УДК 517.9

С. А. Плакса (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ ТОКА СТОКСА В ОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ МЕРИДИАННОЙ ПЛОСКОСТИ*

We develop a method of reduction of the Dirichlet problem for the Stockes flow function in a simply connected domain of the meridional plane to the Cauchy singular integral equation. For the case where a boundary of domain is smooth and satisfies certain additional conditions, we regularize the considered singular integral equation.

Розроблено метод редукції задачі Діріхле для функції течії Стокса в однозв'язній області меридіанної площини до сингулярного інтегрального рівняння Коші. У випадку гладкої межі області, що задовольняє деякі додаткові умови, здійснено регуляризацію вказаного сингулярного інтегрального рівняння.

Известно, что при описании пространственного потенциального соленоидального поля, симметричного относительно оси Ox, в меридианной плоскости xOy используется функция тока Стокса $\psi(x, y)$. Эта функция удовлетворяет уравнению

$$y\Delta\psi(x, y) - \frac{\partial\psi(x, y)}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

где $\Delta := \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — оператор Лапласа, и, следовательно, не является гармонической. Кроме того, функция $\psi(x, y)$ должна также удовлетворять условию

$$\psi(x, 0) \equiv 0, \tag{2}$$

которое соответствует ее физической природе. Например, в модели течения идеальной жидкости это условие выражает отсутствие перетекания жидкости через ось Ox.

Теория решений уравнения (1) развита в значительно меньшей степени, чем для гармонических функций на плоскости, что естественным образом связано с вырождением уравнения (1) на оси Ox. Поэтому для решения краевых задач в меридианной плоскости актуальной является разработка специальных методов, учитывающих природу и специфические особенности осесимметричных задач.

В работе [1], исходя из формул Грина для операторов Эйлера – Пуассона – Дарбу, получены интегральные представления решений уравнения (1) через значения этих функций и их нормальных производных на границе области. В случае круга в указанных интегральных представлениях исключаются слагаемые, содержащие нормальные производные. Таким способом в [1] получено решение задачи Дирихле для функции тока Стокса в круге в виде аналога интеграла Пуассона.

Отметим также, что решение задачи Дирихле для функции тока Стокса известно в отдельных случаях задачи обтекания осесимметричных тел (см. [2 – 4]).

В наших исследованиях для решения краевых задач в меридианной плоскости осесимметричного потенциального поля используются интегральные представления осесимметричного потенциала и функции тока Стокса, установленные в [5 – 7], и методы теории особых интегральных уравнений. В частности, в [8, 9] получено в явном виде решение задачи Дирихле для осесимметричного потенциала и функции тока Стокса в круге меридианной плоскости, при этом случай круга рассмотрен как модельный для апробации методики исследования.

*Частично поддержана проектом INTAS-99-00089.

Развивая далее идеи работ [8, 9], в [10, 11] разработан новый метод решения задачи Дирихле для осесимметричного потенциала в односвязной области меридианной плоскости путем ее редукции к интегральному уравнению Фредгольма.

Ниже использован такой же подход к решению задачи Дирихле для функции тока Стокса $\psi(x, y)$ в односвязной области меридианной плоскости. При этом разработан метод редукции этой задачи к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши, а для односвязной области с гладкой границей, удовлетворяющей некоторым дополнительным условиям, осуществлена регуляризация указанного сингулярного уравнения.

1. Постановка задачи Дирихле для функции тока Стокса и редукция задачи к сингулярному интегральному уравнению. Условимся, что всюду в дальнейшем D — область меридианной плоскости xOy, симметричная относительно оси Ox. Замыкание области D обозначим через $\overline{D}$, а ее границу — через ∂D.

Рассмотрим *задачу Дирихле для функции тока Стокса* об отыскании непрерывной на $\overline{D}$ функции $\psi(x, y)$, которая в области D удовлетворяет уравнению (1) и условию (2), а на границе ∂D принимает заданные значения $\psi_{\partial D}(x, y)$, т. е. выполняется равенство $\psi(x, y) = \psi_{\partial D}(x, y)$ при всех $(x, y) \in \partial D$. Кроме того, в случае неограниченной области D предполагаем также, что выполняется условие

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} \psi(x, y) = 0. \tag{3}$$

Заметим, что функция тока Стокса $\psi(x, y)$, удовлетворяющая условию (2) в области D, а также условию (3) в случае неограниченной области D, подчиняется принципу максимума. Естественным следствием принципа максимума является единственность решения задачи Дирихле для функции тока Стокса.

Через $\mathbb{R}$ обозначим вещественную прямую комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Область плоскости $\mathbb{C}$, конгруэнтную области D меридианной плоскости xOy при соответствии $z = x + iy$, $(x, y) \in D$, будем обозначать D_z, ее замыкание — $\overline{D_z}$, а границу — ∂D_z. Положительным направлением обхода границы ∂D_z будем считать такое направление, при котором область D_z остается слева.

В дальнейшем в качестве области D_z, как правило, рассматриваются области, граница которых является замкнутой жордановой спрямляемой кривой γ, симметричной относительно вещественной прямой. При этом через D_z^+ обозначим ограниченную область, а через D_z^- — неограниченную область, общей границей которых является кривая γ. Заметим, что в соответствии с принятым выше соглашением границы ∂D_z^+ и ∂D_z^- имеют противоположную ориентацию. Обозначим через b_1 и b_2 точки, в которых кривая γ пересекает вещественную прямую, при этом $b_1 < b_2$.

Как и в работе [5], зададим в области D_z гомотопическое семейство $\{\Gamma_{z\bar{z}}\}$ жордановых спрямляемых кривых, каждая кривая $\Gamma_{z\bar{z}}$ которого симметрична относительно вещественной прямой $\mathbb{R}$ и соединяет точки z и $\bar{z}$ при $\operatorname{Im} z \neq 0$.

В случае $D_z = D_z^-$ условимся также, что все кривые $\Gamma_{z\bar{z}}$ пересекают вещественную прямую на интервале $(-\infty, b_1)$. Дополним еще указанное семейство дугами $\Gamma_{z\bar{z}}$ кривой γ такими, что их концами являются точки z и $\bar{z}$ при $\operatorname{Im} z \neq$ $\neq 0$ и, кроме того, $b_1 \in \Gamma_{z\bar{z}}$.

Если $z \in \overline{D_z}$, $\operatorname{Im} z \neq 0$, то $\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}$ понимаем как непрерывную ветвь аналитической функции $G(t)=\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}$ с разрезом вдоль кривой $\Gamma_{z\overline{z}}$ такую, что $G(b_2)>0$. Обозначим также

$$\left(\sqrt{(\tau-z)(\tau-\overline{z})}\right)^{\pm} := \lim_{t\to\tau,\, t\in D_z^{\pm}} \sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}$$

при $\tau\in\gamma\setminus\{z,\,\overline{z}\}$.

Из теоремы 1 работы [5] следует, что каждой голоморфной в области D_z функции F соответствует решение $\psi(x,y)$ уравнения (1) в области D, задаваемое формулой

$$\psi(x,y) = \\ = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma} F(t)\left(1-\dfrac{t-x}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\right)dt & \text{при } y\neq 0; \\ 0 & \text{при } y=0, \text{ если } b_1<x<b_2 \text{ или } x<b_1; \\ \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma_0} F(t)\,dt & \text{при } y=0, \text{ если } x>b_2. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $(x,y)\in D$, $z=x+iy$, Γ — произвольная замкнутая жорданова спрямляемая кривая в D_z, которая охватывает кривую $\Gamma_{z\overline{z}}$, а Γ_0 — произвольная замкнутая жорданова спрямляемая кривая в D_z, которая охватывает границу ∂D_z.

При этом очевидно, что если в случае $D_z = D_z^-$ голоморфная в области D_z функция F удовлетворяет дополнительному условию

$$\int_{\Gamma'} F(t)\,dt = 0, \qquad (5)$$

где Γ' — произвольная замкнутая жорданова спрямляемая кривая в D_z, то равенство (4) принимает вид

$$\psi(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma} \dfrac{F(t)(t-x)}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}dt & \text{при } y\neq 0; \\ 0 & \text{при } y=0 \end{cases} \qquad (6)$$

(очевидно также, что в случае $D_z = D_z^+$ правые части равенств (4) и (6) совпадают при всех $(x,y)\in D$).

Заметим, что в случае $D_z = D_z^-$ голоморфная в области D_z^- и обращающаяся в нуль в бесконечно удаленной точке функция F удовлетворяет условию (5) тогда и только тогда, когда она имеет в бесконечно удаленной точке нуль не ниже второго порядка, т. е. удовлетворяет соотношению

$$\lim_{z\to\infty} zF(z) = 0. \qquad (7)$$

Справедливы следующие утверждения о представимости функции тока Стокса формулой (6) в области D, граница которой может быть и неспрямляемой кривой. При этом отдельно рассмотрим случаи ограниченной и неограниченной области D.

Теорема 1. *Пусть область D ограничена. Тогда для каждой четной по переменной y функции тока Стокса $\psi(x,y)$, удовлетворяющей в области D условию* (2), *существует голоморфная в области D_z функция F_0 такая, что равенство* (6) *при $F=F_0$ выполняется для всех $(x,y)\in D$. Кроме того, любая голоморфная в области D_z функция F, удовлетворяющая равенству* (6) *и условию*

$$F(\overline{z}) = \overline{F(z)} \quad \forall\, z\in D_z, \qquad (8)$$

имеет вид $F(z) = F_0(z) + C$, *где* C — *некоторая действительная постоянная.*

Теорема 2. *Пусть* D — *неограниченная область с ограниченной границей. Тогда для каждой четной по переменной* y *функции тока Стокса* $\psi(x, y)$, *удовлетворяющей в области* D *условиям* (2) *и* (3), *существует единственная голоморфная в области* D_z *функция* F, *удовлетворяющая условиям* (7) *и* (8), *такая, что равенство* (6) *выполняется для всех* $(x, y) \in D$.

Доказательства теорем 1, 2 будут приведены ниже. Заметим, что в работах [6, 7] при некоторых дополнительных предположениях об области D и функции $\psi(x, y)$ голоморфная функция F найдена в явном виде.

В работе [5] показано, что при естественных предположениях о функции F и границе области D_z интеграл в формуле (6) можно заменить таким же интегралом по границе ∂D_z.

Основываясь на этих результатах, решение задачи Дирихле для функции тока Стокса будем искать в виде

$$\psi(x, y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D_z} \dfrac{F(t)(t-x)}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\,dt & \text{при } y \neq 0; \\ 0 & \text{при } y = 0, \end{cases} \tag{9}$$

где функция F голоморфна в области D_z, удовлетворяет условию (8) и является решением интегрального уравнения

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_z^+} \frac{F(t)(t-x)}{\left(\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}\right)^-}\,dt = \psi_{\partial D}(x, y), \qquad z = x + iy \in \partial D_z^+ \setminus \{b_1, b_2\}, \tag{10}$$

в случае задачи Дирихле для ограниченной области (внутренней задачи Дирихле) или решением интегрального уравнения

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_z^-} \frac{F(t)(t-x)}{\left(\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}\right)^+}\,dt = \psi_{\partial D}(x, y), \qquad z = x + iy \in \partial D_z^- \setminus \{b_1, b_2\}, \tag{11}$$

в случае задачи Дирихле для неограниченной области (внешней задачи Дирихле).

Предположим, что граница ∂D_z является замкнутой жордановой спрямляемой кривой γ, метрическая характеристика которой (см., например, [12, 13]) $\theta(\varepsilon) := \sup_{z\in\gamma} \operatorname{mes}\{t \in \gamma : |t - z| \le \varepsilon\}$, где mes обозначает линейную меру Лебега на кривой γ, удовлетворяет условию $\theta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$. Предположим также, что функция F голоморфна в области D_z, непрерывна на множестве $\overline{D_z} \setminus \{b_1, b_2\}$ и удовлетворяет оценке

$$|F(z)| \le c\left(|z - b_1|^{-\beta_F} + |z - b_2|^{-\beta_F}\right) \quad \forall z \in \overline{D_z} \setminus \{b_1, b_2\}, \tag{12}$$

где $\beta_F \in [0; 1)$ и постоянная c не зависит от z. Отметим, что если теперь в случае $D_z = D_z^-$ выполняется равенство $\psi_{\partial D}(b_2, 0) = 0$ и функция F является решением интегрального уравнения (11), то она также удовлетворяет условию (5). Действительно, при сделанных предположениях, переходя к пределу в равенстве (11) при $z \to b_2$ и учитывая при этом теорему 4 из [14], получаем равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_z^-} F(t)\,dt = 0,$$

из которого в силу теоремы Коши следует равенство (5). Следовательно, в этом случае при дополнительном предположении о том, что функция F обращается в нуль в бесконечно удаленной точке, заключаем, что она имеет в этой точке нуль не ниже второго порядка.

Рассмотрим сначала однородные интегральные уравнения (10), (11) при $\psi_{\partial D}(x, y) \equiv 0$.

Теорема 3. *Пусть граница* ∂D_z^+ *является замкнутой жордановой спрямляемой кривой, удовлетворяющей условию* $\theta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$, *а функция* F *голоморфна в области* D_z^+, *непрерывна на множестве* $\overline{D_z^+} \setminus \{b_1, b_2\}$, *удовлетворяет условию* (8) *и оценке вида* (12). *Если при этом для всех* $z \in \partial D_z^+ \setminus \{b_1, b_2\}$ *выполняется равенство*

$$\int_{\partial D_z^+} \frac{F(t)(t - \operatorname{Re} z)}{\left(\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}\right)^-} dt = 0, \tag{13}$$

то $F(z) \equiv C$, *где* C — *некоторая действительная постоянная.*

Доказательство. Заметим, что если при условиях теоремы равенство (13) выполняется для всех $z \in \partial D_z^+ \setminus \{b_1, b_2\}$, то оно выполняется также для всех $z \in D_z^+$. Это следует из единственности решения внутренней задачи Дирихле для функции тока Стокса и теоремы 7 из [14].

Выберем теперь круг с центром в точке вещественной прямой, содержащийся в области D_z^+. Применяя к этому кругу теорему 7 из [6] и учитывая теорему единственности аналитических функций [15, с. 68], устанавливаем, что равенство (13) выполняется для всех z из указанного круга тогда и только тогда, когда голоморфная в области D_z^+ функция F тождественно равна некоторой постоянной C. Поскольку при этом функция F удовлетворяет условию (8), то $C \in \mathbb{R}$, что и завершает доказательство теоремы.

Теорема 4. *Пусть граница* ∂D_z^- *является замкнутой жордановой спрямляемой кривой, удовлетворяющей условию* $\theta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$, *а функция* F *голоморфна в области* D_z^-, *непрерывна на множестве* $\overline{D_z^-} \setminus \{b_1, b_2\}$ *и удовлетворяет оценке вида* (12). *Если при этом функция* F *обращается в нуль в бесконечно удаленной точке и для всех* $z \in \partial D_z^- \setminus \{b_1, b_2\}$ *выполняется равенство*

$$\int_{\partial D_z^-} \frac{F(t)(t - \operatorname{Re} z)}{\left(\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}\right)^+} dt = 0, \tag{14}$$

то $F(z) \equiv 0$.

Доказательство. Как отмечено выше, функция F, удовлетворяющая равенству (14) в точках множества $\partial D_z^- \setminus \{b_1, b_2\}$, при условиях теоремы имеет в бесконечно удаленной точке нуль не ниже второго порядка, т. е. удовлетворяет условию (7). Далее, как и при доказательстве теоремы 3, заключаем, что равенство (14) выполняется для всех $z \in D_z^-$.

Выберем теперь окрестность бесконечно удаленной точки, содержащуюся в области D_z^-. Наконец, применяя к этой окрестности теорему 10 из [7] и учитывая теорему единственности аналитических функций [15, с. 68], устанавливаем, что равенство (14) выполняется для всех z из указанной окрестности тогда и только тогда, когда голоморфная в области D_z^- и обращающаяся в нуль в бесконечно удаленной точке функция F тождественно равна нулю. Теорема доказана.

Далее при более жестких, чем в теоремах 3, 4, ограничениях на границу ∂D_z осуществляется преобразование неоднородных интегральных уравнений (10), (11) задачи Дирихле для функции тока Стокса к сингулярному интегральному уравнению Коши на вещественной прямой.

Как и в работе [10], при решении внутренней задачи Дирихле будем использовать некоторое конформное отображение $\sigma_+(Z)$ единичного круга $\{Z \in \mathbb{C} : |Z| < 1\}$ на область D_z^+ такое, что образом полукруга $\{Z \in \mathbb{C} : |Z| < 1, \ \operatorname{Im} Z > 0\}$ при отображении $\sigma_+(Z)$ является область $\{z \in D_z^+ : \operatorname{Im} z > 0\}$, $\sigma_+(-1) = b_1$, $\sigma_+(1) = b_2$ и при всех $Z \in \{Z \in \mathbb{C} : |Z| \le 1\}$ выполняется равенство $\sigma_+(\overline{Z}) = \overline{\sigma_+(Z)}$.

Введем при этом в рассмотрение функцию

$$M_+(Z, T) := \sqrt{\frac{(T - Z)(T - \overline{Z})}{(\sigma_+(T) - \sigma_+(Z))(\sigma_+(T) - \sigma_+(\overline{Z}))}},$$

которую при каждом фиксированном $Z \ne -1$ будем понимать как непрерывную ветвь функции, аналитической в единичном круге по переменной T, такую, что $M_+(Z, -1) > 0$.

При решении внешней задачи Дирихле аналогично будем использовать конформное отображение $\sigma_-(Z)$ единичного круга $\{Z \in \mathbb{C} : |Z| < 1\}$ на область D_z^-, удовлетворяющее условиям нормировки $\sigma_-(0) = \infty$ и $\sigma_-(-1) = b_1$. Заметим, что образом полукруга $\{Z \in \mathbb{C} : |Z| < 1, \ \operatorname{Im} Z > 0\}$ при отображении $\sigma_-(Z)$ является область $\{z \in D_z^- : \operatorname{Im} z < 0\}$, и при всех $Z \in \{Z \in \mathbb{C} : |Z| \le 1\}$ выполняется равенство $\sigma_-(\overline{Z}) = \overline{\sigma_-(Z)}$ (см. [10]).

Введем также в рассмотрение функцию

$$M_-(Z, T) := \sqrt{\frac{(T - Z)(T - \overline{Z})}{T^2(\sigma_-(T) - \sigma_-(Z))(\sigma_-(T) - \sigma_-(\overline{Z}))}},$$

которую при каждом фиксированном Z таком, что $Z \ne -1$ и $Z \ne 0$, будем понимать как непрерывную ветвь функции, аналитической в единичном круге по переменной T, такую, что $M_-(Z, -1) > 0$.

Рассмотрим гельдеровский класс $\tilde{\mathcal{H}}_\alpha$ функций $g : \partial D_z \to \mathbb{R}$, для каждой из которых при фиксированном $\alpha \in (0; 1]$ существует $\nu \in [0; \alpha)$ такое, что выполняется условие

$$|g(z_1) - g(z_2)| \le$$

$$\le c(\max\{|z_1 - b_1||z_1 - b_2|, |z_2 - b_1||z_2 - b_2|\})^{-\nu} |z_1 - z_2|^\alpha$$

$$\forall z_1, z_2 \in \partial D_z,$$

где постоянная c не зависит от z_1 и z_2. Соответствующий ему класс функций $g_{\partial D} : \partial D \to \mathbb{R}$, для каждой из которых функция g, определяемая равенством $g(x + iy) := g_{\partial D}(x, y)$ $\forall x, y \in \partial D$, принадлежит классу $\tilde{\mathcal{H}}_\alpha$, будем обозначать $\tilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D)$.

В следующей теореме устанавливаются достаточные условия редукции интегральных уравнений (10), (11) задачи Дирихле для функции тока Стокса к сингулярному интегральному уравнению на вещественной прямой. При этом сингулярные интегралы понимаются в смысле главного значения.

Теорема 5. *Пусть функция* $\psi_{\partial D}$ *принадлежит классу* $\tilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D)$, $1/2 < \alpha \leq \leq 1$, *и удовлетворяет условиям*

$$\psi_{\partial D}(b_1, 0) = \psi_{\partial D}(b_2, 0) = 0, \tag{15}$$

$$\psi_{\partial D}(x, -y) = \psi_{\partial D}(x; y) \quad \forall (x, y) \in \partial D. \tag{16}$$

Пусть при этом отображение $\sigma_\pm(Z)$ *дифференцируемо в точках множества* $\{Z \in \mathbb{C} : |Z| = 1,\ Z \neq \pm 1\}$ *и функция* $\sigma'_\pm(Z)$ *в тех же точках непрерывна и удовлетворяет оценке*

$$c_1\left(|Z-1|^{-\beta} + |Z+1|^{-\beta}\right) \leq |\sigma'_\pm(Z)| \leq c_2\left(|Z-1|^{-\beta} + |Z+1|^{-\beta}\right), \tag{17}$$

где $\beta \in [0; 1)$ *и постоянные* c_1, c_2 *не зависят от* Z.

Тогда справедливы утверждения:

1) *если функция* F *голоморфна в области* D_z^+, *непрерывна на множестве* $\overline{D_z^+} \setminus \{b_1, b_2\}$, *удовлетворяет условию* (8) *и оценке вида* (12), *а также является решением интегрального уравнения* (10), *то функция*

$$V_*(\xi) = \operatorname{Im} \frac{iF(\sigma_+((\xi-i)/(\xi+i)))\sigma'_+((\xi-i)/(\xi+i))}{2(\xi+i)} \quad \forall \xi > 0$$

является решением сингулярного интегрального уравнения

$$D(\xi,\xi)V_*(\xi) - \frac{2C(\xi,\xi)}{\pi}\int_0^\infty \frac{\tau V_*(\tau)}{\tau^2-\xi^2}d\tau - \frac{2\xi}{\pi}\int_0^\xi V_*(\tau)\int_\tau^\xi \frac{s(D(s,\tau)-D(\xi,\tau))}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}ds\,d\tau +$$

$$+\frac{4\xi}{\pi^2}\int_0^\xi\left(\int_\tau^\xi \frac{s(C(s,\tau)-C(\xi,\tau))}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}ds\int_0^\infty \frac{\eta V_*(\eta)}{\eta^2-\tau^2}d\eta\right)d\tau = g_*(\xi) \quad \forall \xi > 0, \tag{18}$$

в котором

$$C(\xi,\tau) := 2\operatorname{Re} n(\xi,\tau), \qquad D(\xi,\tau) := 2\operatorname{Im} n(\xi,\tau), \tag{19}$$

$$g_*(\xi) := \psi_*(\xi) - \xi\int_0^\xi \frac{s(\psi_*(s)-\psi_*(\xi))}{(\xi^2-s^2)^{3/2}}ds. \tag{20}$$

Здесь

$n(\xi,\tau) = M_+((\xi-i)/(\xi+i), (\tau-i)/(\tau+i))(\sigma_+((\tau-i)/(\tau+i)) - \operatorname{Re}\sigma_+((\xi-i)/(\xi+i)))$,

а функция ψ_* *выражается через заданную функцию* $\psi_{\partial D}$ *равенством*

$$\psi_*(\xi) := \frac{\psi_{\partial D}(x,y)}{\sqrt{\xi^2+1}}, \tag{21}$$

где $x + iy = \sigma_+((\xi-i)/(\xi+i))$;

2) *если в сингулярном интегральном уравнении* (18) *функции* C, D, g_* *определены равенствами* (19), (20) *и функция* V_* *является таким его решением, что функция*

$$F(z) = \frac{2(\xi+i)}{\pi i \sigma_+'((\xi-i)/(\xi+i))} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{|\tau|} \frac{V_*(|\tau|)}{\tau-\xi} d\tau, \tag{22}$$

$$z = \sigma_+\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right) \in D_z^+, \quad \operatorname{Im}\xi > 0,$$

непрерывно продолжается из области D_z^+ *в точки множества* $\partial D_z^+ \setminus \{b_1, b_2\}$ *и выполняется оценка вида* (12), *то предельные значения функции* (22) *на множестве* $\partial D_z^+ \setminus \{b_1, b_2\}$ *удовлетворяют интегральному уравнению* (10);

3) *если функция* F *голоморфна в области* D_z^-, *непрерывна на множестве* $\overline{\partial D_z^-} \setminus \{b_1, b_2\}$, *удовлетворяет условию* (8) *и оценке вида* (12), *а также является решением интегрального уравнения* (11), *то функция*

$$V_*(\xi) = \operatorname{Im} \frac{i(\xi-i)F(\sigma_-((\xi-i)/(\xi+i)))\sigma_-'((\xi-i)/(\xi+i))}{2(\xi+i)^2} \quad \forall \xi > 0$$

является решением сингулярного интегрального уравнения (18), *в котором функции* $C(\xi,\tau)$, $D(\xi,\tau)$, g_* *определяются равенствами* (19), (20) *и при этом*

$$n(\xi,\tau) = M_-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}, \frac{\tau-i}{\tau+i}\right)\left(\sigma_-\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right) - \operatorname{Re}\sigma_-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)\right)$$

и $x+iy = \sigma_-((\xi-i)/(\xi+i))$ *для точки* (x, y) *в равенстве* (21);

4) *если в сингулярном интегральном уравнении* (18) *функции* C, D, g_* *определены равенствами* (19), (20) *и при этом*

$$n(\xi,\tau) = M_-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}, \frac{\tau-i}{\tau+i}\right)\left(\sigma_-\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right) - \operatorname{Re}\sigma_-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)\right)$$

и $x+iy = \sigma_-((\xi-i)/(\xi+i))$ *для точки* (x, y) *в равенстве* (21), *а функция* V_* *является таким его решением, что функция*

$$F(z) = \frac{2(\xi+i)^2}{\pi i(\xi-i)\sigma_-'((\xi-i)/(\xi+i))} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{|\tau|} \frac{V_*(|\tau|)}{\tau-\xi} d\tau,$$

$$z = \sigma_-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right) \in D_z^-, \quad \operatorname{Im}\xi > 0, \tag{23}$$

непрерывно продолжается из области D_z^- *в точки множества* $\partial D_z^- \setminus \{b_1, b_2\}$ *и удовлетворяет оценке вида* (12), *то предельные значения функции* (23) *на множестве* $\partial D_z^- \setminus \{b_1, b_2\}$ *удовлетворяют интегральному уравнению* (11).

Доказательство. Отметим, что при предположениях теоремы об отображении $\sigma_\pm$ для произвольного $A \in (0; 1)$ существуют положительные постоянные c_1 и c_2 такие, что при всех $T, Z \in \{Z \in \mathbb{C} : |Z| = 1, \ |Z+1| > A, \ |Z-1| > A\}$ выполняется двойное неравенство

$$c_1 \le \left|\frac{\sigma_\pm(T) - \sigma_\pm(Z)}{T-Z}\right| \le c_2.$$

Кроме того, с учетом этого неравенства для произвольных A_1, A_2, A_3, $A_4 \in (-1; 1)$: $A_1 < A_2 < A_3 < A_4$ легко устанавливается оценка

$$|M_{\pm}(Z_1, T) - M_{\pm}(Z_2, T)| \le c|Z_1 - Z_2| \quad \forall T, Z_1, Z_2 \in \{Z \in \mathbb{C} : |Z| = 1\} :$$
$$A_1 < \operatorname{Re} T < A_2, \quad A_3 < \operatorname{Re} Z_1 < \operatorname{Re} Z_2 < A_4,$$
$$\operatorname{Im} Z_1 \operatorname{Im} T > 0, \quad \operatorname{Im} Z_2 \operatorname{Im} T > 0,$$

в которой постоянная c не зависит от Z_1 и Z_2.

При решении интегрального уравнения (10) используем функцию $F_+(T) := := F(\sigma_+(T))\sigma'_+(T)$, а при решении интегрального уравнения (11) — функцию $F_-(T) := T F(\sigma_-(T))\sigma'_-(T)$. Заметим, что следствием оценки (17) и оценки вида (12) является оценка

$$|F_{\pm}(Z)| \le c\left(|Z-1|^{-\beta_1} + |Z+1|^{-\beta_1}\right) \quad \forall Z \in \mathbb{C} : |Z| \le 1, \quad Z \ne \pm 1, \qquad (24)$$

в которой $\beta_1 = \beta + \beta_F - \beta\beta_F$, при этом $\max\{\beta, \beta_F\} \le \beta_1 < 1$. Аналогично из оценки (24) при $\beta_1 \in [0; 1)$ и при условии (17) получим оценку вида (12), в которой $\beta_F = (\beta - \beta_1)/(1 - \beta)$, причем $\beta_F \in [0; 1)$.

Введем в рассмотрение функцию $F_*(\tau) := iF_{\pm}(T)/(2(\tau + i))$. При этом F_* голоморфна в полуплоскости $\{\tau \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\tau > 0\}$, непрерывно продолжается на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ и обращается в нуль на бесконечности.

Путем таких же рассуждений, как при доказательстве теоремы 2 работы [10] преобразованы соответствующие интегральные уравнения задачи Дирихле для осесимметричного потенциала, интегральные уравнения (10), (11) преобразуются к виду

$$D(\xi,\xi)V_*(\xi) - C(\xi,\xi)U_*(\xi) - \frac{2\xi}{\pi}\int_0^{\xi} V_*(\tau)\int_{\tau}^{\xi} \frac{s(D(s,\tau) - D(\xi,\tau))}{(\xi^2 - s^2)^{3/2}\sqrt{s^2 - \tau^2}}\,ds\,d\tau +$$
$$+ \frac{2\xi}{\pi}\int_0^{\xi} U_*(\tau)\int_{\tau}^{\xi} \frac{s(C(s,\tau) - C(\xi,\tau))}{(\xi^2 - s^2)^{3/2}\sqrt{s^2 - \tau^2}}\,ds\,d\tau = g_*(\xi). \qquad (25)$$

Здесь $U_*(\xi) := \operatorname{Re} F_*(\xi)$ и $V_*(\xi) := \operatorname{Im} F_*(\xi)$.

Используя формулу Гильберта для обращения сингулярного интеграла Коши [16, с. 93], с учетом нечетности функции V_* получаем равенства

$$U_*(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{V_*(\tau)}{\tau - \xi}\,d\tau = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\tau V_*(\tau)}{\tau^2 - \xi^2}\,d\tau \quad \forall \xi > 0.$$

Теперь после подстановки полученного для функции U_* выражения в равенство (25) получим сингулярное интегральное уравнение (18) для нахождения функции V_*. Таким образом, утверждения 1, 3 теоремы доказаны, а для завершения доказательства утверждения 2 (или утверждения 4) остается заметить, что функция F выражается через функцию V_* по формуле (22) (или, соответственно, по формуле (23)) в результате решения задачи Шварца для полуплоскости [15, с. 209].

2. Вспомогательные утверждения. Прежде чем приступить к регуляризации сингулярного интегрального уравнения (18) задачи Дирихле для функции тока Стокса, докажем ряд вспомогательных утверждений.

В дальнейшем предполагаем, что области D_z^+, D_z^- имеют гладкие границы ∂D_z^+, ∂D_z^- и такие, что конформное отображение $\sigma_{\pm}(Z)$ на границе единичного круга имеет непрерывную контурную производную. Введем в рассмотрение ее модуль непрерывности

$$\omega(\sigma'_\pm, \varepsilon) := \sup_{|Z_1|=|Z_2|=1,\ |Z_1-Z_2|\le\varepsilon} |\sigma'_\pm(Z_1)-\sigma'_\pm(Z_2)|.$$

В этом случае при всех $T, Z \in \{Z \in \mathbb{C} : |Z| = 1\}$ таких, что $\operatorname{Re} T < \operatorname{Re} Z$, $\operatorname{Im} Z \operatorname{Im} T > 0$, справедливы оценки

$$|\operatorname{Re}\sigma_\pm(T) - \operatorname{Re}\sigma_\pm(Z)| \le c\,\omega(\sigma'_\pm, \rho_{T,Z})|T-Z|,$$

$$|\operatorname{Im}\sigma_\pm(T) - \operatorname{Im}\sigma_\pm(Z)| \le c|T-Z|,$$

где $\rho_{T,Z} := \min\{|T-1|, |Z+1|\}$ и постоянная c не зависит от T и Z.

Из этих оценок и оценок (37), (38) из [10] для функции $M_\pm(Z,T)$ при сделанных предположениях об отображении $\sigma_\pm$ следуют аналогичные оценки для функции $N_\pm(Z,T) := M_\pm(Z,T)(\sigma_\pm(T) - \operatorname{Re}\sigma_\pm(Z))$:

$$|N_\pm(Z_1, T_0) - N_\pm(Z_0, T_0)| \le c\frac{\omega(\sigma'_\pm, |T_0 - Z_0|)}{|T_0 - Z_0|}\rho_{T_0, Z_0}|Z_1 - Z_0|, \tag{26}$$

$$|N_\pm(Z_0, T_1) - N_\pm(Z_0, T_0)| \le c\left(\frac{\omega(\sigma'_\pm, |T_0 - Z_0|)}{|T_0 - Z_0|}\rho_{T_0, Z_0} + 1\right)|T_1 - T_0| \tag{27}$$

$$\forall\, T_0, T_1, Z_1, Z_0 \in \{Z \in \mathbb{C} : |Z| = 1\}:$$

$$-1 < \operatorname{Re} T_0 < \operatorname{Re} T_1 < \operatorname{Re} Z_1 < \operatorname{Re} Z_0 < 1,$$

$$\operatorname{Im} T_1 \operatorname{Im} T_0 > 0, \quad \operatorname{Im} Z_1 \operatorname{Im} T_0 > 0, \quad \operatorname{Im} Z_0 \operatorname{Im} T_0 > 0,$$

где постоянная c не зависит от T_0, T_1, Z_1 и Z_0.

Оценки (26), (27) существенно используются при доказательстве следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть конформное отображение $\sigma_\pm(Z)$ имеет непрерывную контурную производную на границе единичного круга. Тогда для функции*

$$\tilde{n}(\xi, \tau) = \frac{2\xi}{\pi}\int_\tau^\xi \frac{s(n(s,\tau) - n(\xi,\tau))}{(\xi^2 - s^2)^{3/2}\sqrt{s^2 - \tau^2}}\,ds,$$

где $n(\xi,\tau) := N_\pm((\xi - i)/(\xi + i), (\tau - i)/(\tau + i))$, справедливы оценки

$$|\tilde{n}(\xi,\tau)| \le c\frac{\omega(\sigma'_\pm, |T-Z|)}{|T-Z|}\frac{\xi}{(\xi+1)^{5/2}(\tau+1)^{3/2}} \quad \forall \xi > \tau > 0, \tag{28}$$

$$|\tilde{n}(\xi,\tau) - \tilde{n}(\xi-\varepsilon,\tau)| \le c\frac{\omega(\sigma'_\pm, |T-Z|)}{|T-Z|}\frac{\xi}{(\xi+1)^{5/2}(\tau+1)^{3/2}}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\xi-\tau}}, \tag{29}$$

$$|\tilde{n}(\xi,\tau+\varepsilon) - \tilde{n}(\xi,\tau)| \le c\left(\frac{\omega(\sigma'_\pm, |T-Z|)}{|T-Z|}\frac{\xi}{(\xi+1)(\tau^3+1)} + \frac{1}{\tau^2+1}\right)\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\xi-\tau}} \tag{30}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \tau > 0 \quad \forall \xi > \tau + 3\varepsilon.$$

Здесь $T = (\tau - i)/(\tau + i)$, $Z = (\xi - i)/(\xi + i)$ и постоянная c не зависит от τ, ξ и ε.

Доказательство. Оценка (28) является следствием неравенства (26), с учетом которого устанавливается также оценка (29) подобно соответствующей оценке леммы 3 из [10].

Для доказательства оценки (30) представим приращение функции $\tilde{n}(\xi,\tau)$ по второй переменной в виде

$$\tilde{n}(\xi,\tau+\varepsilon) - \tilde{n}(\xi,\tau) =$$

$$= \frac{2\xi}{\pi}\int\limits_{\tau+\varepsilon}^{\tau+2\varepsilon}\frac{s(n(s,\tau+\varepsilon)-n(\xi,\tau+\varepsilon))}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-(\tau+\varepsilon)^2}}ds - \frac{2\xi}{\pi}\int\limits_{\tau}^{\tau+2\varepsilon}\frac{s(n(s,\tau)-n(\xi,\tau))}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}ds +$$

$$+ \frac{2\xi}{\pi}\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi}\frac{s(n(s,\tau+\varepsilon)-n(\xi,\tau+\varepsilon))}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-(\tau+\varepsilon)^2}}ds - \frac{2\xi}{\pi}\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi}\frac{s(n(s,\tau)-n(\xi,\tau))}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}ds +$$

$$+ \frac{2\xi}{\pi}\int\limits_{\tau+2\varepsilon}^{\xi-\varepsilon}\frac{s(n(s,\tau+\varepsilon)-n(\xi,\tau+\varepsilon))}{(\xi^2-s^2)^{3/2}}\left(\frac{1}{\sqrt{s^2-(\tau+\varepsilon)^2}}-\frac{1}{\sqrt{s^2-\tau^2}}\right)ds +$$

$$+ \frac{2\xi}{\pi}\int\limits_{\tau+2\varepsilon}^{\xi-\varepsilon}\frac{s(n(s,\tau+\varepsilon)-n(s,\tau))}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}ds -$$

$$- \frac{2\xi(n(\xi,\tau+\varepsilon)-n(\xi,\tau))}{\pi}\int\limits_{\tau+2\varepsilon}^{\xi-\varepsilon}\frac{s\,ds}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}ds \;=:\; \sum_{j=1}^{7} I_j.$$

Учитывая оценку (26), получаем

$$|I_1| \le c\frac{\omega(\sigma'_\pm,|T-Z|)}{|T-Z|}\rho_{T,Z}\,\xi\int\limits_{\tau+\varepsilon}^{\tau+2\varepsilon}\frac{s}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-(\tau+\varepsilon)^2}}\frac{(\xi-s)\,ds}{(\xi+1)(s+1)} \le$$

$$\le c\frac{\omega(\sigma'_\pm,|T-Z|)}{|T-Z|}\rho_{T,Z}\frac{\sqrt{\tau}}{(\xi+1)(\tau+1)\sqrt{\xi}}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\xi-\tau}} \le$$

$$\le c\frac{\omega(\sigma'_\pm,|T-Z|)}{|T-Z|}\frac{\sqrt{\xi\tau}}{(\xi^2+1)(\tau^2+1)}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\xi-\tau}}.$$

Здесь, как и всюду в доказательстве, через c обозначены постоянные, значения которых не зависят от τ, ξ и ε, но, вообще говоря, различны даже в пределах одной цепочки неравенств.

Аналогично оцениваются интегралы I_2, I_3, I_4 и I_5. При оценке интеграла I_7 с учетом неравенства (27) получаем

$$|I_7| \le c\left(\frac{\omega(\sigma'_\pm,|T-Z|)}{|T-Z|}\rho_{T,Z}+1\right)\frac{\varepsilon\xi}{\tau^2+1}\int\limits_{\tau+2\varepsilon}^{\xi-\varepsilon}\frac{s\,ds}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}} \le$$

$$\le c\left(\frac{\omega(\sigma'_\pm,|T-Z|)}{|T-Z|}\rho_{T,Z}+1\right)\frac{1}{\tau^2+1}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\xi-\tau}} \le$$

$$\le c\left(\frac{\omega(\sigma'_\pm,|T-Z|)}{|T-Z|}\frac{\xi}{(\xi+1)(\tau^3+1)}+\frac{1}{\tau^2+1}\right)\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\xi-\tau}}.$$

Наконец, при оценке интеграла I_6, используя неравенство (27) и обозначая при этом $S := (s-i)/(s+i)$, получаем

$$|I_6| \le c\frac{\varepsilon\xi}{\tau^2+1}\int\limits_{\tau+2\varepsilon}^{\xi-\varepsilon}\left(\frac{\omega(\sigma'_\pm,|T-S|)}{|T-S|}\rho_{T,S}+1\right)\frac{s\,ds}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}} \le$$

$$\le c\frac{\varepsilon\xi}{\tau^2+1}\left(\int\limits_{\tau+2\varepsilon}^{\xi-\varepsilon}\frac{\omega(\sigma'_{\pm},|T-S|)}{|T-S|}\frac{s}{(s+1)(\tau+1)}\frac{s\,ds}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\tau+2\varepsilon}^{\xi-\varepsilon}\frac{s\,ds}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}\right)\le$$

$$\le c\left(\frac{\varepsilon\xi}{\tau^2+1}\omega(\sigma'_{\pm},|T-Z|)\int\limits_{\tau+2\varepsilon}^{\xi-\varepsilon}\frac{s^2}{(\xi+s)^{3/2}\sqrt{s+\tau}}\frac{ds}{(\xi-s)^{3/2}(s-\tau)^{3/2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\tau^2+1}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\xi-\tau}}\right)\le c\left(\frac{\xi\sqrt{\varepsilon}}{\tau^2+1}\frac{\omega(\sigma'_{\pm},|T-Z|)}{(\xi-\tau)^{3/2}}+\frac{1}{\tau^2+1}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\xi-\tau}}\right)\le$$

$$\le c\left(\frac{\omega(\sigma'_{\pm},|T-Z|)}{|T-Z|}\frac{\xi}{(\xi+1)(\tau^3+1)}+\frac{1}{\tau^2+1}\right)\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\xi-\tau}}.$$

Следствием полученных оценок является оценка (30).

Лемма доказана.

Введем в рассмотрение функцию $\Pi(\xi) := |\xi|^{\beta_0}(|\xi|+1)^{\beta_\infty-\beta_0}$, где $\beta_0\in\in(0;1)$, $\beta_\infty\in(0;1/2)$. Очевидно, что для функции $\Pi(\xi)$ выполняются соотношения

$$c_1|\xi|^{\beta_0}\le\Pi(\xi)\le c_2|\xi|^{\beta_0}\quad\forall\xi\in\mathbb{R}:0<|\xi|\le1, \tag{31}$$

$$c_1|\xi|^{\beta_\infty}\le\Pi(\xi)\le c_2|\xi|^{\beta_\infty}\quad\forall\xi\in\mathbb{R}:|\xi|\ge1, \tag{32}$$

в которых c_1 и c_2 — некоторые абсолютные постоянные.

Условимся, что всюду в доказательстве следующих лемм 2, 3 через c обозначены постоянные, значения которых не зависят от ξ и ε, но, вообще говоря, различны даже в пределах одной цепочки неравенств.

Лемма 2. *Пусть конформное отображение $\sigma_\pm(Z)$ на границе единичного круга имеет непрерывную контурную производную, модуль непрерывности которой удовлетворяет условию*

$$\int\limits_0^1\frac{\omega(\sigma'_{\pm},\eta)}{\eta}d\eta<\infty,$$

а для функции $\tilde{n}(\xi,\tau)$ выполняются оценки (28), (29). *Тогда справедливы также оценки*

$$\int\limits_0^\xi\frac{|\tilde{n}(\xi,\tau)|}{\Pi(\tau)}d\tau\le c\frac{1}{\xi\Pi(\xi)}\frac{1}{\xi^{1/2-\beta_\infty}}\int\limits_0^2\frac{\omega(\sigma'_{\pm},\eta)}{\eta\left(\xi^{\beta_\infty-1/2}+\eta^{1/2-\beta_\infty}\right)}d\eta\quad\forall\xi\ge1, \tag{33}$$

$$\int\limits_0^\xi\frac{|\tilde{n}(\xi,\tau)|}{\Pi(\tau)}d\tau\le c\frac{\xi}{\Pi(\xi)}\int\limits_0^\varepsilon\frac{\omega(\sigma'_{\pm},\eta)}{\eta}d\eta\quad\forall\xi\in(0;1], \tag{34}$$

$$\left|\int\limits_0^{\xi+\varepsilon}\frac{|\tilde{n}(\xi+\varepsilon,\tau)|}{\Pi(\tau)}d\tau-\int\limits_0^\xi\frac{|\tilde{n}(\xi,\tau)|}{\Pi(\tau)}d\tau\right|\le$$

$$\le c\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\varepsilon_1^{1/2-\beta_\infty}\int\limits_0^2\frac{\omega(\sigma'_{\pm},\eta)}{\eta\left(\varepsilon_1^{1/2-\beta_\infty}+\eta^{1/2-\beta_\infty}\right)}d\eta\quad\forall\xi>4\varepsilon>0, \tag{35}$$

где $\varepsilon_1 := \varepsilon/(\xi^2+1)$ *и постоянная* c *не зависит от* ξ *и* ε.

Доказательство. Следствием оценки (28) является неравенство

$$\int_0^{\xi} \frac{|\tilde{n}(\xi,\tau)|}{\Pi(\tau)} d\tau \le c\frac{\xi}{(\xi+1)^{5/2}} \int_0^{\xi} \frac{\omega(\sigma'_{\pm}, |T-Z|)}{|T-Z|} \frac{d\tau}{\Pi(\tau)(\tau+1)^{3/2}} =: I_8.$$

Далее при $\xi \ge 1$ с учетом неравенств (31), (32) получаем соотношения

$$I_8 \le c\left(\frac{1}{\xi^{3/2}} \int_0^{1/2} \frac{\omega(\sigma'_{\pm}, |T-Z|)}{|T-Z|} \frac{d\tau}{\tau^{\beta_0}} + \frac{1}{\xi^{3/2}} \int_{1/2}^{\xi/2} \frac{\omega(\sigma'_{\pm}, |T-Z|)}{|T-Z|} \frac{\tau^{1/2-\beta_\infty} d\tau}{\tau^2+1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\xi^{1+\beta_\infty}} \int_{\xi/2}^{\xi} \frac{\omega(\sigma'_{\pm}, |T-Z|)}{|T-Z|} \frac{d\tau}{\tau^2+1} \right) \le c\left(\frac{1}{\xi^{3/2}} + \frac{1}{\xi^{3/2}} \int_{\xi/(\xi^2+4)}^{2} \frac{\omega(\sigma'_{\pm}, \eta)}{\eta^{3/2-\beta_\infty}} d\eta + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\xi^{1+\beta_\infty}} \int_0^{\xi/(\xi^2+1)} \frac{\omega(\sigma'_{\pm}, \eta)}{\eta} d\eta \right) \le c\frac{1}{\xi\Pi(\xi)} \frac{1}{\xi^{1/2-\beta_\infty}} \int_0^2 \frac{\omega(\sigma'_{\pm}, \eta)}{\eta\left(\xi^{\beta_\infty-1/2} + \eta^{1/2-\beta_\infty}\right)} d\eta$$

и оценка (33) доказана. Аналогично доказывается неравенство (34).

Для получения оценки (35) используем неравенство

$$\left| \int_0^{\xi+\varepsilon} \frac{|\tilde{n}(\xi+\varepsilon,\tau)|}{\Pi(\tau)} d\tau - \int_0^{\xi} \frac{|\tilde{n}(\xi,\tau)|}{\Pi(\tau)} d\tau \right| \le \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \frac{|\tilde{n}(\xi,\tau)|}{\Pi(\tau)} d\tau + \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \frac{|\tilde{n}(\xi+\varepsilon,\tau)|}{\Pi(\tau)} d\tau +$$

$$+ \int_0^{\xi-\varepsilon} \frac{|\tilde{n}(\xi+\varepsilon,\tau) - \tilde{n}(\xi,\tau)|}{\Pi(\tau)} d\tau := I_9 + I_{10} + I_{11}.$$

Теперь с учетом неравенств (28), (31) и (32) оцениваем I_9:

$$I_9 \le c\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)} \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \frac{\omega(\sigma'_{\pm}, |T-Z|)}{|T-Z|} \frac{d\tau}{(\tau^2+1)} \le c\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)} \int_0^{2\varepsilon_1} \frac{\omega(\sigma'_{\pm}, \eta)}{\eta} d\eta \le$$

$$\le c\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)} \varepsilon_1^{1/2-\beta_\infty} \int_0^2 \frac{\omega(\sigma'_{\pm}, \eta)}{\eta\left(\varepsilon_1^{1/2-\beta_\infty} + \eta^{1/2-\beta_\infty}\right)} d\eta.$$

Аналогично оценивается интеграл I_{10}.

При оценивании интеграла I_{11}, используя неравенство (29), получаем

$$I_{11} \le c\frac{\xi\sqrt{\varepsilon}}{(\xi^2+1)^{5/2}} \int_0^{\xi-\varepsilon} \frac{\omega(\sigma'_{\pm}, |T-Z|)}{|T-Z|} \frac{d\tau}{\sqrt{\xi-\tau}\,\Pi(\tau)(\tau+1)^{3/2}}.$$

Далее из этого неравенства при $\xi \ge 1$ с учетом неравенств (31), (32) получае[м] соотношения

$$I_{11} \le c\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\xi^2}\left(\int_0^{1/2} \frac{\omega(\sigma'_{\pm}, |T-Z|)}{|T-Z|} \frac{d\tau}{\tau^{\beta_0}} + \right.$$

$$+ \int_{1/2}^{\xi/2} \frac{\omega(\sigma'_{\pm}, |T-Z|)}{|T-Z|} \sqrt{\frac{(\xi+1)(\tau+1)}{\xi-\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{\beta_\infty}(\tau^2+1)} +$$

$$+\frac{1}{\xi^{\beta_\infty}}\int\limits_{\xi/2}^{\xi-\varepsilon}\frac{\omega(\sigma'_\pm,|T-Z|)}{|T-Z|}\sqrt{\frac{(\xi+1)(\tau+1)}{\xi-\tau}}\frac{d\tau}{\tau^2+1^2}\Bigg)\le$$

$$\le c\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\xi^2}\left(1+\int\limits_{\xi/(\xi^2+4)}^{2}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\xi^{3/2-\beta_\infty}}d\eta+\frac{1}{\xi^{\beta_\infty}}\int\limits_{\varepsilon_1}^{\xi/(\xi^2+1)}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta^{3/2}}d\eta\right)\le$$

$$\le c\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\varepsilon_1^{1/2-\beta_\infty}\int\limits_0^2\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta\left(\varepsilon_1^{1/2-\beta_\infty}+\eta^{1/2-\beta_\infty}\right)}d\eta.$$

При $\xi\in(0;1]$ интеграл I_{11} оценивается аналогично.

Таким образом, оценка (35) установлена.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть конформное отображение* $\sigma_\pm(Z)$ *на границе единичного круга имеет непрерывную контурную производную, модуль непрерывности которой удовлетворяет условию*

$$\int\limits_0^1\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}\ln\frac{1}{\eta}d\eta<\infty,$$

а для функции $\tilde n(\xi,\tau)$ *выполняются оценки* (28) – (30). *Тогда для функции*

$$n_f(\xi,\tau)=\int\limits_0^\xi\frac{\tilde n(\xi,s)}{s-\tau}ds,$$

в свою очередь, справедливы оценки

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|n_f(\xi,\tau)\right|}{\Pi(\tau)}d\tau\le$$

$$\le\frac{c}{\xi\Pi(\xi)}\frac{\ln(\xi+1)}{\xi^{1/2-\beta_\infty}}\int\limits_0^2\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}\frac{\ln(3/\eta)}{\xi^{\beta_\infty-1/2}\ln(\xi+1)+\eta^{1/2-\beta_\infty}\ln(3/\eta)}d\eta\quad\forall\xi\ge1,\tag{36}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|n_f(\xi,\tau)\right|}{\Pi(\tau)}d\tau\le c\frac{\xi}{\Pi(\xi)}\int\limits_0^\xi\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}\ln\frac{3}{\eta}d\eta\quad\forall\xi\in(0;1],\tag{37}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|n_f(\xi+\varepsilon,\tau)-n_f(\xi,\tau)\right|}{\Pi(\tau)}d\tau\le$$

$$\le c\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\varepsilon_1^{1/2-\beta_\infty}\ln\frac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_0^2\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}\frac{\ln(3/\eta)}{\varepsilon_1^{1/2-\beta_\infty}\ln(1/\varepsilon_1)+\eta^{1/2-\beta_\infty}\ln(3/\eta)}d\eta,\tag{38}$$

$$\varepsilon_1:=\frac{\varepsilon}{\xi^2+1},\qquad\forall\xi>4\varepsilon>0,$$

где постоянная c *не зависит от* ξ *и* ε.

Доказательство. Для доказательства неравенства (36) используем равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|n_f(\xi,\tau)|}{\Pi(\tau)}d\tau = \left(\int_{-\infty}^{-\xi}+\int_{2\xi}^{\infty}\right)\frac{|n_f(\xi,\tau)|}{\Pi(\tau)}d\tau + \int_{-\xi}^{0}\frac{|n_f(\xi,\tau)|}{\Pi(\tau)}d\tau +$$

$$+\int_{\xi}^{2\xi}\frac{|n_f(\xi,\tau)|}{\Pi(\tau)}d\tau + \int_{\xi/2}^{\xi}\frac{|n_f(\xi,\tau)|}{\Pi(\tau)}d\tau + \int_{0}^{\xi/2}\frac{|n_f(\xi,\tau)|}{\Pi(\tau)}d\tau =: \sum_{j=12}^{16} I_j \qquad (39)$$

и оценим интегралы $I_{12}, I_{13}, \ldots, I_{16}$ при любом $\xi \geq 1$.

С учетом оценки (28) получаем соотношения

$$I_{12} \leq c\left(\int_{-\infty}^{-\xi}+\int_{2\xi}^{\infty}\right)\frac{d\tau}{\Pi(\tau)\tau}\int_0^s |\tilde{n}(\xi,s)|ds \leq$$

$$\leq c\frac{1}{\Pi(\xi)\xi^{3/2}}\left(\int_0^{\xi/2}+\int_{\xi/2}^{\xi}\right)\frac{\omega(\sigma'_{\pm},|S-Z|)}{|S-Z|}\frac{ds}{(s+1)^{3/2}},$$

где $S := (s-i)/(s+i)$.

Далее аналогично оценке интеграла I_8 получаем

$$I_{12} \leq c\frac{1}{\xi\Pi(\xi)}\left(\frac{1}{\sqrt{\xi}}\int_{\xi/(\xi^2+4)}^{2}\frac{\omega(\sigma'_{\pm},\eta)}{\eta^{3/2}}d\eta + \int_0^{\xi/(\xi^2+1)}\frac{\omega(\sigma'_{\pm},\eta)}{\eta}d\eta\right) \leq$$

$$\leq c\frac{1}{\xi\Pi(\xi)}\frac{\ln(\xi+1)}{\xi^{1/2-\beta_\infty}}\int_0^2\frac{\omega(\sigma'_{\pm},\eta)}{\eta}\frac{\ln(3/\eta)}{\xi^{\beta_\infty-1/2}\ln(\xi+1)+\eta^{1/2-\beta_\infty}\ln(3/\eta)}d\eta.$$

С учетом теоремы Фубини и оценок (28), (31) и (32) имеем

$$I_{13} = \int_0^{\xi}\frac{|n_f(\xi,-\tau)|}{\Pi(\tau)}d\tau = \int_0^{\xi}|\tilde{n}(\xi,s)|\int_0^{\xi}\frac{d\tau}{\Pi(\tau)(\tau+s)}ds \leq$$

$$\leq \frac{c}{\xi^{3/2}}\left(\int_0^1\frac{\omega(\sigma'_{\pm},|S-Z|)}{|S-Z|}\left(\int_0^s\frac{d\tau}{s\tau^{\beta_0}}+\int_s^1\frac{d\tau}{\tau^{1+\beta_0}}+\int_1^{\xi}\frac{d\tau}{\tau^{1+\beta_\infty}}\right)\frac{ds}{(s+1)^{3/2}}+\right.$$

$$\left.+\int_1^{\xi}\frac{\omega(\sigma'_{\pm},|S-Z|)}{|S-Z|}\left(\int_0^1\frac{d\tau}{s\tau^{\beta_0}}+\int_1^s\frac{d\tau}{s\tau^{\beta_\infty}}+\int_s^{\xi}\frac{d\tau}{\tau^{1+\beta_\infty}}\right)\frac{ds}{(s+1)^{3/2}}\right) \leq$$

$$\leq \frac{c}{\xi^{3/2}}\left(\int_0^1\frac{\omega(\sigma'_{\pm},|S-Z|)}{|S-Z|}\frac{ds}{s^{\beta_0}}+\left(\int_1^{\xi/2}+\int_{\xi/2}^{\xi}\right)\frac{\omega(\sigma'_{\pm},|S-Z|)}{|S-Z|}\frac{s^{1/2-\beta_\infty}ds}{s^2+1}\right).$$

Далее I_{13} оценивается подобно интегралу I_8.

Аналогично с учетом теоремы Фубини и оценок (28), (32) получаем соотношения

$$I_{14} \leq \frac{c}{\Pi(\xi)}\int_0^{\xi}|\tilde{n}(\xi,s)|\int_{\xi}^{2\xi}\frac{d\tau}{\tau-s}ds \leq \frac{c}{\Pi(\xi)}\left(\int_0^{\xi/2}+\int_{\xi/2}^{\xi}\right)|\tilde{n}(\xi,s)|\ln\frac{2\xi}{\xi-s}ds \leq$$

$$\leq c\frac{1}{\xi\Pi(\xi)}\left(\frac{1}{\sqrt{\xi}}\int_{\xi/(\xi^2+4)}^{2}\frac{\omega(\sigma'_{\pm},\eta)}{\xi^{3/2}}d\eta + \int_0^{\xi/(\xi^2+1)}\frac{\omega(\sigma'_{\pm},\eta)}{\eta}\ln\frac{1}{\eta}d\eta\right) \leq$$

$$\leq c\frac{1}{\xi\Pi(\xi)}\frac{\ln(\xi+1)}{\xi^{1/2-\beta_\infty}}\int\limits_0^2\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}\frac{\ln(3/\eta)}{\xi^{\beta_\infty-1/2}\ln(\xi+1)+\eta^{1/2-\beta_\infty}\ln(3/\eta)}d\eta.$$

Введем теперь в рассмотрение множества $e_1:=[\tau-\delta_1,\tau+\delta_1]$, $e_2:=[\xi/4,\tau-\delta_1]\cup[\tau+\delta_1,\tau+(\xi-\tau)/2]$, $e_3:=[\tau+(\xi-\tau)/2,\xi]$, где $\delta_1=(\xi-\tau)/(2\xi)$, и оценим I_{15} суммой четырех интегралов:

$$I_{15}\leq\int\limits_{\xi/2}^{\xi}\int\limits_{e_1}\frac{|\tilde{n}(\xi,s)-\tilde{n}(\xi,\tau)|}{|s-\tau|}ds\frac{d\tau}{\Pi(\tau)}+\int\limits_{\xi/2}^{\xi}\int\limits_{e_2}\frac{|\tilde{n}(\xi,s|}{|s-\tau|}ds\frac{d\tau}{\Pi(\tau)}+$$

$$+\int\limits_{\xi/2}^{\xi}\int\limits_{e_3}\frac{|\tilde{n}(\xi,s)|}{|s-\tau|}ds\frac{d\tau}{\Pi(\tau)}+\int\limits_{\xi/2}^{\xi}\int\limits_0^{\xi/4}\frac{|\tilde{n}(\xi,s|}{|s-\tau|}ds\frac{d\tau}{\Pi(\tau)}=:I_{15}^1+I_{15}^2+I_{15}^3+I_{15}^4. \quad (40)$$

Далее с учетом неравенств (30), (32) получаем оценку интеграла I_{15}^1:

$$I_{15}^1\leq\frac{c}{\Pi(\xi)}\int\limits_{\xi/2}^{\xi}\left(\frac{\omega(\sigma'_\pm,|T-Z|)}{|T-Z|}\frac{1}{\tau^3+1}+\frac{1}{\tau^2+1}\right)\int\limits_{e_1}\frac{ds}{\sqrt{|s-\tau|}}\frac{d\tau}{\sqrt{\xi-\tau}}\leq$$

$$\leq c\frac{1}{\Pi(\xi)\sqrt{\xi}}\left(\frac{1}{\xi}\int\limits_0^{\xi/(\xi^2+1)}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}d\eta+\int\limits_{\xi/2}^{\xi}\frac{d\tau}{\tau^2+1}\right)\leq c\frac{1}{\xi\Pi(\xi)}\frac{1}{\sqrt{\xi}}$$

и, используя неравенства (28), (32) и свойства модуля непрерывности (см., например, [16]), оцениваем интегралы I_{15}^2, I_{15}^3, I_{15}^4:

$$I_{15}^2\leq\frac{c}{\Pi(\xi)(\xi+1)^{3/2}}\int\limits_{\xi/2}^{\xi}\int\limits_{e_2}\frac{\omega(\sigma'_\pm,|S-Z|)}{|S-Z|}\frac{ds}{|s-\tau|(s+1)^{3/2}}d\tau\leq$$

$$\leq\frac{c}{\Pi(\xi)(\xi+1)^3}\int\limits_{\xi/2}^{\xi}\frac{\omega(\sigma'_\pm,|T-Z|)}{|T-Z|}\int\limits_{e_2}\frac{ds}{|s-\tau|}d\tau\leq$$

$$\leq\frac{c}{\xi\Pi(\xi)}\int\limits_{\xi/2}^{\xi}\frac{\omega(\sigma'_\pm,|T-Z|)}{|T-Z|}\ln\frac{2\xi^2}{\xi-\tau}\frac{d\tau}{\tau^2+1}\leq\frac{c}{\xi\Pi(\xi)}\int\limits_0^{\xi/(\xi^2+1)}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}\ln\frac{1}{\eta}d\eta,$$

$$I_{15}^3\leq\frac{c}{\Pi(\xi)(\xi+1)}\int\limits_{\xi/2}^{\xi}\int\limits_{e_3}\frac{\omega(\sigma'_\pm,|S-Z|)}{|S-Z|}\frac{ds}{s^2+1}\frac{d\tau}{\xi-\tau}\leq$$

$$\leq\frac{c}{\xi\Pi(\xi)}\int\limits_0^{\xi/(\xi^2+1)}\int\limits_0^{\eta_1}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}d\eta\frac{d\eta_1}{\eta_1}=\frac{c}{\xi\Pi(\xi)}\int\limits_0^{\xi/(\xi^2+1)}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}\int\limits_\eta^{\xi/(\xi^2+1)}\frac{d\eta_1}{\eta_1}d\eta\leq$$

$$\leq\frac{c}{\xi\Pi(\xi)}\int\limits_0^{\xi/(\xi^2+1)}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}\ln\frac{1}{\eta}d\eta,$$

$$I_{15}^4\leq\frac{c}{\Pi(\xi)(\xi+1)^{3/2}\xi}\int\limits_{\xi/2}^{\xi}d\tau\int\limits_0^{\xi/4}\frac{\omega(\sigma'_\pm,|S-Z|)}{|S-Z|}\frac{\sqrt{s}\,ds}{s^2+1}\leq$$

$$\leq\frac{c}{\xi\Pi(\xi)}\frac{1}{\sqrt{\xi}}\int\limits_{\xi/(\xi^2+4)}^{2}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta^{3/2}}d\eta.$$

Таким образом, при любом $\xi \geq 1$ справедливы соотношения

$$I_{15} \leq \frac{c}{\xi\Pi(\xi)}\left(\int\limits_0^{\xi/(\xi^2+1)} \frac{\omega(\sigma'_{\pm}, \eta)}{\eta}\ln\frac{1}{\eta}d\eta + \frac{1}{\sqrt{\xi}}\int\limits_{\xi/(\xi^2+4)}^{2} \frac{\omega(\sigma'_{\pm}, \eta)}{\eta^{3/2}}d\eta\right) \leq$$

$$\leq c\frac{1}{\xi\Pi(\xi)}\frac{\ln(\xi+1)}{\xi^{1/2-\beta_\infty}}\int\limits_0^2 \frac{\omega(\sigma'_{\pm}, \eta)}{\eta}\frac{\ln(3/\eta)}{\xi^{\beta_\infty-1/2}\ln(\xi+1)+\eta^{1/2-\beta_\infty}\ln(3/\eta)}d\eta.$$

Наконец, введем в рассмотрение множества $e'_1 := [\tau-\delta_2, \tau+\delta_2]$, $e'_2 := [0, \tau-\delta_2]$, $e'_3 := [\tau+\delta_2, 3\xi/4]$, где $\delta_2 = \tau^3/\xi^3$, и оценим I_{16} суммой четырех интегралов:

$$I_{16} \leq \int\limits_0^{\xi/2}\int\limits_{e'_1} \frac{|\tilde{n}(\xi, s)-\tilde{n}(\xi, \tau)|}{|s-\tau|}ds\frac{d\tau}{\Pi(\tau)} + \int\limits_0^{\xi/2}\int\limits_{e'_2} \frac{|\tilde{n}(\xi, s)|}{|s-\tau|}ds\frac{d\tau}{\Pi(\tau)} +$$

$$+ \int\limits_0^{\xi/2}\int\limits_{e'_3} \frac{|\tilde{n}(\xi, s)|}{s-\tau}ds\frac{d\tau}{\Pi(\tau)} + \int\limits_0^{\xi/2}\int\limits_{3\xi/4}^{\xi} \frac{|\tilde{n}(\xi, s)|}{s-\tau}ds\frac{d\tau}{\Pi(\tau)} =: I^1_{16} + I^2_{16} + I^3_{16} + I^4_{16}. \quad (41)$$

Теперь с учетом неравенств (30) – (32) получаем оценку интеграла I^1_{16}:

$$I^1_{16} \leq c\int\limits_0^{\xi/2}\left(\frac{\omega(\sigma'_{\pm}, |T-Z|)}{|T-Z|}\frac{1}{\tau^3+1} + \frac{1}{\tau^2+1}\right)\int\limits_{e'_1} \frac{ds}{\sqrt{|s-\tau|}}\frac{d\tau}{\Pi(\tau)\sqrt{\xi-\tau}} \leq$$

$$\leq \frac{c}{\xi^2}\left(\int\limits_0^{1/2} + \int\limits_{1/2}^{\xi/2}\right)\left(\frac{\omega(\sigma'_{\pm}, |T-Z|)}{|T-Z|}\frac{1}{\tau^3+1} + \frac{1}{\tau^2+1}\right)\frac{\tau^{3/2}\,d\tau}{\Pi(\tau)} \leq$$

$$\leq \frac{c}{\xi^2}\left(\int\limits_0^{1/2}\tau^{3/2-\beta_0}\,d\tau + \int\limits_{\xi/(\xi^2+4)}^{2}\frac{\omega(\sigma'_{\pm}, \eta)}{\eta^{3/2-\beta_\infty}}d\eta + \int\limits_{1/2}^{\xi/2}\tau^{-1/2-\beta_\infty}\,d\tau\right) \leq$$

$$\leq c\frac{1}{\xi\Pi(\xi)}\frac{1}{\sqrt{\xi}}.$$

С учетом неравенств (28), (31), (32) и свойств модуля непрерывности (см., например, [16]) оцениваем интегралы I^2_{16}, I^4_{16}:

$$I^2_{16} \leq \frac{c}{(\xi+1)^{3/2}}\left(\int\limits_0^{1/2}\int\limits_{e'_2}\frac{\omega(\sigma'_{\pm}, |S-Z|)}{|S-Z|}\frac{ds}{(\tau-s)(s+1)^{3/2}}\frac{d\tau}{\Pi(\tau)} +\right.$$

$$\left.+ \int\limits_{1/2}^{\xi/2}\left(\int\limits_0^{\tau/2} + \int\limits_{\tau/2}^{\tau-\delta_2}\right)\frac{\omega(\sigma'_{\pm}, |S-Z|)}{|S-Z|}\frac{ds}{(\tau-s)(s+1)^{3/2}}\frac{d\tau}{\Pi(\tau)}\right) \leq$$

$$\leq \frac{c}{\xi^{3/2}}\left(\int\limits_0^{1/2}\frac{\omega(\sigma'_{\pm}, |T-Z|)}{|T-Z|}\int\limits_{e'_2}\frac{ds}{\tau-s}\frac{d\tau}{\Pi(\tau)} + \int\limits_{1/2}^{\xi/2}\int\limits_0^{\tau/2}\frac{\omega(\sigma'_{\pm}, |S-Z|)}{|S-Z|}\frac{\sqrt{s+1}\,ds}{s^2+1}\frac{d\tau}{\tau\Pi(\tau)} +\right.$$

$$\left.+ \int\limits_{1/2}^{\xi/2}\frac{\omega(\sigma'_{\pm}, |T-Z|)}{|T-Z|}\int\limits_{\tau/2}^{\tau-\delta_2}\frac{ds}{\tau-s}\frac{d\tau}{\Pi(\tau)(\tau+1)^{3/2}}\right) \leq$$

$$\leq \frac{c}{\xi^{3/2}}\left(\int_0^{1/2} \ln\frac{\xi^3}{\tau^2}\frac{d\tau}{\tau^{\beta_0}} + \int_{1/\xi}^{2}\int_{\tau_1}^{2} \frac{\omega(\sigma'_{\pm},\eta)}{\eta^{3/2}}d\eta\frac{d\tau_1}{\tau_1^{1-\beta_\infty}} + \right.$$

$$\left. + \int_{1/2}^{\xi/2} \frac{\omega(\sigma'_{\pm},|T-Z|)}{|T-Z|}\ln\frac{\xi^3}{\tau^2}\frac{\tau^{1/2-\beta_\infty}d\tau}{\tau^2+1}\right) \leq$$

$$\leq \frac{c}{\xi^{3/2}}\left(\ln(\xi+1) + \int_{1/\xi}^{2} \frac{\omega(\sigma'_{\pm},\eta)}{\eta^{3/2}}\int_{1/\xi}^{\eta}\frac{d\tau_1}{\tau_1^{1-\beta_\infty}}d\eta + \right.$$

$$\left. + \ln(\xi+1)\int_{1/\xi}^{2} \frac{\omega(\sigma'_{\pm},\eta)}{\eta^{3/2-\beta_\infty}}d\eta\right) \leq c\frac{1}{\xi\Pi(\xi)}\frac{\ln(\xi+1)}{\xi^{1/2-\beta_\infty}}\int_{1/\xi}^{2}\frac{\omega(\sigma'_{\pm},\eta)}{\eta^{3/2-\beta_\infty}}d\eta,$$

$$I_{16}^4 \leq \frac{c}{(\xi+1)\xi}\int_0^{\xi/2}\frac{d\tau}{\Pi(\tau)}\int_{3\xi/4}^{\xi}\frac{\omega(\sigma'_{\pm},|S-Z|)}{|S-Z|}\frac{ds}{s^2+1} \leq \frac{c}{\xi\Pi(\xi)}\int_0^{1/\xi}\frac{\omega(\sigma'_{\pm},\eta)}{\eta}d\eta,$$

и, используя дополнительно теорему Фубини, оцениваем интеграл I_{16}^3:

$$I_{16}^3 \leq \frac{c}{(\xi+1)^{3/2}}\int_0^{\xi/2}\left(\int_{\tau+\delta_2}^{3\tau/2} + \int_{3\tau/2}^{3\xi/4}\right)\frac{\omega(\sigma'_{\pm},|S-Z|)}{|S-Z|}\frac{ds}{(s-\tau)(s+1)^{3/2}}\frac{d\tau}{\Pi(\tau)} \leq$$

$$\leq \frac{c}{\xi^{3/2}}\left(\int_0^{\xi/2}\frac{\omega(\sigma'_{\pm},|T-Z|)}{|T-Z|}\int_{\tau+\delta_2}^{3\tau/2}\frac{ds}{s-\tau}\frac{d\tau}{\Pi(\tau)(\tau+1)^{3/2}} + \right.$$

$$\left. + \int_0^{3\xi/4}\frac{\omega(\sigma'_{\pm},|S-Z|)}{|S-Z|}\int_0^{2s/3}\frac{d\tau}{\Pi(\tau)(s-\tau)}\frac{ds}{(s+1)^{3/2}}\right) \leq$$

$$\leq \frac{c}{\xi^{3/2}}\left(\left(\int_0^{1/2} + \int_{1/2}^{\xi/2}\right)\frac{\omega(\sigma'_{\pm},|T-Z|)}{|T-Z|}\ln\frac{\xi^3}{\tau^2}\frac{d\tau}{\Pi(\tau)(\tau+1)^{3/2}} + \right.$$

$$\left. + \left(\int_0^{3/4} + \int_{3/4}^{3\xi/4}\right)\frac{\omega(\sigma'_{\pm},|S-Z|)}{|S-Z|}\int_0^{2s/3}\frac{d\tau}{\Pi(\tau)}\frac{ds}{s(s+1)^{3/2}}\right) \leq$$

$$\leq c\frac{\ln(\xi+1)}{\xi^{3/2}}\int_{1/\xi}^{2}\frac{\omega(\sigma'_{\pm},\eta)}{\eta^{3/2-\beta_\infty}}d\eta = \frac{c}{\xi\Pi(\xi)}\frac{\ln(\xi+1)}{\xi^{1/2-\beta_\infty}}\int_{1/\xi}^{2}\frac{\omega(\sigma'_{\pm},\eta)}{\eta^{3/2-\beta_\infty}}d\eta.$$

Таким образом, при любом $\xi \geq 1$ справедливы соотношения

$$I_{16} \leq \frac{c}{\xi\Pi(\xi)}\left(\int_0^{1/\xi}\frac{\omega(\sigma'_{\pm},\eta)}{\eta}d\eta + \frac{\ln(\xi+1)}{\xi^{1/2-\beta_\infty}}\int_{1/\xi}^{2}\frac{\omega(\sigma'_{\pm},\eta)}{\eta^{3/2-\beta_\infty}}d\eta\right) \leq$$

$$\leq c\frac{1}{\xi\Pi(\xi)}\frac{\ln(\xi+1)}{\xi^{1/2-\beta_\infty}}\int_0^{2}\frac{\omega(\sigma'_{\pm},\eta)}{\eta}\frac{\ln(3/\eta)}{\xi^{\beta_\infty-1/2}\ln(\xi+1)+\eta^{1/2-\beta_\infty}\ln(3/\eta)}d\eta.$$

Следствием полученных оценок является неравенство (36).

Для доказательства неравенства (37) оценим интегралы $I_{12}, I_{13}, \ldots, I_{16}$ из равенства (39) при любом $\xi \in (0; 1]$. При оценивании интегралов I_{15}, I_{16} используем соотношения (40), (41), в которых при определении множеств e_1, e_2, e_1', e_2', e_3' следует принять $\delta_1 = (\xi - \tau)^2$ и $\delta_2 = \tau^2$. Теперь интегралы I_{15}^j при $j = 1, 2, 3, 4$ и интегралы I_{12}, I_{14}, I_{16}^1, I_{16}^4 оцениваются аналогично тому, как это сделано при $\xi \geq 1$. Интеграл I_{13} оценивается с учетом теоремы Фубини и неравенств (28), (31):

$$I_{13} = \int_0^{\xi} |\tilde{n}(\xi, s)| \left(\int_0^{s} + \int_s^{\xi} \right) \frac{d\tau}{\Pi(\tau)(\tau + s)} ds \leq c\xi \int_0^{\xi} \frac{\omega(\sigma'_{\pm}, |S - Z|)}{|S - Z|} \frac{ds}{s^{\beta_0}} \leq$$

$$\leq c \left(\omega(\sigma'_{\pm}, \xi) \int_0^{\xi/2} \frac{ds}{s^{\beta_0}} + \xi^{1-\beta_\infty} \int_{\xi/2}^{\xi} \frac{\omega(\sigma'_{\pm}, |S - Z|)}{|S - Z|} ds \right) \leq c \frac{\xi}{\Pi(\xi)} \int_0^{\xi} \frac{\omega(\sigma'_{\pm}, \eta)}{\eta} d\eta,$$

а при оценивании интеграла I_{16}^2 с учетом неравенств (28), (31) и свойств модуля непрерывности (см., например, [16]) получаем

$$I_{16}^2 \leq c\xi \int_0^{\xi/2} \int_{e_2'} \frac{\omega(\sigma'_{\pm}, |S - Z|)}{|S - Z|} \frac{ds}{\tau - s} \frac{d\tau}{\Pi(\tau)} \leq c\xi \int_0^{\xi/2} \frac{\omega(\sigma'_{\pm}, |T - Z|)}{|T - Z|} \int_{e_2'} \frac{ds}{\tau - s} \frac{d\tau}{\Pi(\tau)} \leq$$

$$\leq c\omega(\sigma'_{\pm}, \xi) \int_0^{\xi/2} \ln \frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{\tau^{\beta_0}} \leq c \frac{\xi}{\Pi(\xi)} \omega(\sigma'_{\pm}, \xi) \ln \frac{2}{\xi}.$$

Аналогично оценивается интеграл I_{16}^3. Следствием этих оценок является неравенство (37).

Перейдем к доказательству оценки (38). С этой целью рассмотрим произвольные ξ и ε, удовлетворяющие соотношению $\xi > 4\varepsilon > 0$, и используем неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|n_f(\xi + \varepsilon, \tau) - n_f(\xi, \tau)|}{\Pi(\tau)} d\tau \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \frac{\tilde{n}(\xi, s)}{s - \tau} ds \right| \frac{d\tau}{\Pi(\tau)} +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \frac{\tilde{n}(\xi + \varepsilon, s)}{s - \tau} ds \right| \frac{d\tau}{\Pi(\tau)} + \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\xi-\varepsilon} \frac{\tilde{n}(\xi + \varepsilon, s) - \tilde{n}(\xi, s)}{s - \tau} ds \right| \frac{d\tau}{\Pi(\tau)} =:$$

$$=: I_{17} + I_{18} + I_{19}.$$

Далее оценим I_{17} суммой интегралов:

$$I_{17} \leq \left(\int_{-\infty}^{-\xi} + \int_{2\xi}^{\infty} \right) \left| \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \frac{\tilde{n}(\xi, s)}{s - \tau} ds \right| \frac{d\tau}{\Pi(\tau)} + \int_{-\xi}^{0} \left| \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \frac{\tilde{n}(\xi, s)}{s - \tau} ds \right| \frac{d\tau}{\Pi(\tau)} +$$

$$+ \int_{\xi}^{2\xi} \left| \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \frac{\tilde{n}(\xi, s)}{s - \tau} ds \right| \frac{d\tau}{\Pi(\tau)} + \int_0^{\xi-\varepsilon} \left| \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \frac{\tilde{n}(\xi, s)}{s - \tau} ds \right| \frac{d\tau}{\Pi(\tau)} + \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \left| \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \frac{\tilde{n}(\xi, s)}{s - \tau} ds \right| \frac{d\tau}{\Pi(\tau)} =:$$

$$=: \sum_{j=1}^{5} I_{17}^j.$$

Оценивая теперь интегралы I_{17}^1, I_{17}^2, I_{17}^3 по аналогии с оценками интегралов I_{12}, I_{13}, I_{14} соответственно, получаем

$$I_{17}^1 + I_{17}^2 + I_{17}^3 \le c\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\int\limits_0^{2\varepsilon_1}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}\ln\frac{1}{\eta}d\eta.$$

Также подобно интегралу I_{14} оценивается I_{17}^4:

$$I_{17}^4 \le c\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\int\limits_0^{2\varepsilon_1}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}\ln\frac{1}{\eta}d\eta.$$

Оценим интеграл I_{17}^5 сначала при $\xi \ge 1$. В этом случае введем в рассмотрение множества $\tilde{e}_1 := [\tau-\delta_3, \tau+\delta_3]$, $\tilde{e}_2 := [\tau-\xi\delta_3, \tau-\delta_3] \cup [\tau+\delta_3, \tau+\xi\delta_3]$, $\tilde{e}_3 := [\xi-\varepsilon, \tau-\xi\delta_3] \cup [\tau+\xi\delta_3, \xi]$, где $\delta_3 = \min\{(\xi-\tau)/(2\xi), (\tau-(\xi-\varepsilon))/(2\xi)\}$, и оценим I_{17}^5 суммой трех интегралов:

$$I_{17}^5 \le \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi}\int\limits_{\tilde{e}_1}\frac{|\tilde{n}(\xi,s)-\tilde{n}(\xi,\tau)|}{|s-\tau|}ds\frac{d\tau}{\Pi(\tau)} + \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi}\int\limits_{\tilde{e}_2}\frac{|\tilde{n}(\xi,s)|}{|s-\tau|}ds\frac{d\tau}{\Pi(\tau)} +$$

$$+ \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi}\int\limits_{\tilde{e}_3}\frac{|\tilde{n}(\xi,s)|}{|s-\tau|}ds\frac{d\tau}{\Pi(\tau)} =: i_1 + i_2 + i_3. \tag{42}$$

Далее, оценивая интегралы i_1, i_2 по аналогии с получением оценок интегралов I_{15}^1, I_{15}^2 соответственно, получаем

$$i_1 \le c\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\frac{\varepsilon}{\xi^{3/2}} \le c\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\sqrt{\varepsilon_1},$$

$$i_2 \le \frac{c}{\xi\Pi(\xi)}\ln(\xi+1)\int\limits_0^{2\varepsilon_1}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}d\eta \le c\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\int\limits_0^{2\varepsilon_1}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}\ln\frac{1}{\eta}d\eta.$$

Используя обозначение $\delta_* := \max\{2s-\xi, (2s+\xi-\varepsilon)/3\}$, оцениваем интеграл i_3 с учетом неравенства (28), теоремы Фубини и свойств модуля непрерывности (см., например, [16]):

$$i_3 \le \frac{c}{\Pi(\xi)(\xi^3+1)}\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi}\int\limits_{\tilde{e}_3}\frac{\omega(\sigma'_\pm,|S-Z|)}{|S-Z|}\frac{ds}{|s-\tau|}d\tau \le$$

$$\le \frac{c}{\Pi(\xi)\xi^3}\left(\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi}\frac{\omega(\sigma'_\pm,|T-Z|)}{|T-Z|}\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\tau-\xi\delta_3}\frac{ds}{\tau-s}d\tau + \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi}\frac{\omega(\sigma'_\pm,|S-Z|)}{|S-Z|}\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\delta_*}\frac{d\tau}{s-\tau}ds\right) \le$$

$$< \frac{c}{\xi\Pi(\xi)}\left(\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi}\frac{\omega(\sigma'_\pm,|T-Z|)}{|T-Z|}\ln\frac{\tau-(\xi-\varepsilon)}{\xi\delta_3}\frac{d\tau}{\tau^2+1} +\right.$$

$$\left.+ \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi}\frac{\omega(\sigma'_\pm,|S-Z|)}{|S-Z|}\ln\frac{s-(\xi-\varepsilon)}{s-\delta_*}\frac{ds}{s^2+1}\right) \le c\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\int\limits_0^{2\varepsilon_1}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}\ln\frac{1}{\eta}d\eta.$$

Для оценивания интеграла I_{17}^5 в случае $\xi \in (0;1)$ используем соотношение (42), в котором через $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, $\tilde{e}_3$ теперь обозначены следующие множества: $\tilde{e}_1 := [\tau-\delta_4^2, \tau+\delta_4^2]$, $\tilde{e}_2 := [\tau-\delta_4/2, \tau-\delta_4^2] \cup [\tau+\delta_4^2, \tau+\delta_4/2]$, $\tilde{e}_3 := [\xi-\varepsilon,$

$\tau-\delta_4/2]\cup[\tau+\delta_4/2,\xi]$, где $\delta_4=\min\{\xi-\tau,\tau-(\xi-\varepsilon)\}$.

Оценивая интегралы i_1, i_2 в этом случае по аналогии с получением оценок интегралов I^1_{15}, I^2_{15} соответственно, получаем

$$i_1 \le \frac{c}{\Pi(\xi)}\left(\int\limits_0^{\varepsilon}\frac{\omega(\sigma'_{\pm},\eta)}{\sqrt{\eta}}\xi+\sqrt{\eta}\right)d\eta \le c\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\sqrt{\varepsilon},$$

$$i_2 \le c\frac{\xi}{\Pi(\xi)}\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi}\frac{\omega(\sigma'_{\pm},|T-Z|)}{|T-Z|}\ln\frac{1}{\delta_4}d\tau \le$$

$$\le \frac{c\xi}{\Pi(\xi)}\left(\frac{\omega(\sigma'_{\pm},\varepsilon)}{\varepsilon}\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{(2\xi-\varepsilon)/2}\ln\frac{1}{\tau-(\xi-\varepsilon)}d\tau+\int\limits_{(2\xi-\varepsilon)/2}^{\xi}\frac{\omega(\sigma'_{\pm},|T-Z|)}{|T-Z|}\ln\frac{1}{\xi-\tau}d\tau\right) \le$$

$$\le c\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\int\limits_0^{\varepsilon}\frac{\omega(\sigma'_{\pm},\eta)}{\eta}\ln\frac{1}{\eta}d\eta.$$

Интеграл i_3 оценивается подобно тому, как это сделано в случае $\xi\ge 1$.

Таким образом, при любом $\xi>0$ справедливы оценки

$$I_{17} \le c\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\left(\sqrt{\varepsilon_1}+\int\limits_0^{2\varepsilon_1}\frac{\omega(\sigma'_{\pm},\eta)}{\eta}\ln\frac{1}{\eta}d\eta\right) \le$$

$$\le c\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\varepsilon_1^{1/2-\beta_\infty}\ln\frac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_0^{2}\frac{\omega(\sigma'_{\pm},\eta)}{\eta}\frac{\ln(3/\eta)}{\varepsilon_1^{1/2-\beta_\infty}\ln(1/\varepsilon_1)+\eta^{1/2-\beta_\infty}\ln(3/\eta)}d\eta.$$

Аналогично оценивается интеграл I_{18}.

Оценим еще I_{19} суммой интегралов:

$$I_{19} \le \left(\int\limits_{-\infty}^{-\xi}+\int\limits_{2\xi}^{\infty}\right)\left|\int\limits_0^{\xi-\varepsilon}\frac{\tilde n(\xi+\varepsilon,s)-\tilde n(\xi,s)}{s-\tau}ds\right|\frac{d\tau}{\Pi(\tau)}+$$

$$+\int\limits_{-\xi}^{0}\left|\int\limits_0^{\xi-\varepsilon}\frac{\tilde n(\xi+\varepsilon,s)-\tilde n(\xi,s)}{s-\tau}ds\right|\frac{d\tau}{\Pi(\tau)}+\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{2\xi}\left|\int\limits_0^{\xi-\varepsilon}\frac{\tilde n(\xi+\varepsilon,s)-\tilde n(\xi,s)}{s-\tau}ds\right|\frac{d\tau}{\Pi(\tau)}+$$

$$+\int\limits_{\xi/2}^{\xi-\varepsilon}\left|\int\limits_0^{\xi-\varepsilon}\frac{\tilde n(\xi+\varepsilon,s)-\tilde n(\xi,s)}{s-\tau}ds\right|\frac{d\tau}{\Pi(\tau)}+\int\limits_{0}^{\xi/2}\left|\int\limits_0^{\xi-\varepsilon}\frac{\tilde n(\xi+\varepsilon,s)-\tilde n(\xi,s)}{s-\tau}ds\right|\frac{d\tau}{\Pi(\tau)} =:$$

$$=: \sum_{j=1}^{5}I^j_{19}.$$

Оценивая интеграл I^1_{19} сначала подобно интегралу I_{12}, а затем подобно интегралу I_{11}, с учетом неравенства (29) получаем

$$I^1_{19} \le c\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\sqrt{\varepsilon_1}\int\limits_{\varepsilon_1}^{2}\frac{\omega(\sigma'_{\pm},\eta)}{\eta^{3/2}}d\eta.$$

Аналогично, оценивая интегралы I^2_{19}, I^3_{19} сначала подобно интегралам I_{13}, I_{14} соответственно, а затем подобно интегралу I_{11}, получаем

$$I_{19}^2 \le c\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\varepsilon_1^{1/2-\beta_\infty}\int\limits_{\varepsilon_1}^{2}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta^{3/2-\beta_\infty}}d\eta,$$

$$I_{19}^3 \le c\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\sqrt{\varepsilon_1}\int\limits_{\varepsilon_1}^{2}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta^{3/2}}\ln\frac{3}{\eta}d\eta.$$

Оценим теперь интеграл I_{19}^4.

Рассматривая сначала случай $\xi \ge 1$, введем в рассмотрение множества $e'_{1,\varepsilon} := [\tau-\delta'_\varepsilon, \tau+\delta'_\varepsilon]$, $e'_{2,\varepsilon} := [\tau-(\xi-\varepsilon-\tau)/2, \tau-\delta'_\varepsilon] \cup [\tau+\delta'_\varepsilon, \tau+(\xi-\varepsilon-\tau)/2]$, $e'_{3,\varepsilon} := [0,\xi-\varepsilon]\setminus(e'_{1,\varepsilon}\cup e'_{2,\varepsilon})$, где $\delta'_\varepsilon = \min\{(\xi-\varepsilon-\tau)/(2\xi), \varepsilon/(2\xi)\}$, и оценим I_{19}^4 суммой трех интегралов:

$$I_{19}^4 \le \int\limits_{\xi/2}^{\xi-\varepsilon}\int\limits_{e'_{1,\varepsilon}}\frac{|\tilde{n}(\xi+\varepsilon,s)-\tilde{n}(\xi+\varepsilon,\tau)-(\tilde{n}(\xi,s)-\tilde{n}(\xi,\tau))|}{|s-\tau|}ds\frac{d\tau}{\Pi(\tau)} +$$

$$+\int\limits_{\xi/2}^{\xi-\varepsilon}\int\limits_{e'_{2,\varepsilon}}\frac{|\tilde{n}(\xi+\varepsilon,s)-\tilde{n}(\xi,s)|}{|s-\tau|}ds\frac{d\tau}{\Pi(\tau)} +$$

$$+\int\limits_{\xi/2}^{\xi-\varepsilon}\int\limits_{e'_{3,\varepsilon}}\frac{|\tilde{n}(\xi+\varepsilon,s)-\tilde{n}(\xi,s)|}{|s-\tau|}ds\frac{d\tau}{\Pi(\tau)} =: i'_1 + i'_2 + i'_3. \tag{43}$$

Теперь, оценивая i'_1 с учетом неравенства (30), подобно оцениванию интегралов I_{15}^1 и I_{11} получаем

$$i'_1 \le \frac{c}{\xi^2\Pi(\xi)}\left(\int\limits_{\xi/2}^{\xi-2\varepsilon}+\int\limits_{\xi-2\varepsilon}^{\xi-\varepsilon}\right)\left(\frac{\omega(\sigma'_\pm,|T-Z|)}{|T-Z|}\frac{1}{\tau+1}+1\right)\int\limits_{e'_{1,\varepsilon}}\frac{ds}{\sqrt{|s-\tau|}}\frac{d\tau}{\sqrt{\xi-\tau}} \le$$

$$\le \frac{c}{\xi^2\Pi(\xi)}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\xi}}\left(\int\limits_{\xi/2}^{\xi-2\varepsilon}\frac{\omega(\sigma'_\pm,|T-Z|)}{|T-Z|^{3/2}}\frac{d\tau}{\tau^2+1}+\int\limits_{\xi/2}^{\xi-2\varepsilon}\frac{d\tau}{\sqrt{\xi-\tau}}\right)+\sqrt{\xi}\,\omega(\sigma'_\pm,\varepsilon_1)\right) \le$$

$$\le \frac{c}{\xi\Pi(\xi)}\sqrt{\varepsilon_1}\int\limits_{\varepsilon_1}^{2}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta^{3/2}}d\eta.$$

Комбинируя приемы, использованные при оценивании интегралов I_{15}^2 и i'_1, с учетом неравенства (29) получаем оценку

$$i'_2 \le \frac{c}{\xi\Pi(\xi)}\sqrt{\varepsilon_1}\ln\frac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_{\varepsilon_1}^{2}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta^{3/2}}d\eta,$$

а при оценивании i'_3, используя, кроме того, обозначение $Z_1 := (\xi+\varepsilon-i)/(\xi+\varepsilon+i)$, имеем

$$i'_3 \le \frac{c\sqrt{\varepsilon}}{\Pi(\xi)(\xi^3+1)}\left(\int\limits_{\xi/2}^{\xi-\varepsilon}\int\limits_{\tau+(\xi-\varepsilon-\tau)/2}^{\xi-\varepsilon}\frac{\omega(\sigma'_\pm,|S-Z_1|)}{|S-Z_1|}\frac{ds}{\sqrt{\xi+\varepsilon-s}}\frac{d\tau}{\xi-\varepsilon-\tau}+\right.$$

$$+\int\limits_{\xi/2}^{\xi-\varepsilon}\frac{\omega(\sigma'_{\pm},|T-Z_1|)}{|T-Z_1|}\int\limits_{0}^{\tau-(\xi-\varepsilon-\tau)/2}\frac{ds}{\tau-s}\frac{d\tau}{\sqrt{\xi+\varepsilon-\tau}}\Bigg) \le$$

$$\le \frac{c\sqrt{\varepsilon_1}}{\xi\Pi(\xi)}\Bigg(\Bigg(\int\limits_{\xi/2}^{\xi-2\varepsilon}+\int\limits_{\xi-2\varepsilon}^{\xi-\varepsilon}\Bigg)\frac{\xi^2+1}{\xi-\varepsilon-\tau}\int\limits_{\tau+(\xi-\varepsilon-\tau)/2}^{\xi-\varepsilon}\frac{\omega(\sigma'_{\pm},|S-Z_1|)}{|S-Z_1|^{3/2}}\frac{ds}{s^2+1}\frac{d\tau}{\tau^2+1}+$$

$$+\Bigg(\int\limits_{\xi/2}^{\xi-2\varepsilon}+\int\limits_{\xi-2\varepsilon}^{\xi-\varepsilon}\Bigg)\frac{\omega(\sigma'_{\pm},|T-Z_1|)}{|T-Z_1|^{3/2}}\ln\frac{\tau}{\xi-\varepsilon-\tau}\frac{d\tau}{\tau^2+1}\Bigg) \le$$

$$\le \frac{c}{\xi\Pi(\xi)}\sqrt{\varepsilon_1}\int\limits_{\varepsilon_1}^{2}\frac{\omega(\sigma'_{\pm},\eta)}{\eta^{3/2}}\ln\frac{3}{\eta}\,d\eta.$$

При оценивании интеграла I_{19}^4 в случае $\xi\in(0;1)$ используем соотношение (43), в котором при определении множеств $e'_{1,\varepsilon}$, $e'_{2,\varepsilon}$, $e'_{3,\varepsilon}$ следует принять $\delta'_\varepsilon=\min\left\{(\xi-\varepsilon-\tau)^2,\varepsilon^2\right\}$. Теперь интегралы i'_1, i'_2, i'_3 оцениваются так, как это сделано в случае $\xi\ge 1$.

Таким образом, при любом $\xi>0$ справедливы оценки

$$I_{19}^4 \le c\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\sqrt{\varepsilon_1}\ln\frac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_{\varepsilon_1}^{2}\frac{\omega(\sigma'_{\pm},\eta)}{\eta^{3/2}}d\eta \le$$

$$\le c\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\varepsilon_1^{1/2-\beta_\infty}\ln\frac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_{0}^{2}\frac{\omega(\sigma'_{\pm},\eta)}{\eta}\frac{\ln(3/\eta)}{\varepsilon_1^{1/2-\beta_\infty}\ln(1/\varepsilon_1)+\eta^{1/2-\beta_\infty}\ln(3/\eta)}d\eta.$$

Наконец, оценим интеграл I_{19}^5. С этой целью введем в рассмотрение множества $e''_{1,\varepsilon}:=[\tau-\delta''_\varepsilon,\tau+\delta''_\varepsilon]$, $e''_{2,\varepsilon}:=[0,\tau-\delta''_\varepsilon]\cup[\tau+\delta''_\varepsilon,3\xi/4]$, $e''_{3,\varepsilon}:=$ $:=[3\xi/4,\xi--\varepsilon]$, где $\delta''_\varepsilon=\min\left\{\tau^2/(\xi+1)^3,\varepsilon\tau/(\xi+1)^3\right\}$, и оценим I_{19}^5 суммой трех интегралов:

$$I_{19}^5 \le \int\limits_{0}^{\xi/2}\int\limits_{e''_{1,\varepsilon}}\frac{|\tilde n(\xi+\varepsilon,s)-\tilde n(\xi+\varepsilon,\tau)-(\tilde n(\xi,s)-\tilde n(\xi,\tau))|}{|s-\tau|}ds\frac{d\tau}{\Pi(\tau)}+$$

$$+\int\limits_{0}^{\xi/2}\int\limits_{e''_{2,\varepsilon}}\frac{|\tilde n(\xi+\varepsilon,s)-\tilde n(\xi,s)|}{|s-\tau|}ds\frac{d\tau}{\Pi(\tau)}+$$

$$+\int\limits_{0}^{\xi/2}\int\limits_{e''_{3,\varepsilon}}\frac{|\tilde n(\xi+\varepsilon,s)-\tilde n(\xi,s)|}{|s-\tau|}ds\frac{d\tau}{\Pi(\tau)} =: i''_1+i''_2+i''_3.$$

Далее, оценивая i''_1 подобно интегралу I_{15}^1, имеем

$$i''_1 \le c\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\varepsilon_1^{1/2-\beta_\infty}.$$

Оценивая теперь i''_3 по аналогии с интегралами I_{16}^4 и I_{11}, с учетом неравенства (29) получаем

$$i_3'' \le c\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\sqrt{\varepsilon_1}\int_{\varepsilon_1}^{2}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta^{3/2}}d\eta.$$

Наконец, оценивая i_2'' по аналогии с интегралами I_{16}^2 и I_{16}^3, при $\xi \ge 1$ получаем

$$i_2'' \le c\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\varepsilon_1^{1/2-\beta_\infty}\ln\frac{1}{\varepsilon_1}\int_{\varepsilon_1}^{2}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta^{3/2-\beta_\infty}}d\eta,$$

а при $\xi \in (0;1)$

$$i_2'' \le c\frac{\sqrt{\varepsilon}\,\omega(\sigma'_\pm,\xi)}{\sqrt{\xi}}\int_0^{\xi/2}\ln\frac{\xi}{\delta''_\varepsilon}\frac{d\tau}{\Pi(\tau)} \le c\frac{\sqrt{\xi}\,\omega(\sigma'_\pm,\xi)}{\Pi(\xi)}\sqrt{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon} \le$$

$$\le c\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\sqrt{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon}\int_{\xi}^{2\xi}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta^{3/2}}d\eta.$$

Таким образом, при любом $\xi > 0$ справедливы оценки

$$I_{19}^5 \le c\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\varepsilon_1^{1/2-\beta_\infty}\ln\frac{1}{\varepsilon_1}\int_{\varepsilon_1}^{2}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta^{3/2-\beta_\infty}}d\eta \le$$

$$\le c\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\varepsilon_1^{1/2-\beta_\infty}\ln\frac{1}{\varepsilon_1}\int_0^2\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}\frac{\ln(3/\eta)}{\varepsilon_1^{1/2-\beta_\infty}\ln(1/\varepsilon_1)+\eta^{1/2-\beta_\infty}\ln(3/\eta)}d\eta.$$

Следствием оценок интегралов I_{17}, I_{18}, I_{19} является неравенство (38). Лемма доказана.

Введем в рассмотрение модуль непрерывности

$$\omega_{\mathbb{R},\infty}(g_*,\varepsilon) := \sup_{\tau_1,\tau_2\in\mathbb{R},\,|\tau_1-\tau_2|\le\varepsilon}|g_*(\tau_1)-g_*(\tau_2)|,$$

а также локальный центрированный (относительно бесконечно удаленной точки) модуль непрерывности

$$\omega_{\mathbb{R}}(g_*,\varepsilon) := \sup_{\tau\in\mathbb{R},\,|\tau|\ge 1/\varepsilon}|g_*(\tau)-g_*(\infty)|$$

функции g_*, непрерывной на расширенной вещественной прямой $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$. Обозначим теперь через $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ класс функций g_*, непрерывных на расширенной вещественной прямой, модули непрерывности которых удовлетворяют условиям Дини:

$$\int_0^1\frac{\omega_{\mathbb{R}}(g_*,\eta)}{\eta}d\eta < \infty, \qquad \int_0^1\frac{\omega_{\mathbb{R},\infty}(g_*,\eta)}{\eta}d\eta < \infty, \tag{44}$$

а через $\mathcal{D}_u(\mathbb{R})$ — множество нечетных функций класса $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

В следующей лемме устанавливается необходимое в дальнейшем свойство сингулярного интеграла Коши

$$\tilde{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(s)}{s-\xi}ds, \qquad \xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\},$$

в случае, когда его плотность $f\colon (\mathbb{R}\setminus\{0\}) \to \mathbb{C}$ допускает разрыв. При доказательстве этой леммы используются оценки

$$\left|\tilde{f}(\xi)\right| \le c\left(\int_0^1 \sup_{s:\, s=\pm\eta} |f(s)| \frac{d\eta}{\eta+\xi} + \int_0^1 \sup_{s:\, s=\pm 1/\eta} |f(s)| \frac{d\eta}{\eta(\eta+\xi^{-1})} + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\xi/4} \sup_{s\in[\xi-\eta,\, \xi+\eta]} |f(s) - f(\xi)| \frac{d\eta}{\eta}\right) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \tag{45}$$

$$\left|\tilde{f}(\xi\pm\varepsilon) - \tilde{f}(\xi)\right| \le c\left(\varepsilon \int_0^{\xi/2} \sup_{s_1, s_2 \in [\xi/2;\, 3\xi/2],\, |s_2 - s_1| \le \eta} |f(s_2) - f(s_1)| \frac{d\eta}{\eta(\eta+\varepsilon)} + \right.$$

$$+ \varepsilon \int_0^1 \sup_{s:\, s=\pm\eta} |f(s)| \frac{d\eta}{\eta^2+\xi^2} +$$

$$\left. + \frac{\varepsilon}{\xi^2} \int_0^1 \sup_{s:\, s=\pm 1/\eta} |f(s)| \frac{d\eta}{\eta^2+\xi^{-2}}\right) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad \forall \varepsilon \in (0, |\xi|/4) \tag{46}$$

(здесь c — некоторая абсолютная постоянная), которые устанавливаются аналогично соответствующим оценкам теоремы 2 из [17].

Лемма 4. *Если функция $h_0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ обращается в нуль в бесконечно удаленной точке и точке 0, а ее модули непрерывности удовлетворяют условиям*

$$\int_0^1 \frac{\omega_{\mathbb{R}}(h_0, \eta)}{\eta} \ln\frac{1}{\eta}\, d\eta < \infty, \qquad \int_0^1 \frac{\omega_{\mathbb{R},\infty}(h_0, \eta)}{\eta} \ln\frac{1}{\eta}\, d\eta < \infty, \tag{47}$$

то функция

$$H(\xi) := \Pi(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h_0(s)}{\Pi(s)(s-\xi)}\, ds, \qquad \xi \in \mathbb{R},$$

принадлежит классу $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ и выполняются равенства

$$H(0) = H(\infty) = 0. \tag{48}$$

Доказательство. Используя оценку (45) для функции $f(s) := \dfrac{h_0(s)}{\Pi(s)}$ и учитывая при этом соотношения

$$\sup_{s:s=\pm\eta} \left|h_0(s)\right| \le \omega_{\mathbb{R}}(h_0, \eta), \qquad \sup_{s:s=\pm 1/\eta} \left|h_0(s)\right| \le \omega_{\mathbb{R},\infty}(h_0, \eta)$$

и условия (47), получаем равенства (48). Теперь путем несложных выкладок устанавливается, что $H \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, при этом используется также оценка (46). Лемма доказана.

При регуляризации сингулярного интегрального уравнения задачи Дирихле для функции тока Стокса нам также понадобится следующее утверждение об изменении порядка интегрирования в повторных интегралах по вещественной прямой в случае, когда один из интегралов является сингулярным и его плотность допускает разрыв.

Лемма 5. *Пусть функция V_0 принадлежит классу $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ и обращается в нуль в бесконечно удаленной точке, а для функции $\tilde{m}(\xi, \tau)$ справедливы оценки*

$$|\tilde{m}(\xi, \tau)| \leq \Omega(\xi, \tau) \quad \forall \xi, \tau\colon 0 < \tau < \xi, \tag{49}$$

$$|\tilde{m}(\xi, s) - \tilde{m}(\xi, \tau)| \leq \Omega(\xi, \tau) \left(\frac{s-\tau}{\xi-\tau}\right)^{\beta'} \quad \forall \xi, s, \tau\colon 0 < \tau < s < \xi, \tag{50}$$

где $\beta' \in (0; 1]$ *и функция* $\Omega(\xi, \tau)$ *удовлетворяет условиям*

$$\sup_{\tau \in [0, s]} \Omega(\xi, \tau) \leq c(\xi, s) \quad \forall \xi, s\colon 0 < s < \xi,$$

$$\sup_{\tau\colon \eta \leq \xi - \tau \leq 2\eta} \Omega(\xi, \tau) \leq c(\xi) \sup_{\tau\colon \nu\eta \leq \xi - \tau \leq 2\nu\eta} \Omega(\xi, \tau) \quad \forall \nu \in (0; 1), \tag{51}$$

$$\int\limits_0^\xi \sup_{\tau\colon \eta \leq \xi - \tau \leq 2\eta} \Omega(\xi, \tau) \ln \frac{\xi}{\eta}\, d\eta \leq c(\xi), \tag{52}$$

в которых постоянная $c(\xi, s)$ *зависит только от* ξ *и* s, *а постоянная* $c(\xi)$ — *только от* ξ.

Тогда при всех $\xi > 0$ *выполняется равенство*

$$\int\limits_0^\xi \tilde{m}(\xi, \tau) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{V_0(s)}{\Pi(s)(s-\tau)}\, ds\, d\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{V_0(s)}{\Pi(s)} \int\limits_0^\xi \frac{\tilde{m}(\xi, \tau)}{s-\tau}\, d\tau\, ds. \tag{53}$$

Доказательство. Представим каждый из повторных интегралов, входящих в равенство (53), суммой интегралов:

$$I' := \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{V_0(s)}{\Pi(s)} \int\limits_0^\xi \frac{\tilde{m}(\xi, \tau)}{s-\tau}\, d\tau\, ds =$$

$$= \left(\int\limits_{-\infty}^{-N} + \int\limits_N^{\infty}\right) \frac{V_0(s)}{\Pi(s)} \int\limits_0^\xi \frac{\tilde{m}(\xi, \tau)}{s-\tau}\, d\tau\, ds + \int\limits_{-N}^{N} \frac{V_0(s)}{\Pi(s)} \int\limits_0^{\xi-\varepsilon} \frac{\tilde{m}(\xi, \tau)}{s-\tau}\, d\tau\, ds +$$

$$+ \int\limits_{-N}^{N} \frac{V_0(s)}{\Pi(s)} \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \frac{\tilde{m}(\xi, \tau)}{s-\tau}\, d\tau\, ds =: I_1' + I_2' + I_3',$$

$$I^* := \int\limits_0^\xi \tilde{m}(\xi, \tau) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{V_0(s)}{\Pi(s)(s-\tau)}\, ds\, d\tau =$$

$$= \int\limits_0^\xi \tilde{m}(\xi, \tau) \left(\int\limits_{-\infty}^{-N} + \int\limits_N^{\infty}\right) \frac{V_0(s)}{\Pi(s)(s-\tau)}\, ds\, d\tau + \int\limits_0^{\xi-\varepsilon} \tilde{m}(\xi, \tau) \int\limits_{-N}^{N} \frac{V_0(s)}{\Pi(s)(s-\tau)}\, ds\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \tilde{m}(\xi, \tau) \int\limits_{-N}^{N} \frac{V_0(s)}{\Pi(s)(s-\tau)}\, ds\, d\tau =: I_1^* + I_2^* + I_3^*.$$

В соответствии с теоремой о композиции сингулярного и регулярного интегралов в пространствах Лебега [18, с. 93] выполняется равенство $I_2' = I_2^*$. В силу соотношений (49), (52) и предположения о том, что $V_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и $V_0(\infty) = 0$, интегралы I_1', I_1^* стремятся к нулю при $N \to \infty$. Кроме того, при том же предположении справедлива оценка

$$\int_{-N}^{N} \frac{V_0(s)}{\Pi(s)(s-\tau)}\, ds \le c(\xi) \quad \forall \tau \in [\xi/2, \xi],$$

в которой постоянная $c(\xi)$ зависит от ξ, но не зависит от N. Поэтому интеграл I_3^* стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ и $N \to \infty$. Наконец, с учетом соотношений (49) – (52) I_3' оценивается аналогично интегралу I_{17} и также стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ и $N \to \infty$.

Таким образом, выполняется равенство

$$\lim_{N\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} (I' - I^*) = 0,$$

из которого в силу того, что интегралы I', I^* не зависят ни от N, ни от ε, следует равенство (53). Лемма доказана.

3. Регуляризация сингулярного интегрального уравнения задачи Дирихле. Установим теперь условия на границу области $D_z^{\pm}$, достаточные для регуляризации сингулярного интегрального уравнения (18) задачи Дирихле для функции тока Стокса.

Всюду в дальнейшем

$$m(\xi, \tau) := M_{\pm}\left(\frac{\xi - i}{\xi + i}, \frac{\tau - i}{\tau + i}\right),$$

$$A(\xi, \tau) := 2\operatorname{Re} m(\xi, \tau), \qquad B(\xi, \tau) := 2\operatorname{Im} m(\xi, \tau),$$

и в качестве функции $\Pi(\xi)$ рассматривается функция $\Pi_*(\xi) := |\xi|^{\beta_0}(|\xi| + 1)^{\beta_\infty - \beta_0}$, где числа β_0, β_∞ удовлетворяют соотношениям $1 - \alpha + \nu < \beta_0 < 1$, $0 < \beta_\infty < \min\{\alpha - \nu, 1/2\}$, в которых числа $\alpha \in (1/2; 1]$ и $\nu \in [0, \alpha)$ те же, что и в определении класса $\widetilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D)$.

Введем в рассмотрение функции

$$\tilde{n}(\xi, \tau) := \begin{cases} \dfrac{2\xi}{\pi} \displaystyle\int_\tau^\xi \frac{s(n(s,\tau) - n(\xi,\tau))}{(\xi^2 - s^2)^{3/2}\sqrt{s^2 - \tau^2}}\, ds & \text{при } \xi\tau > 0,\ |\tau| < |\xi|; \\ 0 & \text{при } \xi\tau < 0 \text{ или } \xi\tau > 0,\ |\tau| > |\xi|, \end{cases}$$

$$\tilde{C}(\xi, \tau) := 2\operatorname{Re}\tilde{n}(\xi, \tau), \qquad \tilde{D}(\xi, \tau) := 2\operatorname{Im}\tilde{n}(\xi, \tau),$$

$$k_f(\xi, \tau) := -\frac{\xi}{|\xi|}\tilde{D}(\xi, \tau) - \frac{1}{\pi}\int_0^\xi \frac{\tilde{C}(\xi, \eta)}{\eta - \tau}\, d\eta,$$

$$\hat{g}_*(\tau) := \begin{cases} g_*(\tau) & \text{при } \tau \ge 0; \\ g_*(-\tau) & \text{при } \tau < 0 \end{cases}$$

и интегральные операторы

$$(k_f g)(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_f(\xi, \tau)}{\Pi_*(\tau)}\, g(\tau)\, d\tau,$$

$$(Qg)(\xi) := \Pi_*(\xi)\left(\frac{A(\xi, \xi)}{(A(\xi, \xi))^2 + (B(\xi, \xi))^2}\, \frac{g(\xi)}{\operatorname{Im}\sigma_{\pm}\left(\dfrac{\xi - i}{\xi + i}\right)} + \right.$$

$$+\frac{P_{\pm}(\xi)}{4\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\tau)}{\operatorname{Im}\sigma_{\pm}\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right)}\sqrt{\frac{(\tau^2+1)\left|\operatorname{Im}\sigma_{\pm}\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right)\right|}{2|\tau|}}\,\frac{d\tau}{\tau-\xi}\Bigg),$$

где

$$P_{+}(\xi) := \sqrt{\sigma_{+}'\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)}-\sqrt{\sigma_{+}'\left(\frac{\xi+i}{\xi-i}\right)}$$

и

$$P_{-}(\xi) := \sqrt{-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)^2\sigma_{-}'\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)}-\sqrt{-\left(\frac{\xi+i}{\xi-i}\right)^2\sigma_{-}'\left(\frac{\xi+i}{\xi-i}\right)},$$

при этом значения корней положительны при $\xi=0$.

Обозначим через $C(\mathbb{R})$ банахово пространство функций $g_*:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, непрерывных на расширенной вещественной прямой $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, с нормой $\|g_*\|_{C(\mathbb{R})}:=$ $:=\sup\limits_{\tau\in\mathbb{R}}|g_*(\tau)|$, а через $C_u(\mathbb{R})$ — подпространство пространства $C(\mathbb{R})$, состоящее из нечетных функций.

В следующей теореме приведены условия, достаточные для регуляризации сингулярного интегрального уравнения (18), к которому при доказательстве теоремы 5 редуцирована задача Дирихле для функции тока Стокса.

Теорема 6. *Пусть функция $\psi_{\partial D}$ принадлежит классу $\widetilde{\mathcal{H}}_{\alpha}(\partial D)$, $1/2<\alpha\le$ ≤ 1, и удовлетворяет условиям (15) и (16), а конформное отображение $\sigma_{\pm}(Z)$ на границе единичного круга имеет непрерывную контурную производную, модуль непрерывности которой удовлетворяет условию*

$$\int\limits_0^1\frac{\omega(\sigma_{\pm}',\eta)}{\eta}\ln^3\frac{1}{\eta}\,d\eta<\infty. \tag{54}$$

Тогда любое решение сингулярного интегрального уравнения (18) вида

$$V_*(\xi)=\frac{V_0(\xi)}{\Pi_*(\xi)}, \tag{55}$$

где $V_0\in\mathcal{D}_u(\mathbb{R})$ и $V_0(\infty)=0$, может быть получено в результате решения интегрального уравнения Фредгольма

$$V_0(\xi)+\big(Q(k_f V_0)\big)(\xi)=(Q\hat{g}_*)(\xi)\quad\forall\xi\in\mathbb{R}, \tag{56}$$

в котором оператор $Q\,k_f$ компактен в пространстве $C_u(\mathbb{R})$. При этом уравнение (56) имеет единственное решение в пространстве $C_u(\mathbb{R})$, принадлежащее классу $\mathcal{D}_u(\mathbb{R})$, и выполняются равенства

$$V_0(0)=V_0(\infty)=0. \tag{57}$$

Доказательство. Из оценок (28), (30) следует, что для функции $\widetilde{C}(\xi,\tau)$ выполняются неравенства вида (49), (50) при $\Omega(\xi,\tau)=c\left(\frac{\omega(\sigma_{\pm}',|T-Z|)}{|T-Z|}+1\right)$, где c — некоторая не зависящая от ξ и τ постоянная, и $\beta'=1/2$. Поэтому с учетом леммы 5 перепишем сингулярное интегральное уравнение (18) в виде

$$D(\xi, \xi)V_*(\xi) - \frac{iC(\xi, \xi)}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V_*(\tau)}{\tau - \xi} \, d\tau +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} k_f(\xi, \tau) V_*(\tau) \, d\tau = \hat{g}_*(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{58}$$

Заметим, что для функции $k_f(\xi, \tau)$ выполняется равенство

$$k_f(-\xi, -\tau) = k_f(\xi, \tau) \quad \forall \xi, \tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \xi \neq \tau,$$

следствием которого является четность функции $(k_f V_0)(\xi)$ при любой нечетной функции V_0. Таким образом, обе части уравнения (58) являются четными функциями и, следовательно, уравнения (58) и (18) эквивалентны.

Индекс [19, с. 176] сингулярного интегрального уравнения (58)

$$\kappa := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d \arg \frac{\overline{m(\xi, \xi)}}{m(\xi, \xi)}.$$

При доказательстве теоремы 3 из [10] показано, что $\kappa = 0$. Поэтому для характеристического уравнения, соответствующего уравнению (58), единственное решение в классе функций, обращающихся в нуль в бесконечно удаленной точке и допускающих слабостепенную особенность в точке 0, задается оператором $(Q_h f)(\xi) := \dfrac{1}{\Pi_*(\xi)} (Qf)(\xi)$.

Применяя метод Карлемана – Векуа [19, 20] регуляризации уравнения (58) решением соответствующего характеристического уравнения, получаем интегральное уравнение (56), равносильное уравнению (58).

Покажем, что любое решение V_0 уравнения (56) в пространстве $C_u(\mathbb{R})$ принадлежит классу $\mathcal{D}_u(\mathbb{R})$ и выполняются равенства (57). С этой целью отметим сначала следующие соотношения для функции $\hat{g}_*$, которые следуют из условия $\psi_{\partial D} \in \widetilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D)$. Так, оценки (37), (48) из [8] для функции $\hat{g}_*$ принимают вид

$$|\hat{g}_*(\xi)| \le \frac{c}{\xi^{1+\alpha-\nu}} \quad \forall \xi \ge 2,$$

$$|\hat{g}_*(\xi)| \le c \xi^{\alpha-\nu} \quad \forall \xi \in (0; 2),$$

где постоянная c не зависит от ξ. Кроме того, вследствие оценок (39), (40) из [8] существует $\alpha_1 \in (0; 1)$ такое, что модуль непрерывности функции $\hat{g}_*$ удовлетворяет соотношению

$$\omega_{\mathbb{R}}(\hat{g}_*, \varepsilon) \le c \varepsilon^{\alpha_1} \quad \forall \varepsilon > 0,$$

где постоянная c не зависит от ε.

Далее, используя указанные для функции $\hat{g}_*$ соотношения, путем несложных выкладок устанавливаем, что для функции

$$h_*(\xi) := \Pi_*(\xi) \frac{\hat{g}_*(\xi)}{\operatorname{Im} \sigma_\pm \left(\dfrac{\xi - i}{\xi + i} \right)}$$

выполняются равенства $h_*(0) = h_*(\infty) = 0$ и существует $\alpha_2 \in (0; 1)$ такое, что выполняются соотношения

$$\omega_{\mathbb{R}}(h_*, \varepsilon) \le c \varepsilon^{\alpha_2}, \quad \omega_{\mathbb{R}, \infty}(h_*, \varepsilon) \le c \varepsilon^{\alpha_2} \quad \forall \varepsilon > 0,$$

в которых постоянная c не зависит от ε. Поэтому с учетом леммы 4 заключаем, что функция $(Q\hat{g}_*)(\xi)$ принадлежит классу $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ и выполняются равенства $(Q\hat{g}_*)(0) = (Q\hat{g}_*)(\infty) = 0$. При этом очевидно также, что эта функция является нечетной.

В то же время вследствие четности функции $k_f V_0$ функция $Q(k_f V_0)$, в свою очередь, является нечетной и при условии (54) с учетом лемм 2 – 4 приходим к выводу о том, что эта функция принадлежит классу $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ и выполняются равенства $(Q(k_f V_0))(0) = (Q(k_f V_0))(\infty) = 0$.

Таким образом, из предположения о том, что решение уравнения (56) $V_0 \in C_u(\mathbb{R})$, следует, что $V_0 = (Q\hat{g}_* - Q(k_f V_0)) \in \mathcal{D}_u(\mathbb{R})$ и выполняются равенства (57).

Заметим также, что условия Дини вида (44) для модуля непрерывности и локального центрированного относительно бесконечно удаленной точки модуля непрерывности функции $Q(k_f V_0)$ выполняются равномерно по V_0 из единичного шара пространства $C_u(\mathbb{R})$. Следовательно, оператор $Q\,k_f$ компактен в пространстве $C_u(\mathbb{R})$.

Наконец, покажем, что уравнение (56) имеет единственное решение в пространстве $C_u(\mathbb{R})$. С этой целью заметим, что согласно теореме 5 однородное уравнение (56) с нулевой правой частью равносильно уравнению

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_z^{\pm}} \frac{F(t)(t - \operatorname{Re} z)}{\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}\right)^{\mp}}\,dt = 0, \quad z \in \partial D_z^{\pm} \setminus \{b_1, b_2\}, \tag{59}$$

где верхние знаки (+ или –) соответствуют внутренней задаче Дирихле, а нижние знаки — внешней задаче Дирихле для функции тока Стокса, при этом связь функции F с функцией (55) описана в указанной теореме.

В случае внутренней задачи Дирихле согласно теореме 3 голоморфная в области D_z^+ функция F, удовлетворяющая уравнению (59), тождественно равна постоянной. В случае внешней задачи Дирихле согласно теореме 4 голоморфная в области D_z^- функция F, удовлетворяющая уравнению (59) и обращающаяся в нуль в бесконечно удаленной точке, тождественно равна нулю.

В обоих случаях в соответствии с теоремой 5 и равенством (55) найденным решениям F уравнения (59) соответствует решение $V_0 \equiv 0$ уравнения (56) с нулевой правой частью. Следовательно, однородное уравнение (56) с нулевой правой частью имеет в пространстве $C_u(\mathbb{R})$ только нулевое решение. Поэтому в соответствии с альтернативой Фредгольма уравнение (56) имеет единственное решение в пространстве $C_u(\mathbb{R})$ и доказательство завершено.

В работе [10] указаны условия на угол, который образует касательная к границе $\partial D_z^{\pm}$ с положительным направлением оси Ox, достаточные для выполнения неравенства (54).

Сформулируем теперь результат о разрешимости задачи Дирихле для функции тока Стокса.

Теорема 7. *Пусть выполняются условия теоремы* 6. *Тогда решение задачи Дирихле для функции тока Стокса в области* D *представляется формулой* (9), *где* $z = x + iy$, $F(t)$ — *предельные значения на множестве* $\partial D_z \setminus \{b_1, b_2\}$ *функции* F, *которая в случае внутренней задачи Дирихле выражается равенством* (22), *а в случае внешней задачи Дирихле — равенством* (23). *При этом функция* V_* *имеет вид* (55), *где* V_0 — *решение уравнения Фредгольма* (56) *в пространстве* $C_u(\mathbb{R})$.

Доказательство. В случае внешней задачи Дирихле, используя теоремы 4 – 6, заключаем, что существует единственная голоморфная в D_z^- функция F, удовлетворяющая условию (8) и обращающаяся в нуль в бесконечно удаленной точке, такая, что ее граничные значения удовлетворяют интегральному уравнению (11). Эта функция задается равенством (23) и порождает решение задачи Дирихле по формуле (9).

В случае внутренней задачи Дирихле в силу теоремы 3 голоморфная в области D_z^+ функция F, удовлетворяющая условию (8) и такая, что ее граничные значения удовлетворяют интегральному уравнению (10), находится с точностью до действительного постоянного слагаемого. Поскольку при этом

$$\int\limits_{\partial D_z} \frac{t - \operatorname{Re} z}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\, dt = 0, \qquad \forall z \in D_z^+,$$

то все указанные решения уравнения (10) порождают одно и то же решение задачи Дирихле для функции тока Стокса по формуле (9). В частности, в соответствии с теоремами 5, 6 одно из решений уравнения (10) задается формулой (22) и доказательство завершено.

Перейдем к ***доказательству теоремы*** **1.** Обозначим через γ_ρ образ окружности $\{Z \in \mathbb{C}\colon |Z| = \rho < 1\}$ при отображении $\sigma_+(Z)$, а через $D_{z,\rho}^+$ — область, ограниченную кривой γ_ρ. В качестве семейства $\{\Gamma_{z\overline{z}}\}$ возьмем гомотопическое семейство дуг всех возможных кривых γ_ρ, $0 < \rho < 1$.

Пусть $\psi(x, y)$ — решение уравнения (1) в ограниченной области D. Покажем, что существует голоморфная в D_z^+ функция F_0 такая, что при $F = F_0$ и всех $(x, y) \in D$ выполняется равенство (6), где $z = x + iy$, а Γ — произвольная замкнутая жорданова спрямляемая кривая в D_z^+, которая охватывает кривую $\Gamma_{z\overline{z}}$.

Предположим, что точка z лежит на кривой γ_ρ при некотором $\rho \in (0; 1)$ и такая, что $\operatorname{Im} z \neq 0$. Тогда с учетом теоремы Коши равенство (6) приводится к виду

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{F(t)(t-x)}{\left(\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}\right)^-}\, dt = \psi(x, y), \tag{60}$$

где

$$\left(\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}\right)^- := \lim_{\tau \to t,\ \tau \in \mathbb{C} \setminus \overline{D_{z,\rho}^+}} \sqrt{(\tau - z)(\tau - \overline{z})}.$$

В соответствии с теоремами 5, 6 уравнение (60) с помощью конформного отображения $z = \sigma_+\left(\rho \dfrac{\xi - i}{\xi + i}\right)$ приводится к уравнению Фредгольма вида (56), которое имеет единственное решение в пространстве $C_u(\mathbb{R})$. Обозначим это решение через V_ρ. Тогда согласно теореме 5 граничные значения на множестве $\gamma_\rho \setminus \mathbb{R}$ функции

$$F_\rho(z) = \frac{2(\xi + i)}{\pi \rho i \sigma_+'\left(\rho \dfrac{\xi - i}{\xi + i}\right)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{|\tau|} \frac{V_\rho(|\tau|)}{\tau - \xi} \frac{d\tau}{\Pi_*(\tau)} -$$

$$- \frac{4}{\pi \rho \sigma_+'(0)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tau| V_\rho(|\tau|)}{\tau^2 + 1} \frac{d\tau}{\Pi_*(\tau)}, \qquad z = \sigma_+\left(\rho \frac{\xi - i}{\xi + i}\right) \in D_{z,\rho}^+, \qquad \operatorname{Im} \xi > 0,$$

голоморфной в области $D^+_{z,\rho}$, удовлетворяют уравнению (60) при $F = F_\rho$. Заметим, что при этом выполняется равенство $F_\rho(\sigma_+(0)) = 0$.

Рассмотрим теперь два уравнения вида (60) при $\rho = \rho_1$ и $\rho = \rho_2$, где $0 < \rho_1 < \rho_2 < 1$, а также их решения F_{ρ_1} и F_{ρ_2}. Из единственности решения задачи Дирихле для функции тока Стокса в области $D_{\rho_2} := \{(x, y):\ z = x + iy \in D^+_{z,\rho_2}\}$ с заданными граничными значениями $\psi(x, y)$, $(x, y) \in \partial D_{\rho_2}$, следует, что функция F_{ρ_2} является также решением уравнения (60) при $\rho = \rho_1$. Поскольку граница области D^+_{z,ρ_1} является аналитической кривой, то к этой области применима теорема 3. Из этой теоремы следует, что при всех $z \in D^+_{z,\rho_1}$ выполняется равенство $F_{\rho_2}(z) = F_{\rho_1}(z) + C_0$, где C_0 — некоторая действительная постоянная. Поскольку при этом значения функций F_{ρ_1} и F_{ρ_2} совпадают в точке $\sigma_+(0)$, то $C_0 = 0$.

Следовательно, функции F_ρ при различных значениях $\rho \in (0; 1)$ являются сужением на область $D^+_{z,\rho}$ голоморфной в области D^+_z функции F_0, удовлетворяющей равенству (6) при $F = F_0$ и всех $(x, y) \in D$. Теперь, используя теорему 3, заключаем, что любая голоморфная в D^+_z функция F, удовлетворяющая условию (8) и равенству (6) при всех $(x, y) \in D$, выражается равенством $F(z) = F_0(z) + C$, где C — некоторая действительная постоянная. Доказательство завершено.

Аналогично доказывается теорема 2. При этом используется отображение σ_- вместо отображения σ_+ и теорема 4 вместо теоремы 3.

4. Внешняя задача Дирихле для функции тока Стокса в случае, когда граница области — единичная окружность. Отметим, что в случае, когда областью D является единичный круг, при доказательстве теоремы 5 работы [9] уравнение (10) несколько иным путем редуцировано не к уравнению (18), а к характеристическому сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши, в котором искомая функция

$$u_*(\xi) = \xi^{-1} \int\limits_0^{\xi} \operatorname{Re} \frac{-2iF_*(\tau)}{\tau + i}\, d\tau$$

найдена в явном виде. По такой же схеме доказывается следующая теорема, в которой устанавливается формула решения задачи Дирихле для функции тока Стокса в случае, когда область D является дополнением к замыканию единичного круга.

Теорема 8. *Пусть* $D = \{(x, y):\ x^2 + y^2 > 1\}$, *а функция* $\psi_{\partial D}$ *принадлежит классу* $\widetilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D)$, $1/2 < \alpha \le 1$, *и удовлетворяет условиям* (15), (16). *Тогда решение задачи Дирихле для функции тока Стокса в области* D *выражается формулой*

$$\psi(x, y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial D_z} \dfrac{G_*\left(i\dfrac{1+t}{1-t}\right)(t - x)}{\sqrt{(t - z)(t - \overline{z})}}\, dt & \text{при } y \ne 0; \\ 0 & \text{при } y = 0, \end{cases} \tag{61}$$

в которой $z = x + iy$,

$$G_*(\xi) = (\xi - i)^2 U(|\xi|) + \frac{2\xi(\xi-i)^2}{\pi i}\int_0^\infty \frac{U(\tau)}{\tau^2-\xi^2}\,d\tau \quad \forall \xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \tag{62}$$

где

$$U(\tau) = \frac{2\tau}{(\tau^2+1)^2}\,g(\tau) + \frac{\tau^2}{\tau^2+1}\,g'(\tau) +$$

$$+ \frac{2(1-\tau^2)}{\pi(\tau^2+1)}\int_0^\infty \frac{sg(s)}{(s^2+1)(s^2-\tau^2)}\,ds + \frac{2}{\pi(\tau^2+1)}\int_0^\infty \frac{s^2 g'(s)}{s^2-\tau^2}\,ds, \tag{63}$$

$$g(\tau) = -\int_0^\tau \frac{(s^2+1)\psi_*(s)}{2s\sqrt{\tau^2-s^2}}\,ds, \tag{64}$$

а функция ψ_* *связана с заданными граничными значениями* $\psi_{\partial D}$ *равенством* (21).

Доказательство. Очевидно, что в этом случае $b_1 = -1$ и $b_2 = 1$.

Рассмотрим интегральное уравнение (11), в котором искомая функция F должна быть непрерывной на множестве $\overline{D_z^-}\setminus\{-1;1\}$, голоморфной в области D_z^-, удовлетворять условию (8) и оценке вида (12), а также иметь в бесконечно удаленной точке нуль не ниже второго порядка.

Учитывая, что при замене переменных $t = \dfrac{\tau+i}{\tau-i}$, $z = \dfrac{\xi+i}{\xi-i}$, где $\tau, \xi \in \mathbb{R}$, справедливы равенства

$$t - x = t - \frac{1}{2}(z+\bar z) = \frac{\tau+i}{\tau-i} - \frac{1}{2}\left(\frac{\xi+i}{\xi-i}+\frac{\xi-i}{\xi+i}\right) = \frac{2(\tau+i\xi^2)}{(\tau-i)(\xi^2+1)},$$

$$\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}\right)^+ = -\frac{2i}{(\tau-i)\sqrt{\xi^2+1}}\sqrt{\xi^2-\tau^2} \quad \forall t \in \partial D_z^-,$$

путем таких же рассуждений, как и при доказательстве теоремы 5 из [9], интегральное уравнение (11) приводим к характеристическому сингулярному уравнению с ядром Коши

$$\xi u_*(\xi) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u_*(s)}{s-\xi}\,ds = \hat g(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{65}$$

Здесь

$$u_*(\xi) := \xi^{-1}\int_0^\xi \operatorname{Re}\frac{F\left(\dfrac{\tau+i}{\tau-i}\right)}{(\tau-i)^2}\,d\tau,$$

$$\hat g(\tau) := \begin{cases} g(\tau) & \text{при } \tau > 0; \\ -g(-\tau) & \text{при } \tau < 0, \end{cases}$$

а функция g определяется формулой (64).

Поскольку индекс [19, с. 176] уравнения (65)

$$\kappa := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\arg\frac{\xi+i}{\xi-i} = -1,$$

то его решение u_* находится по формуле

$$u_*(\xi) = \frac{\xi}{\xi^2+1}\,\hat{g}(\xi) + \frac{1}{\pi(\xi+i)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{g}(s)}{s-i}\frac{ds}{s-\xi}, \tag{66}$$

если при этом выполняется условие разрешимости характеристического сингулярного уравнения [19, с. 190]:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{g}(s)}{s^2+1}\,ds = 0.$$

Заметим, что условие выполняется вследствие нечетности функции $\hat{g}$.

Также с учетом нечетности функции $\hat{g}$ преобразуем формулу (66) к виду

$$u_*(\xi) = \frac{\xi}{\xi^2+1}\,\hat{g}(\xi) + \frac{\xi-i}{\pi(\xi^2+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{g}(s)}{s-i}\frac{ds}{s-\xi} =$$

$$= \frac{\xi}{\xi^2+1}\,\hat{g}(\xi) + \frac{1}{\pi(\xi^2+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{g}(s)}{s-\xi}\,ds - \frac{1}{\pi(\xi^2+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s\,\hat{g}(s)}{s^2+1}\,ds.$$

Далее с учетом леммы 8 из [9] получаем

$$\operatorname{Re}\frac{F\left(\dfrac{\tau+i}{\tau-i}\right)}{(\tau-i)^2} = \frac{d}{d\xi}\left(\xi u_*(\xi)\right) = \frac{2\xi}{(\xi^2+1)^2}\,\hat{g}(\xi) + \frac{\xi^2}{\xi^2+1}\,\hat{g}'(\xi) +$$

$$+ \frac{1-\xi^2}{\pi(\xi^2+1)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{g}(s)}{s-\xi}\,ds + \frac{1}{\pi(\xi^2+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s\,\hat{g}'(s)}{s-\xi}\,ds -$$

$$- \frac{1-\xi^2}{\pi(\xi^2+1)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s\,\hat{g}(s)}{s^2+1}\,ds = U(|\xi|) \quad \forall\,\xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\},$$

где функция U определяется равенством (63).

Теперь, используя решение задачи Шварца для полуплоскости [15, с. 209], находим функцию $G_*(\xi) := F\left(\dfrac{\xi+i}{\xi-i}\right)$:

$$G_*(\xi) = \frac{(\xi-i)^2}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U(|\tau|)}{\tau-\xi}\,d\tau \quad \forall\,\xi\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Im}\xi > 0.$$

Функция G_* непрерывно продолжается из верхней полуплоскости $\{\xi\in\mathbb{C}: \operatorname{Im}\xi>0\}$ на множество $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и может иметь слабостепенной рост в окрестностях бесконечно удаленной точки и точки 0. Это устанавливается аналогично тому, как при доказательстве теоремы 5 из [9] установлены аналогичные свойства функции F_*.

Следовательно, функция $F(t) := G_*\left(i\,\dfrac{1+t}{1-t}\right)$ является решением интегрального уравнения (11) и, кроме того, удовлетворяет условию (8) и оценке вида (12). Поскольку при этом она имеет в бесконечно удаленной точке нуль не ниже второго порядка, выполняется также условие (5).

Таким образом, решение задачи Дирихле для функции тока Стокса выражается формулой (61), в которой предельные значения функции G_* на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

выражаются по формуле Сохоцкого [19, с. 47] и с учетом четности функции $U(|\xi|)$ записываются в виде (62). Теорема доказана.

Автор признателен И. П. Мельниченко за полезные обсуждения результатов работы.

1. *Михайлов Л. Г., Раджабов Н.* Аналог формулы Пуассона для некоторых уравнений второго порядка с сингулярной линией // Докл. АН ТаджССР. – 1972. – **15**, № 11. – С. 6 – 9.
2. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. – М.: Наука, 1977. – 408 с.
3. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
4. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. – М.: Мир, 1973. – 758 с.
5. *Плакса С. А.* Об интегральных представлениях осесимметричного потенциала и функции тока Стокса в областях меридианной плоскости. I // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 5. – С. 631 – 646.
6. *Мельниченко И. П., Плакса С. А.* Потенциальные поля с осевой симметрией и алгебры моногенных функций векторного аргумента. I // Там же. – 1996. – **48**, № 11. – С. 1518 – 1529.
7. *Мельниченко И. П., Плакса С. А.* Потенциальные поля с осевой симметрией и алгебры моногенных функций векторного аргумента. II // Там же. – № 12. – С. 1695 – 1703.
8. *Плакса С. А.* Задачи Дирихле для осесимметричных потенциальных полей в круге меридианной плоскости. I // Там же. – 2000. – **52**, № 4. – С. 491 – 511.
9. *Плакса С. А.* Задачи Дирихле для осесимметричных потенциальных полей в круге меридианной плоскости. II // Там же. – № 6. – С. 748 – 757.
10. *Плакса С. А.* Задача Дирихле для осесимметричного потенциала в односвязной области меридианной плоскости // Там же. – 2001. – **53**, № 12. – С. 1623 – 1640.
11. *Плакса С. А.* К решению внешней задачи Дирихле для осесимметричного потенциала // Там же. – 2002. – **54**, № 12. – С. 1634 – 1641.
12. *Салаев В. В.* Прямые и обратные оценки для особого интеграла Коши по замкнутой кривой // Мат. заметки. – 1976. – **19**, № 3. – С. 365 – 380.
13. *David G.* Operateurs intégraux sur certaines courbes du plan complexe // Ann. sci. Ecole Supér. Ser. 4. – 1984. – **14**, № 1. – P. 157 – 189.
14. *Плакса С. А.* Об интегральных представлениях осесимметричного потенциала и функции тока Стокса в областях меридианной плоскости. II // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 6. – С. 800 – 809.
15. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
16. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 540 с.
17. *Салаев В. В.* Некоторые свойства сингулярного оператора // Уч. зап. Азербайдж. ун-та. Сер. физ.-мат. наук. – 1966. – № 6. – С. 12 – 17.
18. *Хведелидзе Б. В.* Метод интегралов типа Коши в разрывных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. математики. – 1975. – 7. – С. 5 – 162.
19. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
20. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 511 с.

Получено 26.12.2001