_{N+j}(z)$, $j = \overline{1, M}$, *— знаменники апроксимант Паде функції* $f(z)$ *порядків* $[N+j-1/N+j]$.

Теорема 13 [94]. *Нехай для функції*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k$$

існують та невироджені апроксиманти Паде порядків $[N-1/N]$ *та* $[N-2/N-1]$, $N \geq 2$,

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

$$[N-2/N-1]_f(z) = \frac{P_{N-2}(z)}{Q_{N-1}}(z)$$

Зауваження. З теореми 11 можна вивести, як частинний випадок, теорему про інваріантність діагональних апроксимант Паде при дробово-лінійних перетвореннях функцій, наведену в [1, с. 44].

Теорема 12 [93]. *Нехай для деякої функції*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k$$

існують її апроксиманти Паде порядків $[N+m-1/N+m]$, $m=\overline{1,M}$, *і*

$$\Psi_M(t) = \prod_{m=1}^{M^*} (1+\beta_m t)^{r_m} = \sum_{m=0}^{M} \alpha_m t^m$$

— *деякий алгебраїчний многочлен степеня* M. *Тоді знаменник* $\tilde{Q}_N(z)$ *апроксиманти Паде порядку* $[N-1/N]$ *функції*

$$\tilde{f}(z) = \sum_{m=0}^{M} \alpha_m \frac{f(z) - \sum_{j=0}^{m-1} s_j z^j}{z^m}$$

з точністю до сталого множника може бути зображений у вигляді

$$\tilde{Q}_N(z) = \frac{1}{z^M \Psi_M\left(\frac{1}{z}\right)} \det U_M(z),$$

де матриця $U_M(z) = \|u_{k,j}\|_{k,j=1}^{M}$ *складена з елементів*

$$u_{k,j} = \frac{d^p}{dw^p}\{w^j Q_{N+j}(w)\}\Big|_{w=-\beta_m},$$

$$k=\overline{1,M-1},\ j=\overline{1,M},\quad m=\max\left\{l: \sum_{n=1}^{l-1} r_n \le k\right\},\quad p = k - \sum_{n=1}^{m} r_n,$$

$u_{M,j} = z^j Q_{N+j}(z)$, $j=\overline{1,M}$, *а* $Q_{N+j}(z)$, $j=\overline{1,M}$, — *знаменники апроксимант Паде функції* $f(z)$ *порядків* $[N+j-1/N+j]$.

Теорема 13 [94]. *Нехай для функції*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k$$

існують та невироджені апроксиманти Паде порядків $[N-1/N]$ *та* $[N-$ $-2/N-1]$, $N \ge 2$,

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

$$[N-2/N-1]_f(z) = \frac{P_{N-2}(z)}{Q_{N-1}}(z)$$

і в деякій точці $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\varepsilon_{N-1}(\beta) = \frac{f(\beta)Q_{N-1}(\beta) - P_{N-2}(\beta)}{\beta^{N-1}} \neq 0.$$

Тоді для функції

$$\tilde{f}(z) = \frac{zf(z) - \beta f(\beta)}{z - \beta}$$

існує та невироджена апроксиманта Паде порядку $[N-1/N]$. *При цьому*

$$[N-1/N]_{\tilde{f}}(z) = \frac{\tilde{P}_{N-1}(z)}{\tilde{Q}_N(z)},$$

де

$$\tilde{P}_{N-1}(z) = \frac{\varepsilon_{N-1}(\beta)}{\beta - z}\left\{\beta f(\beta)Q_N(z) - zP_{N-1}(z)\right\} -$$

$$-\frac{z\varepsilon_N(\beta)}{\beta - z}\left\{\beta f(\beta)Q_{N-1}(z) - zP_{N-2}(z)\right\},$$

$$\tilde{Q}_N(z) = \varepsilon_{N-1}(\beta)Q_N(z) - z\varepsilon_N(\beta)Q_{N-1}(z).$$

7. Побудова та властивості апроксимацій Паде спеціальних функцій. За допомогою узагальнених моментних зображень, побудованих у прикладі 1, можна отримати наступні результати.

Теорема 14. *Апроксиманти Паде функції*

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, *можуть бути записані у вигляді*

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \binom{N}{k}(k+N)!z^{N-k},$$

$$P_{N-1}(z) = 2(-1)^N \sum_{m=0}^{[(N-1)/2]} \binom{N}{2m+1}(2N-2m-1)!z^{2m}.$$

Апроксиманти Паде експоненти були побудовані ще Ш. Ермітом [38] і надалі вивчалися рядом дослідників. В. К. Дзядиком та Л. І. Філозофом [67] для побудови цих апроксимант було використано апроксимаційний метод наближеного розв'язування диференціальних рівнянь, який став однією з відправних точок створення методу узагальнених моментних зображень.

Теорема 15. *Апроксиманти Паде функції*

$$f(z) = \frac{{}_1F_1(1;\nu+1;z)-1}{z}, \quad \nu > -1,$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, *можуть бути записані у вигляді*

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} (\nu+1)_{N+k} z^{N-k},$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{k=0}^{N} z^k \sum_{m=0}^{k} \binom{N}{m} \frac{(\nu+1)_{2N-m}}{(\nu+1)_{k-m+1}}.$$

Апроксиманти Паде виродженої гіпергеометричної функції були побудовані Г. ван Россумом [96]. Побудову цих апроксимант з використанням узагальнених моментних зображень здійснено в [74, 97].

Теорема 16 [98]. *Нехай функція* $\varphi_0(t) \in C[0,1]$ *є такою, що для будь-якого алгебраїчного многочлена* $p(t)$, $\deg p(t) \leq N$, *узагальнений поліном*

$$A_N(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t p(t-\tau)\varphi_0(\tau)d\tau$$

має не більше, ніж N *коренів на* $(0,1)$. *Тоді апроксиманти Паде аналітичної функції*

$$f(z) = \int_0^1 \varphi_0(t) e^{z(1-t)} dt$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, *існують і збігаються до* $f(z)$ *рівномірно на кожному компакті комплексної площини.*

З теореми 16, зокрема, випливає збіжність діагональних апроксимант Паде експоненти e^z та виродженої гіпергеометричної функції ${}_1F_1(1;\nu+1;z)$, $\nu > -1$.

У прикладі 2 побудовано узагальнене моментне зображення для гіпергеометричної функції Гаусса.

Теорема 17. *Апроксиманти Паде функції*

$$f(z) = \frac{1}{\nu+1}{}_2F_1(\varkappa+\nu+1, 1; \nu+2; z), \quad \nu > -1,$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, *можуть бути записані у вигляді*

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z)=\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\binom{N}{k}\frac{(\nu+1)_{N+k}}{(\varkappa+\nu+1)_k}z^{N-k},$$

$$P_{N-1}(z)=(\varkappa+\nu)\sum_{k=1}^{N-1}z^k\sum_{m=0}^{k}(-1)^{N-m}\binom{N}{m}\frac{(\nu+1)_{2N-m}}{(\varkappa+\nu+k-m)_{N-k+1}}.$$

Апроксиманти Паде гіпергеометричної функції Гаусса побудовані А. Паде [5]. Асимптотична поведінка похибки апроксимації досліджена Ю. Люком [99, 100]. Відповідні результати з використанням узагальнених моментних зображень отримано в [74, 97].

У прикладі 4 було побудовано узагальнене моментне зображення для послідовності коефіцієнтів степеневого розвинення функції типу Міттаг-Леффлера

$$f(z)=E_\rho(z;\nu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k/\rho+\nu)}$$

при $\nu>0,\ \ 0<\rho<\infty$.

Теорема 18 [76, 98]. *Апроксиманти Паде функції*

$$f(z)=E_\rho(z;\nu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma\left(k/\rho+\nu\right)},$$

$\nu>0,\ \ 0<\rho\le 1$, *порядків* $[N-1/N],\ \ N\ge 1$, *збігаються до* f *рівномірно на кожному компакті комплексної площини.*

Зауваження. Збіжність рядків таблиці Паде для функції Міттаг-Леффлера доведено в [101].

У прикладі 5 ми побудували узагальнене моментне зображення для послідовності коефіцієнтів степеневого розвинення функції

$$f(z)=\frac{E_q(z)-1}{z},$$

де $E_q(z)$ — q-аналог експоненти. Щоб побудувати апроксиманти Паде функції f порядків $[N-1/N],\ \ N\ge 1$, необхідно біортогоналізувати функціональні послідовності $\left\{t^{(k+1)_q-1}\right\}_{k=0}^{\infty}$ та $\left\{t^{j_q q^{-j}}\right\}_{j=0}^{\infty}$. Справедливим є наступний результат, який можна трактувати як узагальнення формули Родріга для ортогональних многочленів Лежандра.

Теорема 19 [102]. *Нетривіальний узагальнений поліном*

$$X_N(t)=\sum_{k=0}^{N}d_k^{(N)}t^{(k+1)_q-1},$$

для якого виконуються умови біортогональності

$$\int_0^1 X_N(t)t^{j_q q^{-j}}\,dt=0,\quad j=\overline{0,N-1},$$

з точністю до мультиплікативної константи можна записати у вигляді

$$X_N(t) = \left(D^N U_{2N}\right)(t),$$

де оператор D *визначається формулою*

$$(D\varphi)(t) = \frac{1}{q} t^{\frac{1}{q-1}} \varphi'\left(t^{\frac{1}{q}}\right), \tag{25}$$

а узагальнений поліном U_{2N} *має зображення*

$$U_{2N}(t) = \sum_{m=0}^{N} (-1)^m \frac{q^{\frac{m(m+1)}{2} - Nm} N_q!}{m_q!(N-m)_q!} t^{(N+m+1)_q - 1}.$$

Використовуючи теорему 19, можна отримати явний вигляд апроксимант Паде q-аналога експоненти.

Теорема 20 [102]. *Апроксиманти Паде функції*

$$f(z) = \frac{E_q(z) - 1}{z}$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, *можуть бути записані у вигляді*

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{m=0}^{N} z^{N-m} (-1)^m \frac{q^{\frac{m(m+1)}{2} - Nm} N_q!(N+m)q!}{m_q!(N-m)_q!},$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{j=0}^{N-1} z^j \sum_{m=0}^{j} (-1)^{N-m} \frac{q^{\frac{m(m-1)}{2} - \frac{N(N-1)}{2}} N_q!(2N-m)_q!}{(N-m)_q! m_q! (j-m+1)_q!}.$$

Зауваження. Діагональні поліноми Паде функції $E_q(z)$ були раніше іншим способом побудовані в [78].

Теорему 19 можна узагальнити таким чином.

Теорема 21 [102]. *Нетривіальний узагальнений поліном*

$$X_N(t) = \sum_{k=0}^{N} d_k^{(N)} t^{(k+1)_q - 1 + \nu q^k},$$

для якого виконуються умови біортогональності

$$\int_0^1 X_N(t) t^{j_q q^{-j}} dt = 0, \quad j = \overline{0, N-1},$$

з точністю до мультиплікативної константи можна записати у вигляді

$$X_N(t) = \left(D^N U_{2N}\right)(t),$$

де оператор D визначається формулою (25), а узагальнений поліном U_{2N} має зображення

$$U_{2N}(t)=\sum_{m=0}^{N}(-1)^m\frac{q^{\frac{m(m+1)}{2}-Nm}N_q!}{m_q!(N-m)_q!}t^{(N+m+1)_q-1+\nu q^{N+m}}.$$

Використовуючи теорему 21, можна побудувати апроксиманти Паде для одного класу базисних гіпергеометричних рядів.

Теорема 22 [102]. *Апроксиманти Паде функції*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\prod_{m=1}^{k+1}(m_q+\nu q^{m-1})}$$

порядків $[N-1/N]$, $N\ge 1$, можуть бути записані у вигляді

$$[N-1/N]_f(z)=\frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z)=\sum_{m=0}^{N}z^{N-m}(-1)^m\frac{q^{\frac{m(m+1)}{2}-Nm}N_q!}{m_q!(N-m)_q!}\prod_{j=1}^{N+m}\left(j_q+\nu q^{j-1}\right),$$

$$P_{N-1}(z)=\sum_{j=0}^{N-1}z^j\sum_{m=0}^{j}(-1)^{N-m}\frac{q^{\frac{m(m-1)}{2}-\frac{N(N-1)}{2}}N_q!}{(N-m)_q!m_q!(j-m+1)_q!}\prod_{r=j-m+2}^{2N-m}(r_q+\nu q^{r-1}).$$

Справедлива така теорема.

Теорема 23. *Апроксиманти Паде функції*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\prod_{m=1}^{k+1}(m_q+\nu q^{m-1})},$$

де $|q|>1$, порядків $[N-1/N]$, $N\ge 1$, при $N\to\infty$ збігаються до функції f рівномірно на кожному компакті комплексної площини.

Використовуючи теорему 21, можна побудувати апроксиманти Паде ще для одного класу базисних гіпергеометричних рядів.

Теорема 24 [102]. *Апроксиманти Паде функції*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{m=1}^{k}(m_q+\nu q^{m-1}+\varkappa)}{\prod_{m=1}^{k+1}(m_q+\nu q^{m-1})}z^k$$

порядків $[N-1/N]$, $N\ge 1$, можуть бути записані у вигляді

$$[N-1/N]_f(z)=\frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z)=\sum_{m=0}^{N}z^{N-m}(-1)^m\begin{bmatrix}N\\m\end{bmatrix}q^{\frac{m(m+1)}{2}-Nm}\frac{\prod_{p=1}^{N+m}(p_q+\nu q^{p-1})}{\prod_{r=1}^{m}(r_q+\nu q^{r-1}+\varkappa)},$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{j=0}^{N-1} z^j \sum_{k=0}^{j} (-1)^{N-k} \begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix} q^{\frac{k(k-1)}{2} - \frac{N(N-1)}{2}} \times$$

$$\times \frac{\prod_{p=j-k+2}^{2N-k} (p_q + \nu q^{p-1})}{\prod_{r=j-k+1}^{N-k} (r_q + \nu q^{r-1} + \varkappa)},$$

а через $\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix}$ *позначено так звані многочлени Гаусса* (*див.* [79, *с.* 49]),

$$\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} := \begin{cases} \dfrac{k_q!}{m_q!(k-m)_q!}, & \textit{якщо} \quad 0 \le m \le k, \\ 0 & \textit{— у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Апроксиманти Паде функцій, для послідовностей коефіцієнтів степеневих розвинень яких узагальнені моментні зображення наведено в прикладах 7 та 8, можуть бути зображені в термінах многочленів, ортогональних відносно білінійної форми

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(\tau) y(\tau) d_q \tau.$$

Такі многочлени були вивчені В. Ханом (див. [83, 103]). Зокрема, q-поліноми Лежандра $L_N(x;q)$, для яких виконуються умови ортогональності

$$\int_0^1 L_N(x;q) L_M(x;q) d_q x = 0$$

при $N \neq M$, можуть бути зображені з точністю до сталого множника у вигляді

$$L_N(x;q) = {}_2\Phi_1 \left[\begin{matrix} q^{-N}, & q^{N+1}; & qx \\ & q & \end{matrix} \right] = \sum_{k=0}^{N} \frac{(q^{-N};q)_k \, (q^{N+1};q)_k}{(q;q)_k (q;q)_k} (qx)^k,$$

а q-поліноми Якобі $R_N^{(\nu,0)}(x;q)$, для яких виконуються умови ортогональності

$$\int_0^1 R_N^{(\nu,0)}(x;q) R_M^{(\nu,0)}(x;q) x^\nu d_q x = 0$$

при $M \neq N$, можуть бути зображені з точністю до сталого множника у вигляді

$$R_N^{(\nu,0)}(x;q) = {}_2\Phi_1 \left[\begin{matrix} q^{-N}, & q^{N+\nu+1}; & qx \\ & q^{\nu+1} & \end{matrix} \right] = \sum_{k=0}^{N} \frac{(q^{-N};q)_k \, (q^{N+\nu+1};q)_k}{(q;q)_k \, (q^{\nu+1};q)_k} (qx)^k.$$

Теорема 25 [84]. *Апроксиманти Паде функції*

$$f(z) = \frac{{}_1\Phi_1 \left[\begin{matrix} q; & (1-q)z \\ q^{\nu+1} & \end{matrix} \right] - 1}{z}$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, *можуть бути зображені у вигляді*

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} z^{N-k} \frac{(q^{-N};q)_k \, (q^{N+\nu+1};q)_k}{(q;q)_k (1-q)^k} q^k,$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{m=0}^{N-1} z^m \sum_{j=0}^{m} \frac{(q^{-N};q)_{N-j} \, (q^{N+\nu+1};q)_{N-j} \, q^{N-j}}{(q;q)_{N-j} \, (q^{\nu+1};q)_{m-j+1} \, (1-q)^{N-m-1}}.$$

Теорема 26 [84]. *Апроксиманти Паде функції*

$$f(z) = \frac{1-q}{1-q^{\nu+1}} {}_2\Phi_1 \left[\begin{matrix} q; & \dfrac{q^{\nu+1}}{1+\varkappa-\varkappa q}; & (1+\varkappa-\varkappa q)z \\ & q^{\nu+2} & \end{matrix} \right]$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, *можуть бути зображені у вигляді*

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} z^{N-k} \frac{(q^{-N};q)_k \, (q^{N+\nu+1};q)_k \, q^k}{(1+\varkappa-\varkappa q)^k (q;q)_k \left(\dfrac{q^{\nu+1}}{1+\varkappa-\varkappa q};q\right)_k},$$

$$P_{N-1}(z) = (1-q) \sum_{m=0}^{N-1} \frac{z^m}{(1+\varkappa-\varkappa q)^{N-m}} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{m} \frac{(q^{-N};q)_{N-j} \, (q^{N+\nu+1};q)_{N-j} \, q^{N-j}}{(q;q)_{N-j} \, (q^{\nu+1};q)_{m-j+1} \left(\dfrac{q^{N-j+\nu+1}}{1+\varkappa-\varkappa q};q\right)_{N-m}}.$$

Зауваження. Незалежно іншим способом результати, еквівалентні твердженням теорем 25 та 26, було отримано в [55, 56].

Сформулюємо результати, що стосуються побудови апроксимант Паде функцій, розглянутих у прикладах 8–10.

Теорема 27 [85]. *Апроксиманти Паде функції*

$$f(z) = \frac{2(2+z)}{z\sqrt{4-z^2}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{4-z^2}}$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, *можуть бути записані у вигляді*

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = N!z^N + \sum_{m=1}^{N} (-1)^{[m/2]} \frac{1}{[(m-1)/2]!} \times$$

$$\times \sum_{k=m}^{N} \binom{N}{k} (-1)^k \frac{(N+k)!}{k!} \frac{(k-[m/2]-1)!}{(k-m)!} z^{N-m},$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{m=1}^{N} (-1)^{[m/2]} \frac{1}{[(m-1)/2]!} \sum_{k=m}^{N} \binom{N}{k} (-1)^k \frac{(N+k)!}{k!} \frac{(k-[m/2]-1)!}{(k-m)!}$$

$$\times \sum_{j=0}^{m-1} \frac{[(j+1)/2]![j/2]!}{(j+1)!} z^j.$$

Теорема 28 [85]. *Апроксиманти Паде функції*

$$f(z) = \frac{\operatorname{tg}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, *можуть бути записані у вигляді*

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k z^{N-k} \sum_{m=k}^{N} \binom{N}{m} (-1)^m \frac{(2N+2m-1)!!}{2^m} \frac{(2m)!}{(2m-2k)!},$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{k=1}^{N} (-1)^k z^{N-k} \sum_{m=k}^{N} \binom{N}{m} (-1)^m \frac{(2N+2m-1)!!}{2^m} \frac{(2m)!}{(2m-2k)!} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{k-1} \frac{2^{2j+2}\left(2^{2j+2}-1\right) B_{j+1}}{(2j+2)!} z^j,$$

а B_j — *числа Бернуллі, що визначаються формулами* (*див.* [104, *с.* 765])

$$B_j = \frac{(2j)!}{\pi^{2j}2^{2j-1}}\left\{1+\frac{1}{2^{2j}}+\frac{1}{3^{2j}}+\frac{1}{4^{2j}}+\ldots\right\}. \tag{26}$$

Зауваження. Апроксиманти Паде функції $\dfrac{\operatorname{tg} z}{z}$ раніше іншим способом було побудовано в [100, с. 67].

Теорема 29 [85]. *Апроксиманти Паде функції*

$$f(z) = \frac{\sin z + 1 - \cos z}{z\cos z}$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, *можуть бути записані у вигляді*

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N}(-1)^{[k/2]}z^{N-k}\sum_{m=k}^{N}\binom{N}{m}(-1)^m\frac{(N+m)!}{(m-k)!}\{\varepsilon_m+\delta_{k,m}(1-\varepsilon_m)\},$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{k=0}^{N}(-1)^{[k/2]}z^{N-k}\sum_{m=k}^{N}\binom{N}{m}(-1)^m\frac{(N+m)!}{(m-k)!}\{\varepsilon_m+\delta_{k,m}(1-\varepsilon_m)\}\times$$

$$\times\left\{\sum_{j=0}^{[(k-1)/2]}\frac{2^{2j+2}\left(2^{2j+2}-1\right)B_{j+1}}{(2j+2)!}z^{2j}+\sum_{j=0}^{[k]-1}\frac{E_{j+1}}{(2j+2)!}z^{2j+1}\right\},$$

$$\varepsilon_m = \begin{cases}1, & \text{якщо}\quad m - \text{парне};\\ 0, & \text{якщо}\quad m - \text{непарне},\end{cases}$$

$$\delta_{k,m} = \begin{cases}1, & \text{якщо}\quad k = m;\\ 0, & \text{якщо}\quad k \neq m,\end{cases}$$

числа Бернуллі B_j *визначаються формулами* (26), *числа Ейлера* E_j — *формулами* (18).

Зауваження. Аналогічно можна побудувати апроксиманти Паде порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, для функції $f(z) = \dfrac{\sec\sqrt{z}-1}{z}$. Цей результат еквівалентний побудові діагональних апроксимант Паде для функції $\cos z$, що здійснена в [68].

Застосування узагальнених моментних зображень, побудованих у прикладі 11, дає наступні результати.

Теорема 30 [86]. *Апроксиманти Паде функції*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t_0 z^k}{(1-\delta\gamma^k)\,t_0+\delta\gamma^k},$$

де $\gamma, \delta \in (0,\infty)\setminus\{1\}$, $t_0 \in (0,1)$, *порядків* $[N-1/N]$, $N \geq 1$, *існують, невироджені і можуть бути записані у вигляді*

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} z^{N-k},$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{m=0}^{N-1} z^m \sum_{k=0}^{m} c_{N-k}^{(N)} \frac{t_0}{(1-\delta\gamma^{m-k})\,t_0 + \gamma^{m-k}},$$

$c_k^{(N)}$, $k=\overline{0,N}$, — *коефіцієнти біортогонального полінома*

$$L_N = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} l_j,$$

що визначається співвідношеннями

$$L_N(x_k) = 0, \quad k = \overline{0, N-1},$$

де

$$x_k(t) = \frac{t_0}{(1-\delta\gamma^k)\,t_0 + \delta\gamma^k}, \quad k = \overline{0,\infty},$$

$$l_j(x) = x\left(\frac{t_0}{(1-\delta\gamma^j)\,t_0 + \delta\gamma^j}\right), \quad j = \overline{0,\infty}.$$

Теорема 31. *Апроксиманти Паде функції*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{1-\delta\gamma^k} + \frac{(\ln\delta + k\ln\gamma)\delta\gamma^k}{(1-\delta\gamma^k)^2} \right\} z^k,$$

де $\gamma, \delta \in (0,\infty) \setminus \{1\}$, *порядків* $[N-1/N]$, $N \geq 1$, *існують, невироджен можуть бути записані у вигляді*

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} z^{N-k},$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{m=0}^{N-1} z^m \sum_{k=0}^{m} c_{N-k}^{(N)} \left\{ \frac{1}{1-\delta\gamma^{j-m}} + \frac{(\ln\delta + j - m\ln\gamma)\delta\gamma^{j-m}}{(1-\delta\gamma^{j-m})^2} \right\},$$

$c_k^{(N)}$, $k=\overline{0,N}$, — *коефіцієнти полінома*

$$X_N(t) = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} \frac{t}{(1-\delta\gamma^k)\,t + \delta\gamma^k},$$

для якого виконуються співвідношення біортогональності

$$\int_0^1 X_N(t) \frac{\gamma^j}{(1-(1-\gamma^j)\,t)^2} dt = 0, \quad j = \overline{0, N-1}.$$

Використовуючи узагальнені моментні зображення з оператором зсуву, побудовані в прикладі 12, можна отримати наступний результат.

Теорема 32. *Апроксиманти Паде функції*

$$f(z) = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha+\beta}} \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\alpha\beta(\gamma+k\lambda)^2}{\alpha+\beta}\right\} z^k,$$

де $\alpha, \beta, \lambda > 0$, $-\infty < \gamma < \infty$, *порядків* $[N-1/N]$, $N \geq 1$, *існують, невироджені і можуть бути зображені у вигляді*

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} z^{N-k} d_k^{(N)} \exp\{\alpha(k\lambda+\gamma)^2\},$$

$$P_{N-1}(z) = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha+\beta}} \sum_{m=0}^{N-1} z^m \sum_{k=0}^{m} d_{N-k}^{(N)} \times$$

$$\times \exp\left\{\alpha\left(\lambda^2 N^2 - \frac{\beta}{\alpha+\beta} m^2\lambda^2 + 2\lambda(\gamma-k\lambda)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(N - \frac{\beta}{\alpha+\beta}m\right) + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(\gamma-\lambda k)^2\right)\right\},$$

$d_k^{(N)}$, $k = \overline{0, N}$, — *коефіцієнти полінома*

$$X_N(t) = \sum_{k=0}^{N} d_k^{(N)} \exp\{-\alpha k t\},$$

для якого виконуються умови біортогональності

$$\int_{-\infty}^{\infty} X_N(t) \exp\left\{\beta j t - \frac{1}{4\lambda}(\alpha t^2 + 2\alpha\gamma t + \beta t^2)\right\} dt = 0, \quad j = \overline{0, N-1}.$$

8. Побудова та дослідження сумісних апроксимант Паде. Метод узагальнених моментних зображень, як показано в [70], можна застосувати і до вивчення сумісних апроксимант Паде. Спочатку наведемо додаткове означення.

Означення 13 [43]. *Нехай* $F = \{f_\lambda(z)\}_{\lambda=1}^{\Lambda}$ *— набір аналітичних в околі точки* $z = 0$ *функцій. Будемо говорити, що для набору* F *індекс* $R = [M/N]$, $M = (m_1, m_2, \ldots, m_\Lambda)$, $N = (n_1, n_2, \ldots, n_\Lambda)$, *є нормальним, якщо сумісні апроксиманти Паде набору* F *індексу* R *існують і їх знаменник* $Q_N(z)$ *має степінь, що дорівнює* $|N| = n_1 + n_2 + \cdots + n_\Lambda$.

Теорема 33 [105]. *Нехай* F *— набір аналітичних в околі точки* $z = 0$ *функцій* $f_\lambda(z)$, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$, *кожна з яких у вказаному околі може бути зображена степеневим рядом*

$$f_\lambda(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k^{(\lambda)} z^k,$$

причому для послідовностей $\left\{s_k^{(\lambda)}\right\}_{k=0}^{\infty}$, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$, *можна побудувати узагальнені моментні зображення на добутку лінійних просторів* $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ *вигляду*

$$s_{k+j}^{(\lambda)} = \left\langle x_k^{(\lambda)}, y_j \right\rangle, \quad k, j = \overline{0, \infty}. \tag{27}$$

Тоді якщо для деякого набору $R = [M/N]$, $M = (m_1, m_2, \ldots, m_\Lambda)$, $N = (n_1, n_2, \ldots, n_\Lambda)$, *такого, що* $m_\lambda \geq |N| - 1$, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$, *існує нетривіальний узагальнений поліном*

$$Y_N = \sum_{j=0}^{|N|} c_j^{(R)} y_j, \qquad c_0^{(R)} \neq 0, \quad c_{|N|}^{(R)} \neq 0,$$

для якого виконуються співвідношення біортогональності

$$\left\langle x_{k+m_\lambda-|N|+1}^{(\lambda)}, Y_N \right\rangle = 0, \qquad k = \overline{0, n_\lambda - 1}, \quad \lambda = \overline{1, \Lambda},$$

то індекс R *є нормальним, і сумісні апроксиманти Паде набору* F *індексу* R *можуть бути зображені у вигляді*

$$[M/N]_F^{(\lambda)}(z) = \frac{P_{m_\lambda}(z)}{Q_N(z)}, \quad \lambda = \overline{1, \Lambda},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{|N|} c_k^{(R)} z^{|N|-k},$$

$$P_{m_\lambda}(z) = \sum_{j=0}^{|N|} c_j^{(R)} z^{|N|-j} \sum_{p=0}^{m_\lambda+j-|N|} s_p^{(\lambda)} z^p, \quad \lambda = \overline{1, \Lambda}.$$

Зауваження. У випадку, коли узагальнені моментні зображення (27) можуть бути записані у вигляді

$$s_k^{(\lambda)} = \left\langle A^k x_0^{(\lambda)}, y_0 \right\rangle, \quad k = \overline{0, \infty},$$

відповідні похибки апроксимації можуть бути зображені у вигляді

$$f_\lambda(z) - [M/N]_F^{(\lambda)}(z) = \frac{z^{n_\lambda+m_\lambda+1}}{Q_N(z)} \left\langle R_z^{\#}(A) x_{m_\lambda-|N|+1}, Y_N \right\rangle.$$

Теорема 33 дозволяє побудувати і дослідити сумісні апроксиманти Паде набору вироджених гіпергеометричних функцій.

Теорема 34 [105]. *Для сумісних апроксимант Паде набору функцій*

$$F = \{f_\lambda(z)\}_{\lambda=1}^{\Lambda} = \left\{ \frac{{}_1F_1(1; \nu_\lambda+1; z) - 1}{z} \right\}_{\lambda=1}^{\Lambda},$$

де $\nu_\lambda - \nu_\mu \notin \mathbb{Z}$ *при* $\lambda \neq \mu$, $\nu_\lambda > -1$, $\lambda = \overline{1,\Lambda}$, *будь-який індекс* $R = [M/N]$, $M = (m_1, m_2, \ldots, m_\Lambda)$, $N = (n_1, n_2, \ldots, n_\Lambda)$, *такий, що* $m_\lambda \geq |N| - 1$, $\lambda = \overline{1,\Lambda}$, *є нормальним. Сумісні апроксиманти Паде набору* F *вказаних індексів рівномірно збігаються до функцій* $f_\lambda(z)$, $\lambda = \overline{1,\Lambda}$, *на кожному компакті комплексної площини при* $|N| \to \infty$.

Наведемо ще один результат, який стосується поведінки знаменників сумісних апроксимант Паде вироджених гіпергеометричних функцій.

Теорема 35 [106]. *Знаменники сумісних апроксимант Паде набору вироджених гіпергеометричних функцій*

$$F = \{f_\lambda(z)\}_{\lambda=1}^{\Lambda} = \left\{ \frac{{}_1F_1(1; \nu_\lambda+1; z) - 1}{z} \right\}_{\lambda=1}^{\Lambda},$$

де $\nu_\lambda = \nu_1 + \dfrac{\lambda-1}{\Lambda}$, $\lambda = \overline{1,\Lambda}$, $\nu_1 > -1$, *індексів* $\tilde{R} = [\tilde{N}/N]$, *де* $\tilde{N} = (|N| - 1, |N|-1, \ldots, |N|-1)$, $N = (n_1, n_2, \ldots, n_\Lambda)$,

$$n_\lambda = \begin{cases} \left[\dfrac{|N|}{\Lambda}\right] + 1 & \text{при} \quad \lambda = \overline{1,m}; \\[2ex] \left[\dfrac{|N|}{\Lambda}\right] & \text{при} \quad \lambda = \overline{m+1,\Lambda}, \end{cases}$$

а m *— остача від ділення* $|N|$ *на* Λ, *рівномірно збігаються при* $|N| \to \infty$ *на кожному компакті* $K \subset \mathbb{C}$

$$\frac{1}{|N|!} Q_N(z) \to \exp\left\{ \left(\left(\frac{\Lambda}{\Lambda+1} \right)^{\Lambda} - 1 \right) z \right\}.$$

Зауваження. Теореми 34, 35 були отримані незалежно іншим шляхом М. де Брюіном [52, 53].

Розглянемо сумісні апроксиманти Паде набору функцій типу Міттаг-Лефлера.

Теорема 36 [107]. *Для сумісних апроксимант Паде набору функцій типу Міттаг-Леффлера*

$$F = \{E_\rho(z, \nu_\lambda)\}_{\lambda=1}^{\Lambda},$$

де $\rho(\nu_\lambda - \nu_\mu) \notin \mathbb{Z}$ *при* $\lambda \neq \mu$, $\nu_\lambda > 0$, $\lambda = \overline{1,\Lambda}$, $\rho > 0$, *будь-який індекс* $R = [M/N]$, $M = (m_1, m_2, \ldots, m_\Lambda)$, $N = (n_1, n_2, \ldots, n_\Lambda)$, *такий, що* $m_\lambda + 1 \geq$

$\geq |N| = n_1 + n_2 + \dots + n_\Lambda$, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$, є нормальним. При $0 < \rho \leq 1$ сумісні апроксиманти Паде набору F вказаних індексів рівномірно збігаються до функцій набору F на кожному компакті комплексної площини при $|N| \to \infty$.

Аналогічно розглядаються сумісні апроксиманти Паде базисних гіпергеометричних рядів.

Теорема 37. *Для сумісних апроксимант Паде набору функцій*

$$F = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\prod_{m=1}^{k+1} (m_q + \nu_\lambda q^{m-1})} \right\}_{\lambda=1}^{\Lambda},$$

де при $\lambda \neq \mu$ $\nu_\mu \neq q + q^2 + \dots + q^k + \nu_\lambda q^k$, $k = \overline{0, \infty}$, $\nu_\lambda > -1$, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$, $q \neq 1$, будь-який індекс $R = [M/N]$, $M = (m_1, m_2, \dots, m_\Lambda)$, $N = (n_1, n_2, \dots, n_\Lambda)$, такий, що $m_\lambda + 1 \geq |N| = n_1 + n_2 + \dots + n_\Lambda$, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$, є нормальним. При $|q| > 1$ сумісні апроксиманти Паде набору F вказаних індексів рівномірно збігаються до функцій набору F на кожному компакті комплексної площини при $|N| \to \infty$.

Зауваження. Побудові та дослідженню сумісних апроксимант Паде наборів базисних гіпергеометричних рядів присвячено роботи [55–57].

9. Побудова та дослідження апроксимант Паде–Чебишова. Апроксимації Паде–Чебишова є частинним випадком узагальнених апроксимацій Паде. Введемо означення, дещо відмінне від того, що випливає з означення 4.

Означення 14. *Нехай функція $f \in C[-1, 1]$ розвивається в рівномірно збіжний ряд Фур'є–Чебишова вигляду*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k T_k(z),$$

де $T_k(z) = \cos \arccos z$ — многочлени Чебишова першого роду. Апроксимантою Паде–Чебишова функції f порядку $[M/N]$ називається раціональний поліном

$$[M/N]_f^T(z) = \frac{P_M(z)}{Q_N(z)} \in \mathcal{R}[M/N]$$

такий, що має місце розвинення

$$f(z) Q_N(z) - P_M(z) = \sum_{k=M+N+1}^{\infty} \tau_k T_k(z).$$

Теорема 38 [108, 109]. *Нехай функція f розвивається в рівномірно і абсолютно збіжний ряд Фур'є–Чебишова*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k T_{mk+n}(z),$$

де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, і при цьому для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ має місце узагальнене моментне зображення

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle, \quad k, j = \overline{0, \infty},$$

на добутку лінійних просторів $\mathcal{X}$ *та* $\mathcal{Y}$. *Нехай, крім того, для деяких* $M \geq N$, $M, N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *є відмінним від нуля визначник*

$$\Delta[M/N] = \det \|s_{M+1+k+j} + s_{M+1+k-j}\|_{k,j=0}^{N} \neq 0.$$

Тоді апроксиманта Паде – Чебишова функції f *порядку* $[mM+n/mN]$ *існує і має зображення*

$$[mM+n/mN]_f^T(z) = \frac{P_{mM+n}(z)}{Q_{mN}(z)},$$

де

$$Q_{mN}(z) = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} T_{mk}(z),$$

$$P_{mM+n}(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N} T_{mk+n}(z) \sum_{j=0}^{k} c_j^{(N)} s_{k-j} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N} T_{mk+n}(z) \sum_{j=k}^{k} c_j^{(N)} s_{j-k} -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{-[-n/m]-1} T_{mk+n}(z) \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} s_{j-k} + \frac{1}{2}\sum_{k=[-n/m]+1}^{N} T_{mk+n}(z) \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} s_{k+j} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=N+1}^{M} T_{mk+n}(z) \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} (s_{k-j} + s_{k+j}),$$

а коефіцієнти $c_k^{(N)}$, $k = \overline{0, N}$, *визначаються з умов біортогональності вигляду*

$$\langle X_N, y_j \rangle = 0, \quad j = \overline{0, N-1},$$

для узагальненого полінома

$$X_N = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} (x_{M+1+k} + x_{M+1-k}).$$

Теорема 39 [108, 109]. *Апроксиманти Паде – Чебишова функцій*

$$f(z) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{T_n(z) - tT_{|n-m|}(z)}{1 - 2tT_m(z) + t^2} d\mu(t),$$

де $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \in \mathbb{N}$, $\mu(t)$ *— неспадна функція, що має нескінченну кількість точок зростання на сегменті* $[\alpha, \beta] \subset [-1, 1]$, *порядків* $[mM+n/mN]$, $M \geq N \geq 0$, *мають зображення*

$$[mM+n/mN]_f^T(z) = \frac{P_{mM+n}(z)}{Q_{mN}(z)},$$

де

$$Q_{mN}(z) = \frac{1}{2} U_N(2T_m(z)),$$

$$P_{mM+n}(z) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{T_n(z) - tT_{|n-m|}(z)}{1 - 2tT_m(z) + t^2}\left(U_N(2T_m(z)) - U_N(t + 1/t)\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{M} t^k T_{km+n}(z) U_N(t + 1/t)\right) d\mu(t),$$

а коефіцієнти алгебраїчного многочлена $U_N(t)$ визначаються з умов біортогональності вигляду

$$\int_{\alpha}^{\beta} t^k X_N(t) d\mu(t) = 0, \quad k = \overline{0, N-1},$$

для полінома $X_N(t) = t^{M+1} U_N(t + 1/t)$.

10. Побудова та дослідження двоточкових апроксимант Паде. Справедливим є наступний результат, що дозволяє застосувати узагальнені моментні зображення до двоточкових апроксимацій Паде.

Теорема 40 [74]. *Нехай функція f є аналітичною в деякій зв'язній області $\mathcal{D}$, що містить точки $z = 0$ та $z = z_0$, і розвивається в цій області в степеневий ряд*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k,$$

і нехай для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ має місце узагальнене моментне зображення на добутку лінійних просторів $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$

$$s_k = \langle A^k x_0, y_0 \rangle, \quad k = \overline{0, \infty},$$

з лінійним оператором $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, резольвентна функція якого $R_z^{\#}(A) = (I - zA)^{-1}$ є аналітичною в області $\mathcal{D}$. Припустимо також, що для деяких $N, M \geq 0$ є відмінним від нуля визначник

$$\tilde{H}_{N,M} = \det \|\tilde{s}_{k+j+M}\|_{k,j=0}^{N} \neq 0,$$

де $\tilde{s}_k = \langle \tilde{x}_k, y_0 \rangle$, а

$$\tilde{x}_k = \left(R_{z_0}^{\#}(A)\right)^{k+1} x_k = \left(R_{z_0}^{\#}(A)\right)^{k+1} A^k x_0.$$

Тоді якщо побудувати нетривіальний узагальнений поліном

$$Y_N = \sum_{j=0}^{N} \bar{c}_j^{(N)} y_j = \sum_{j=0}^{N} \bar{c}_j^{(N)} A^{*j} y_0,$$

для якого виконуються умови біортогональності вигляду

$$\langle \tilde{x}_k, Y_N \rangle = 0, \quad k = \overline{0, N-1},$$

то раціональний поліном

$$[(N+M,N)/N]_f(0,z_0;z) = \frac{P_{N+M}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{j=0}^{N} \tilde{c}_j^{(N)} z^{N-j},$$

$$P_{N+M}(z) = \sum_{j=0}^{N} \tilde{c}_j^{(N)} z^{N-j} \sum_{m=0}^{j+M} s_m z^m,$$

є двоточковою апроксимантою Паде індексу $[(N+M,N)/N]$ *в точках* 0 *та* z_0 *функції* f, *тобто виконуються співвідношення*

$$f(z) - [(N+M,N)/N]_f(0,z_0;z) = \begin{cases} O(z^{M+N}) & \text{при } z \to 0; \\ O\left((z-z_0)^N\right) & \text{при } z \to z_0. \end{cases}$$

При цьому похибка апроксимації може бути подана у вигляді

$$f(z) - [(N+M,N)/N]_f(0,z_0;z) = \frac{z^{N+M}(z-z_0)^N}{Q_N(z)} \left\langle R_z^{\#}(A)\left(R_{z_0}^{\#}(A)\right)^N x_N, Y_N \right\rangle.$$

Теорема 41 [74]. *Двоточкові апроксиманти Паде функції*

$$f(z) = {}_1F_1(1;\nu+1;z), \quad \nu > -1,$$

індексу $[(N+M,N)/N]$, $N,M \geq 0$, *в точках* $z=0$ *та* $z=z_0 \in \mathbb{R}$ *можуть бути записані у вигляді*

$$[(N+M,N)/N]_f(0,z_0;z) = \frac{P_{N+M}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{j=0}^{N} \frac{(\nu+1)_j}{j!} d_j^{(N)} z^{N-j},$$

$$P_{N+M}(z) = \sum_{j=0}^{N} \frac{(\nu+1)_j}{j!} d_j^{(N)} z^{N-j} \sum_{m=0}^{j+M} s_m z^m,$$

а $d_j^{(N)}$ *— коефіцієнти алгебраїчного многочлена* $D_N(t) = \sum_{j=0}^{N} d_j^{(N)} t^j$, *ортонормованого на* $[0,1]$ *з вагою* $e^{z_0(1-t)} t^{M+\nu} dt$. *Для похибки апроксимації справедлива асимптотична формула*

$$f(z) - [(N+M,N)/N]_f(0,z_0;z) =$$

$$= \Gamma(\nu+1) z \int_0^1 \left(f(zu) - \sum_{m=0}^{M-1} s_m z^m u^m \right) D_N(t) e^{z_0(1-t)} t^{\nu} dt \times$$

$$\times \int_0^1 e^{z(1-t)} D_N(t) t^{M+\nu} dt \, (1+o(1))$$

при $N \to \infty$. *Двоточкові апроксиманти Паде* $[(N+M,N)/N]_f(0,z_0;z)$ *збігаються до* f *рівномірно на кожному компакті комплексної площини.*

11. Побудова апроксимант Паде – Ерміта.

Теорема 42 [70]. *Нехай аналітичні функції* $f_\lambda(z)$, $\lambda = \overline{1,\Lambda}$, *з набору* F *розвиваються в околі точки* $z=0$ *в степеневі ряди*

$$f_\lambda(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k^{(\lambda)} z^k,$$

і при цьому для послідовностей $\left\{s_k^{(\lambda)}\right\}_{k=0}^{\infty}$, $\lambda = \overline{1,\Lambda}$, *мають місце узагальнені моментні зображення на добутку лінійних просторів* $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ *вигляду*

$$s_{k+j}^{(\lambda)} = \left\langle x_k, y_j^{(\lambda)} \right\rangle, \quad k,j = \overline{0,\infty}.$$

Тоді поліноми Паде – Ерміта набору F *індексу* $[M]$, $M = (m,m,\ldots,m)$, $|M| = \Lambda m$, *можуть бути зображені у вигляді*

$$[M]_F^{(\lambda)}(z) = \sum_{j=0}^{m} c_{j,\lambda}^{(m)} z^{m-j},$$

де коефіцієнти $c_{j,\lambda}^{(m)}$, $j = \overline{0,m}$, $\lambda = \overline{1,\Lambda}$, *задовольняють лінійні однорідні рівняння*

$$\sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \sum_{j=1}^{m} c_{j,\lambda}^{(m)} z^{m-j} \sum_{k=0}^{j-1} s_k^{(\lambda)} z^k \equiv 0,$$

$$\left\langle x_k, \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \sum_{j=0}^{m} c_{j,\lambda}^{(m)} y_j^{(\lambda)} \right\rangle = 0$$

для $k = \overline{0,(m+1)(\Lambda-1)-1}$. *При цьому справджується рівність*

$$\sum_{\lambda=1}^{\Lambda} f_\lambda(z) [M]_F^{(\lambda)}(z) = z^m \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} z^k x_k, Y_M \right\rangle,$$

де

$$Y_M = \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \sum_{j=0}^{m} c_{j,\lambda}^{(m)} y_j^{(\lambda)}.$$

1. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Р.* Аппроксимации Паде. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
2. *Jacobi C. G. J.* Über die Darstellung einer Reihe gegebner Werthe durch eine gebroche rationale Function // J. reine und angew. Math. – 1846. – **30**. – S. 127 – 156.
3. *Frobenius G.* Ueber Relationen zwischen den Näherungsbrüchen von Potenzreihen // J. reine und angew. Math. – 1881. – **90**. – S. 1 – 17.

4. *Padé H.* Sur la répresentation approchée d'une fonction par des fractions rationelles // Ann. l'Ecole normale supér. (3). – 1892. – **9**, Suppl. – P. 3 – 93.
5. *Padé H.* Recherches sur la convergence des développements en fractions continues d'une certaine catégorie de fonctions // Ann. l'Ecole normale supér. (3). – 1907. – **24**. – P. 341 – 400.
6. *Чебышев П. Л.* Избранные математические труды. – М.: Гостехиздат, 1946. – 199 с.
7. *Стилтьес Т.* Исследования о непрерывных дробях. – Харьков; Киев: ДНТВУ, 1936. – 154 с.
8. *Марков А. А.* Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. – М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. – 291 с.
9. *Hamburger H.* Über eine Erweiterung des Stieltjessen Momentproblems. I – III // Math. Ann. – 1920. – **81**. – S. 235 – 319; 1921. – **82**. – S. 120 – 164, 168 – 187.
10. *Hausdorf F.* Summationsmethoden und Momentfolgen. I, II // Math. Z. – 1921. – **9**. – S. 74 – 109, 280 – 299.
11. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. – М.: Физматгиз, 1961. – 312 с.
12. *Гончар А. А.* О сходимости аппроксимаций Паде // Мат.сб. – 1973. – **92**, № 1. – С. 152 – 164.
13. *Гончар А. А.* О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных функций // Там же. – 1975. – **97**, № 4. – С. 607 – 629.
14. *Рахманов Е. А.* О сходимости аппроксимаций Паде в классах голоморфных функций // Там же. – 1977. – **112**, № 2. – С. 162 – 169.
15. *Рахманов Е. А.* Об асимптотике отношения ортогональных многочленов // Там же. – 1982. – **118**. – № С. 104 – 117.
16. *Лунгу К. Н.* О свойствах функций, связанных с поведением полюсов аппроксимаций Паде // Мат. заметки. – 1981. – **29**, № 6. – С. 843 – 848.
17. *Gilewicz J.* Story of rational approximation for the class of Stieltjes functions: from Stieltjes to recent optimal estimations of errors // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 7. – С. 941 – 943.
18. *Luke Y. L.* On the error in Padé approximations for functions defined by Stieltjes integrals // Comput. Math. – 1977. – **3**, № 4. – P. 307 – 314.
19. *Baker G. A.* Best error bounds for Padé approximants to convergent series of Stieltjes // J. Math. Phys. – 1969. – **10**. – P. 814 – 820.
20. *Gautschi W.* On Padé approximants associated with Hamburger series // Calcolo. – 1983. – **20**, № 2. – P. 814 – 820.
21. *Wynn P.* Upon the Padé table derived from a Stieltjes series // SIAM J. Numer. Anal. – 1968. – **5**. – P. 805 – 834.
22. *Hendriksen E., Rossum H. van.* Moment methods in Padé approximation // J. Approxim. Theory. – 1982. – **35**, № 3. – P. 250 – 263.
23. *Hendriksen E., Rossum H. van.* Moment methods in Padé approximation: the unitary case // J. Math. Anal. and Appl. – 1984. – **104**, № 2. – P. 512 – 525.
24. *Nuttall J., Singh S. R.* Orthogonal polynomials and Padé approximants associated with a system of arcs // J. Approxim. Theory. – 1977. – **21**, № 1. – P. 1 – 42.
25. *Stahl H.* Orthogonal polynomials with complex-valued weight function. I, II // Constr. Approxim. – 1986. – **2**, № 3. – P. 225 – 251.
26. *Гончар А. А.* О сходимости обобщенных аппроксимаций Паде мероморфных функций // Мат. сб. – 1975. – **98**, № 4. – С. 564 – 577.
27. *Суетин С. П.* Обратные теоремы об обобщенных аппроксимациях Паде // Там же. – 1979. – **109**, № 4. – С. 629 – 646.
28. *Суетин С. П.* О теореме Монтессу де Болора для нелинейных аппроксимаций Паде ортогональных разложений и рядов Фабера // Докл. АН СССР. – 1980. – **253**, № 6. – С. 1322 – 1325.
29. *Karlberg L.* A convergence result for generalized Padé approximants. – Umeå, 1978. – 12 p. – (Preprint / Dep. Math. Univ. Umeå; № 4).
30. *Гончар А. А., Гіермо Лопес Л.* О теореме Маркова для многоточечных аппроксимаций Паде // Мат. сб. – 1978. – **105**, № 4. – С. 512 – 524.
31. *Русак В. Н.* Рациональные функции как аппарат приближения. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1979. – 176 с.
32. *Ровба Е. А.* Рациональная интерполяция дифференцируемых функций с r-й производной ограниченной вариации // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1999. – № 2. – С. 8 – 13.
33. *Ровба Е. А.* Интерполяционные рациональные функции типа Фейера – Бернштейна // Вести. Белорус. ун-та. Сер. 1. – 1991. – № 2. – С. 75 – 78.

34. *Филозоф Л. И.* Условия сходимости многоточечных аппроксимаций Паде // Теория приближения функций и ее приложения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 121 – 126.
35. *Magnus A.* On the structure of the two-point Padé table // Lect. Notes Math. – 1982. – **932**. – P. 176 – 193.
36. *Njåstad O.* A multi-point Padé approximation problem // Ibid. – 1986. – **1199**. – P. 263 – 268.
37. *Wallin H.* Convergence and divergence of multipoint Padé approximants of meromorphic functions // Ibid. – 1984. – **1105**. – P. 272 – 284.
38. *Hermite C.* Sur la fonction exponentielle // Oeuvres. – 1873. – **3**. – P. 151 – 181.
39. *Angelesco M. A.* Sur deux extensions des fractions continues algebriques // Comp. rend. Acad. sci. Paris. – 1919. – **168**. – P. 262 – 263.
40. *Mahler K.* Perfect systems // Compos. math. – 1968. – **19**. – P. 95 – 166.
41. *Coates J.* On the algebraic approximation of functions. I – III // Indag. Math. – 1966. – **28**. – P. 421 – 461.
42. *Jager H.* A multidimensional generalization of the Padé table // Ibid. – 1964. – **26**. – P. 192 – 249.
43. *Никишин Е. М.* О совместных аппроксимациях Паде // Мат. сб. – 1980. – **113**, № 4. – С. 499 – 518.
44. *Никишин Е. М.* Об асимптотике линейных форм для совместных аппроксимаций Паде // Изв. вузов. Математика. – 1986. – № 2. – С. 33 – 41.
45. *Гончар А. А., Рахманов Е. А.* О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1981. – **157**. – С. 31 – 48.
46. *Никишин Е. М., Сорокин В. Н.* Рациональные аппроксимации и ортогональность. – М.: Наука, 1988. – 256 с.
47. *Аптекарев А. И.* Об аппроксимациях Паде к набору $\{{}_1F_1(1, c; \lambda_i z)\}_{i=1}^{k}$ // Вестн. Моск. ун-та. Математика и механика. – 1981. – № 2. – С. 58 – 62.
48. *Аптекарев А. И.* Асимптотика многочленов совместной ортогональности в случае Анжелеско // Мат. сб. – 1988. – **136**. – С. 56 – 84.
49. *Калягин В. А.* Об одном классе полиномов, определяемых двумя соотношениями ортогональности // Там же. – 1979. – **110**, № 4. – С. 609 – 627.
50. *Kaliaguine V.* The operator moment problem, vector continued fractions and an explicit form of the Favard theorem for vector orthogonal polynomials // J. Comput. Appl. Math. – 1995. – **65**. – С. 181 – 193.
51. *Парусников В. И.* Алгоритм Якоби – Перрона и совместное приближение функций // Мат. сб. – 1981. – **114**, № 2. – С. 322 – 333.
52. *Bruin M. G.* Some convergence results in simultaneous rational approximation to the set of hypergeometric functions $\{{}_1F_1(1; c_i; z)\}_{i=1}^{n}$ // Lect. Notes Math. – 1984. – **1071**. – P. 12 – 33.
53. *Bruin M. G.* Some explicit formulae in simultaneous Padé approximation // Linear Algebra and Its Appl. – 1984. – **63**, Dec. – P. 271 – 281.
54. *Bruin M. G.* Simultaneous Padé approximation and orthogonality // Lect. Notes Math. – 1985. – **1171**. – P. 74 – 83.
55. *Bruin M. G.* Simultaneous rational approximation to some q-hypergeometric functions // Nonlinear Numerical Methods and Rational Approximation. – Dordrecht: Reidel, 1988. – P. 135 – 142.
56. *Bruin M. G., Driver K. A., Lubinsky D. S.* Convergence of simultaneous Hermite-Padé approximants to the n-tuple of q-hypergeometric series $\left\{{}_1\Phi_1\left(\begin{matrix}(1,1)\\(c,\gamma_j)\end{matrix};z\right)\right\}_{j=1}^{n}$ // Numerical Algorithms. – 1992. – **3**. – P. 185 – 192.
57. *Bruin M. G., Driver K. A., Lubinsky D. S.* Convergence of simultaneous Hermite – Padé approximants to the n-tuple of q-hypergeometric series $\{{}_2\Phi_0((A,\alpha_j),(1,1);z)\}_{j=1}^{n}$ // J. Comput. Appl. Math. – 1993. – **49**. – P. 37 – 43.
58. *Chudnovsky G. V.* Padé approximation and the Riemann monodromy problem // Bifurcation Phenomena in Mathematical Physics and Related Topics. – Dordrecht: Reidel, 1980. – P. 449 – 510.
59. *Chudnovsky G. V.* Hermite – Padé approximations to exponential functions and elementary estimates of the measure of irrationality of π // Lect. Notes Math. – 1982. – **925**. – P. 299 – 322.
60. *Nuttall J.* Hermite – Padé approximants to functions meromorphic on a Riemann surface // J. Approxim. Theory. – 1981. – **32**, № 3. – P. 233 – 240.

61. *Nuttall J.* Asymptotics of diagonal Hermite–Padé polynomials // Ibid. – 1984. – **42**, № 4. – P. 299–386.
62. *Beckermann B., Labahn G.* A uniform approach for Hermite–Padé and simultaneous Padé approximants and their matrix-type generalizations // Numerical Algorithms. – 1992. – **3**. – P. 45–54.
63. *Дзядык В. К.* Аппроксимационный метод приближения алгебраическими многочленами решений линейных дифференциальных уравнений // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1974. – **38**, № 4. – С. 937–967.
64. *Дзядык В. К.* А-метод и рациональная аппроксимация // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 3. – С. 250–252.
65. *Дзядык В. К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1988. – 304 с.
66. *Биленко В. И., Коновалов В. Н., Луковский И. А. и др.* Аппроксимационные методы Дзядыка решения дифференциальных и интегральных уравнений // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 4. – С. 454–465.
67. *Дзядык В. К., Философ Л. И.* О скорости сходимости аппроксимаций Паде для некоторых элементарных функций // Мат. сб. – 1978. – **107**, № 3. – С. 347–363.
68. *Дзядык В. К.* Об асимптотике диагональных аппроксимаций Паде функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ // Там же. – 1979. – **108**, № 2. – С. 247–267.
69. *Дзядык В. К.* Об обобщении проблемы моментов // Докл. АН УССР. – 1981. – № 6. – С. 8–12.
70. *Голуб А. П.* Обобщенные моментные представления и рациональные аппроксимации. – Киев, 1987. – 50 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.25).
71. *Дзядык В. К., Голуб А. П.* Обобщенная проблема моментов и аппроксимация Паде. – Киев, 1981. – С. 3–15. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 81.58).
72. *Аров Д. З.* Пассивные линейные стационарные динамические системы // Сиб. мат. журн. – 1979. – **20**, – № 2. – С. 211–228.
73. *Справочник* по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
74. *Голуб А. П.* Применение обобщенной проблемы моментов к аппроксимации Паде некоторых функций. – Киев, 1981. – С. 16–56. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 81.58).
75. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представление функций в комплексной плоскости. – М.: Наука, 1966. – 672 с.
76. *Голуб А. П.* Об аппроксимации Паде функции Миттаг-Леффлера // Теория приближения функций и ее прил. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 52–59.
77. *Чып М. Н.* Наддиагональная аппроксимация Паде функции типа Миттаг-Леффлера $E_{1/2}(z;\alpha)$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$ // Некоторые вопросы теории аппроксимации функций. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. – С. 129–138.
78. *Walliser R.* Rationale Approximation des q-Analogons der Exponentialfunktion und Irrationalitätsaussagen für diese Funktion // Arch. Math. – 1985. – **44**, № 1. – S. 59–64.
79. *Эндрюс Г.* Теория разбиений. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
80. *Голуб А. П.* Обобщенные моментные представления базисных гипергеометрических рядов // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 6. – С. 803–808.
81. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – М.: Наука, 1965. – 296 с.
82. *Jackson F. H.* Transformation of q-series // Messenger Math. – 1910. – **39**. – P. 145–153.
83. *Andrews E., Askey R.* Classical orthogonal polynomials // Lect. Notes. Math. – 1985. – **1171**. – P. 36–62.
84. *Голуб А. П.* Об одной разновидности обобщенных моментных представлений // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 11. – С. 1455–1460.
85. *Golub A. P.* Generalized moment representations and Padé approximants // Теорія наближення функцій та її застосування: Праці Ін-ту математики НАН України. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2000. – **31**. – С. 144–160.
86. *Golub A. P.* Generalized moment representations and Padé approximants associated with bilinear transformations // Теорія наближень та гармонічний аналіз: Тези доп. Укр. мат. конгресу: Секція 10. - Київ: Ін-т математики НАН України, 2001. – С. 16.
87. *Iserles A., Nørsett S. P.* On the theory of bi-orthogonal polynomials // Math. and Comput. – 1986. – № 1. – 42 p.

88. *Brezinski C.* Biorthogonality and its applications to numerical analysis. – New York: Marcel Dekker, 1992. – 166 p.
89. *Дзядык В. К.* Обобщенная проблема моментов и аппроксимации Паде // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, № 3. – С. 297 – 302.
90. *Голуб А. П.* Некоторые свойства биортогональных полиномов // Там же. – 1989. – **41**, № 10. – С. 1384 – 1388.
91. *Castro G., Seghier A.* Recurrence relation for biorthogonal polynomials // Comp. rend. Acad. sci. Paris. – 1997. – **324**, № 12. – P. 1413 – 1418.
92. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
93. *Голуб А. П.* Некоторые свойства биортогональных полиномов и их приложения к аппроксимациям Паде // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 8. – С. 977 – 984.
94. *Голуб А. П.* Обобщенные моментные представления, биортогональные полиномы и аппроксимации Паде // Там же. – 1994. – **46**, № 10. – С. 1328 – 1335.
95. *Голуб А. П.* Обобщенные моментные представления и свойства инвариантности аппроксимаций Паде // Там же. – 1996. – **48**, № 3. – С. 309 – 314.
96. *Rossum H. van.* Systems of orthogonal and quasiorthogonal polynomials connected with the Padé table. I – III // Proc. Kon. ned. akad. wetensch. A. – 1955. – **58**, № 4. – P. 517 – 534.
97. *Голуб А. П.* Доказательства теорем Паде и ван Россума с использованием обобщенных моментных представлений // Некоторые вопросы теории приближения функций и их приложения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 37 – 43.
98. *Голуб А. П.* Интегральные уравнения типа свертки и аппроксимации Паде // Исследования по теории аппроксимации функций. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. – С. 21 – 23.
99. *Luke Y. L.* The special functions and their approximations. – New York: Acad. Press, 1992. – Vol 2. – 486 p.
100. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. – М.: Мир, 1980. – 608 с.
101. *Lubinsky D. S.* Uniform convergence of rows of the Padé table for functions with smooth Maclaurin series coefficients // Constr. Approxim. – 1987. – **3**. – P. 307 – 330.
102. *Голуб А. П.* Об одной системе биортогональных полиномов и ее приложениях // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 7. – С. 961 – 965.
103. *Никифоров А. Ф., Суслов С. К., Уваров В. Б.* Классические ортогональные полиномы дискретной переменной. – М.: Наука, 1985. – 215 с.
104. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. – М.: Наука, 1986. – 800 с.
105. *Голуб А. П.* О совместных аппроксимациях Паде набора вырожденных гипергеометрических функций // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 6. – С. 701 – 706.
106. *Голуб А. П.* Сходимость знаменателей совместных аппроксимаций Паде набора вырожденных гипергеометрических функций // Там же. – 1987. – **40**, № 6. – С. 792 – 795.
107. *Голуб А. П.* О совместных аппроксимациях Паде набора функций типа Миттаг-Леффлера // Гармонический анализ и развитие аппроксимационных методов. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 38 – 42.
108. *Голуб А. П.* Обобщенные моментные представления и аппроксимации Паде – Чебышева // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 6. – С. 762 – 766.
109. *Голуб А. П.* Апроксиманти Паде – Чебишева одного класу функцій // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 1. – С. 15 – 19.

Одержано 19.02.2002