УДК 519.633

А. Н. Витюк (Одес. нац. ун-т)

РАЗРЕШИМОСТЬ ТРЕХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

We investigate the existence of solutions of a three-point boundary-value problem for second order differential inclusion.

Досліджено існування розв'язків трьохточкової крайової задачі для диференціального включення другого порядку.

В работе [1] впервые была сформулирована и исследована нелокальная краевая задача для эллиптических дифференциальных уравнений (задача Бицадзе – Самарского).

Аналогичная задача для одного линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка рассматривалась, например, в [2, 3], а для системы линейных дифференциальных уравнений — в [4].

В данной работе рассматривается задача

$$y''(x) \in F(x, y(x), y'(x)), \tag{1}$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = cy(a), \quad 0 < a < 1, \quad ac \neq 1, \tag{2}$$

для которой получены условия существования решений. Дифференциальное включение (1) с краевыми условиями

$$y(0) = y(1) = 0$$

рассмотрено в [5].

1. Введем следующие обозначения. Пусть (X, ρ_X) — метрическое пространство. $\rho_X(b, A) = \inf_{\alpha \in A} \rho_X(b, a)$ — расстояние между точкой и множеством в X. Через $\operatorname{comp} X$ обозначим пространство непустых замкнутых и ограниченных подмножеств X с метрикой Хаусдорфа

$$\alpha_X(A, B) = \max\left(\sup_{a \in A} \rho_X(a, B), \sup_{b \in B} \rho_X(b, A) \right)$$

для любых ограниченных подмножеств A и B пространства X. $\operatorname{cl} X$ — пространство непустых замкнутых подмножеств X. Многозначное отображение $F: X \to \operatorname{comp} Y$ полунепрерывно снизу в точке x_0, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для $x \in X$, $\rho_X(x, x_0) < \delta$ имеет место включение

$$F(x_0) \subset \{ y \in Y: \rho_Y(y, F(x)) < \varepsilon \}.$$

Функцию $\varphi : X \to Y$ назовем селектором многозначного отображения F: $X \to \operatorname{comp} Y$, если $\varphi(x) \in F(x)$, $x \in X$.

Пусть E^n — пространство векторов размерности n с нормой $\|\cdot\|$ и нулевым элементом θ; $C(I, E^n), C^1(I, E^n), L_1(I, E^n)$ — соответственно пространства непрерывных, непрерывно дифференцируемых, суммируемых функций f: $I \to E^n$, $I = [0; 1]$ с нормами

$$\|f\|_C = \max_{t \in I} \|f(t)\|, \qquad \|f\|_{C^1} = \max\left(\|f\|_C, \|f'\|_C\right),$$

$$\|f\|_{L_1} = \int_0^1 \|f(t)\| dt;$$

$W^{2,1}(I, E^n)$ — пространство Соболева функций $f\colon I \to E^n$ таких, что f, f' — абсолютно непрерывные функции, с нормой $\|f\|_{W^{1,2}} = \|f\|_{L_1} + \|f'\|_{L_1} + \|f''\|_{L_1}$.

Говорят, что множество $S \subset L_1(I, E^n)$ выпукло по переключению [6, с. 898], если для любых $u, v \in S$ и любых измеримых подмножеств I_1, I_2 множества I таких, что $I_1 \bigcup I_2 = I$, $I_1 \bigcap I_2 = \varnothing$, имеет место включение $\chi(I_1) \cdot u + \chi(I_2) \cdot v \in$ $\in S$, где $\chi(I_i)$ — характеристическая функция множества I_i. Отображение $T\colon S \to \operatorname{cl} L_1(I, E^n)$ выпукло по переключению, если $T(s)$ выпукло по переключению для каждого $s \in S$.

Доказательство теоремы существования решений задачи (1), (2) опирается на следующее утверждение.

Теорема 1 [7, с. 123]. *Пусть S — компакт и отображение $T\colon S \to \operatorname{cl} L_1(I, E^n)$ выпукло по переключению и полунепрерывно снизу. Тогда существует непрерывный селектор $\tau\colon S \to \operatorname{cl} L_1(I, E^n)$ отображения T, т. е. $\tau(s) \in T(s)$, $s \in S$.*

Если Y — хаусдорфово топологическое пространство, то подмножество $A \subset Y$ называем ретрактом этого пространства, если существует непрерывное отображение $r\colon Y \to A$ такое, что $r(a) = a$ для $a \in A$. Любой ретракт пространства Y замкнут в этом пространстве [8, с. 13].

2. Под решением задачи (1), (2) понимаем функцию $y(x) \in W^{2,1}(I, E^n)$, которая удовлетворяет условиям (2) и включению (1) для почти всех (п. в.) $x \in I$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y''(x) = f(x), \quad f(x) \in L_1(I, E^n). \tag{3}$$

Решением задачи (3), (2) является функция

$$y(x) = B(f)(x) \equiv \int_0^x (x-t) f(t)\,dt + \frac{cx}{1-ac}\int_0^a (a-t) f(t)\,dt -$$

$$- \frac{x}{1-ac}\int_0^1 (1-t) f(t)\,dt. \tag{4}$$

Согласно теореме 1 работы [3] это решение единственно.

Теорема 2. *Пусть многозначное отображение $F\colon I \times E^n \times E^n \to \operatorname{comp} E^n$ удовлетворяет условиям:*

а) *для любых $(y, u) \in E^n \times E^n$ отображение $x \to F(x, y, u)$ измеримо*;

б) $|F(x, y, u)| = \alpha_{E^n}(F(x, y, u), \theta) \le M$;

в) *отображение $(y, u) \to F(x, y, u)$ непрерывно для п. в. $x \in I$.*

Тогда множество решений $H(F)$ задачи (1), (2) *непусто.*

Доказательство. Обозначим через S множество измеримых функций $f\colon$ $I \to E^n$ таких, что $\|f(x)\| \le M$ для п. в. $x \in I$. Пусть $D = \{B(f)(x)\colon f \in S\}$. Докажем, что D компактно в $C^1(I, E^n)$.

Из последовательностей $\{B(f_n)(x)\}$, $\{(B(f_n))'(x)\}$ согласно теореме Арцела можно выделить подпоследовательности, которые равномерно на I сходятся соответственно к $u(x)$ и $v(x)$. Последовательность $\{f_n\} \subset L_1(I, E^n)$ является слабокомпактной [9, с. 169]. Следовательно, из нее можно выделить подпоследовательность (для подпоследовательностей сохраняем те же обозначения, что и для последовательностей), которая слабо сходится к $f(x) \in$ $\in L_1(I, E^n)$. По теореме Мазура существует последовательность выпуклых комбинаций

$$\omega_m(x) = \sum_{k=0}^{r(m)} \gamma_k^{(m)} f_{m+k}(x), \quad \gamma_k^{(m)} \geq 0, \qquad \sum_{k=0}^{r(m)} \gamma_k^{(m)} = 1,$$

такая, что $\|f(x) - \omega_m(x)\|_{L_1} \to 0$ при $m \to \infty$. Следовательно, существует подпоследовательность такая, что $\omega_m(x) \to f(x)$, $m \to \infty$, почти всюду на I, причем $\|f(x)\| \leq M$, так как $\|\omega_m(x)\| \leq M$. Из соотношения

$$\sum_{k=0}^{r(m)} \gamma_k^{(m)} B(f_{m+k})(x) = B(\omega_m(x))$$

при $m \to \infty$ следует $u(x) = B(f)(x)$. Аналогично доказываем, что $v(x) = (B(f))'(x) = u'(x)$.

На компакте D определим многозначное отображение

$$R(u) = \{ f(x) \in L_1(I, E^n) : f(x) \in F(x, u(x), u'(x)) \quad \text{для п. в.} \quad x \in I \}.$$

Согласно условиям а), б) $R(u)$ непусто и $\|f(x)\| \leq M$ почти всюду на I. Очевидно, что $R(u)$ выпукло по переключению. Докажем его замкнутость.

Пусть $\{f_k\} \subset R(u)$ и $\|f_k - f\|_{L_1} \to 0$, $k \to \infty$. Тогда существует подпоследовательность, которая почти всюду на I сходится к $f(x)$. Поскольку $F(x, u(x), u'(x))$ — замкнутое множество, то $f(x) \in F(x, u(x), u'(x))$ для п. в. $x \in I$. Таким образом, $R(u)$ — отображение в пространство $\operatorname{cl} L_1(I, E^n)$. Докажем, что многозначное отображение $R(u)$ полунепрерывно снизу. Воспользуемся тем, что $R(u)$ полунепрерывно снизу при $u_0 \in D$ тогда и только тогда, когда [10, с. 34] для каждой последовательности $\{u_k\} \subset D$, сходящейся к u_0, и любого $f_0 \in R(u_0)$ существует последовательность $\{f_k\}$, $f_k \in R(u_k)$, сходящаяся к f_0.

Пусть $f_k(x)$ — такой измеримый селектор многозначного отображения $F(x, u_k(x), u_k'(x))$, что [10, с. 49] для п. в. $x \in I$

$$\|f_k(x) - f_0(x)\| = \rho_{E^n}(f_0(x), F(x, u_k(x), u_k'(x))) \leq$$
$$\leq \alpha_{E^n}(F(x, u_0(x), u_0'(x)), F(x, u_k(x), u_k'(x))).$$

Отсюда с учетом условия в) следует, что $f_k(x) \to f_0(x)$ почти всюду на I, а так как $\|f_k(x)\| \leq M$ для п. в. $x \in I$, то $\|f_k - f_0\|_{L_1} \to 0$, $k \to \infty$.

Теперь в силу теоремы 1 у многозначного отображения R существует непрерывный селектор $\tau: D \to L_1(I, E^n)$ такой, что $\tau(u)(x) \in F(x, u(x), u'(x))$ для п. в. $x \in I$.

Пусть $R(D) = \bigcup (R(u) : u \in D)$. Рассмотрим отображение $T: R(D) \to D$, где $T(f)(x) = B(f)(x)$. Используя (4), для f, $f_0 \in R(D)$ имеем оценки

$$\begin{aligned} &\| B(f)(x) - B(f_0)(x) \|_C \leq A \| f - f_0 \|_{L_1}, \\ &\| (B(f))'(x) - (B(f_0))'(x) \|_C \leq A \| f - f_0 \|_{L_1}, \end{aligned} \tag{5}$$

где $A = (1 + |c| + |1 - ac|)/|1 - ac|$. Следовательно,

$$\| T(f)(x) - T(f_0)(x) \|_{C^1} \leq A \| f - f_0 \|_{L_1}. \tag{6}$$

Рассмотрим далее отображение $T(\tau(u)): D \to D$. В силу (6)

$$\| T(\tau(u))(x) - T(\tau(u_0))(x) \|_{C^1} \le A \| \tau(u)(x) - \tau(u_0)(x) \|_{L_1}.$$

Таким образом, отображение $T: D \to D$ является непрерывным и согласно теореме Шаудера имеет неподвижную точку $u_0 \in D$, т. е. $u_0 = T(\tau(u_0))$. Поскольку $u_0''(x) = \tau(u_0)(x) \in F(x, u_0(x), u_0'(x))$ почти всюду на I, множество $H(F)$ непусто.

3. Теорема 3. *Пусть* $F: I \times E^n \times E^n \to \operatorname{comp} E^n$ *удовлетворяет условиям а), б) теоремы 2 и для любых* (y, u), $(y_1, u_1) \in E^n \times E^n$

$$\alpha_{E^n}(F(x, y, u), F(x, y_1, u_1)) \le K_1 \| y - y_1 \| + K_2 \| u - u_1 \| \quad \text{для п. в. } x \in I,$$

причем $K = A(K_1 + K_2) < 1$.

Тогда $H(F)$ *является ретрактом пространства* $W^{2,1}(I, E^n)$.

Доказательство. Для $f \in L_1(I, E^n)$ рассмотрим множество

$$G(f) = \{ v \in L_1(I, E^n) :$$
$$v(x) \in F(x, B(f)(x), (B(f))'(x)) \text{ для п. в. } x \in I \}.$$

В силу условий а), в) множество $G(f)$ непусто и ограничено. Кроме того, $G(f)$ выпукло по переключению и замкнуто (замкнутость доказывается, как и замкнутость $R(u)$).

Обозначим через $P(L_1)$ совокупность непустых замкнутых ограниченных и выпуклых по переключению подмножеств пространства $L_1(I, E^n)$. Тогда $G: L_1(I, E^n) \to P(L_1)$.

Докажем, что G — сжимающее отображение, т. е. для $f, f_0 \in L_1(I, E^n)$

$$\alpha_{P(L_1)}(G(f), G(f_0)) \le K \| f - f_0 \|_{L_1}. \tag{7}$$

Пусть $\varphi(x)$ — некоторый измеримый селектор $G(f_0)$, т. е.

$$\varphi(x) \in F(x, B(f_0)(x), B(f)(x)) \quad \text{для} \quad \text{п. в.} \quad x \in I.$$

Поскольку

$$\alpha_{E^n}\Big(F\big(x, B(f_0)(x), (B(f_0))'(x)\big), F\big(x, B(f)(x), (B(f))'(x)\big)\Big) \le$$
$$\le K_1 \| B(f_0)(x) - B(f)(x) \| + K_2 \| (B(f_0))'(x) - (B(f))'(x) \|,$$

существует измеримый селектор

$$\psi(x) \in F(x, B(f)(x), (B(f))'(x))$$

такой, что почти всюду на I

$$\| \varphi(x) - \psi(x) \| \le K_1 \| B(f_0)(x) - B(f)(x) \| + K_2 \| (B(f_0))'(x) - (B(f))'(x) \|.$$

Отсюда и из (5) следует оценка

$$\| \varphi(x) - \psi(x) \|_{L_1} \le K \| f(x) - f_0(x) \|_{L_1}. \tag{8}$$

Аналогично доказываем, что любому измеримому селектору $\psi(x) \in G(f)$ можно поставить в соответствие такой измеримый селектор $\varphi(x) \in G(f_0)$, для которого справедлива оценка (8).

Этим завершается доказательство соотношения (7).

Следовательно, множество неподвижных точек $\operatorname{Fix} G$ многозначного отображения G непусто и замкнуто [11] и является [12] ретрактом пространства $L_1(I, E^n)$, т. е. существует непрерывное отображение $r: L_1(I, E^n) \to \operatorname{Fix} G$ такое, что $r(f) = f$, $f \in \operatorname{Fix} G$. Заметим, что если $f \in \operatorname{Fix} G$, то $B(f)(x)$ — решение задачи (1), (2). Докажем, что $H(f)$ является ретрактом пространства $W^{2,1}(I, E^n)$. Для $u \in W^{2,1}(I, E^n)$ полагаем $Q(u)(x) = B(r(u''))(x)$. Поскольку $r(u'') \in \operatorname{Fix} G$, то

$$r(u'') \in F(x, B(r(u''))(x), (B(r(u'')))'(x)),$$

т. е. $B(r(u''))(x)$ — решение задачи (1), (2). Таким образом, $Q: W^{2,1}(I, E^n) \to \to H(F)$.

Докажем, что $Q(u)$ непрерывно. Пусть $u, u_0 \in W^{2,1}(I, E^n)$. Опираясь на оценки (5), получаем

$$\|Q(u_0) - Q(u)\|_{L_1} = \int_0^1 \|B(r(u_0'')) - B(r(u''))\| dx \le A\|r(u_0'') - r(u'')\|_{L_1},$$

$$\|Q'(u_0) - Q'(u)\|_{L_1} \le A\|r(u_0'') - r(u'')\|_{L_1},$$

$$\|Q''(u_0) - Q''(u)\|_{L_1} = \|r(u_0'') - r(u'')\|_{L_1}.$$

Следовательно,

$$\|Q(u_0) - Q(u)\|_{W^{2,1}} \le (2A+1)\|r(u_0'') - r(u'')\|_{L_1}. \tag{9}$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку $r: L_1(I, E^n) \to \operatorname{Fix} G$ непрерывно, то существует $\delta(\varepsilon)$ такое, что $\|r(u_0'') - r(u'')\|_{L_1} < \varepsilon/(2A+1)$, если $\|u_0'' - u''\|_{L_1} < \delta$. Теперь для $u \in W^{2,1}(I, E^n)$ таких, что $\|u_0 - u\|_{W^{2,1}} < \delta$ (следовательно, $\|u_0'' - u''\|_{L_1} < \delta$), получим с учетом оценки (9) $\|Q(u_0) - Q(u)\|_{W^{2,1}} < \varepsilon$.

Осталось проверить, что $Q(u) = u$ для $u \in H(F)$. Поскольку для п. в. $x \in I$

$$u''(x) \in F(x, u(x), u'(x)) = F(x, B(u'')(x), (B(u''))'(x)),$$

то согласно определению отображения G получим $u'' \in \operatorname{Fix} G$. Поэтому $r(u'') = u''$ и $Q(u) = B(r(u''))(x) = B(u'')(x) = u$. Теорема 3 доказана.

***Следствие* 1.** *Множество $H(F)$ является замкнутым подмножеством пространства $W^{2,1}(I, E^n)$.*

***Следствие* 2.** *Множество $H(F)$ является линейно связным и стягиваемым.*

Действительно, пусть y_1, y_2 — произвольные элементы множества $H(F)$ и $\gamma(t) = Q(ty_2 + (1-t)y_1)$, $t \in I$. Поскольку $y_t = ty_2 + (1-t)y_1 \in W^{2,1}(I, E^n)$, то $Q(y_t) \in H(F)$. Кроме того, отображение $\gamma: I \to H(F)$ непрерывно и $\gamma(0) = y_1$, $\gamma(1) = y_2$. Следовательно, $\gamma(t)$ является путем, соединяющим y_1 и y_2. Таким образом, $H(F)$ является линейно связным, а значит, и связным множеством [13, с. 85].

Докажем, что $H(F)$ — стягиваемое множество. С этой целью убедимся в том, что [13, с. 144] тождественное отображение $\lambda: H(F) \to H(F)$ гомотопно постоянному отображению $\beta: H(F) \to \{y_0\}$, $y_0 \in H(F)$, т. е. существует [13, с. 144] непрерывное отображение $\sigma: H(F) \times I \to H(F)$ такое, что $\sigma(0, y) =$

$= \beta(y)$, $\sigma(1, y) = \lambda(y)$. Полагаем $\sigma(t, y) = Q(ty + (1-t)y_0)$. Очевидно, что $\sigma(t, y)$ — непрерывное отображение и $\sigma(0, y) = Q(y_0) = y_0$, $\sigma(1, y) = Q(y) = y$. Следовательно, в качестве гомотопии между $\lambda(y)$ и $\beta(y)$ можно взять $\sigma(t, y)$.

1. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. – 1969. – **185**, № 4. – С. 739–740.
2. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Нелокальная краевая задача первого рода для оператора Штурма – Лиувилля в дифференциальной и разностной трактовках // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 7. – С. 1198–1207.
3. *Сапаговас М. П., Чегис Р. Ю.* О некоторых краевых задачах с нелокальными условиями // Там же. – С. 1268 – 1274.
4. *Сапаговас М. П.* Краевая задача с нелокальным условием для системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Там же. – 2000. – **36**, № 7. – С. 971–978.
5. *De Blasi S. F., Pianigiani G.* Solution sets of boundary value problems for nonconvex differential inclusions // Topological Methods in Nonlinear Anal. – 1993. – **1**. – P. 303–313.
6. *Богатырев А. В.* Неподвижные точки и свойства решений дифференциальных включений // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1983. – **47**, № 4. – С. 895–909.
7. *Fryszkowski A.* Continuous selections for a class of nonconvex multivalued maps // Stud. math. – 1983. – **76**. – P. 163–164.
8. *Барсук К.* Теория ретрактов. – М.: Мир, 1971. – 291 с.
9. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. – М.: Наука, 1972. – 574 с.
10. *Kisielewicz M.* Differential inclusion and optimal control. – Warszawa: PWN, 1991. – 239 p.
11. *Nadler S. B.* Multivalued contracting mappings // Pacif. J. Math. – 1969. – **30**, № 2. – P. 475–488.
12. *Bressan A., Cellina A., Fryszkowski A.* A class of absolute retracts in spaced of integrable functions // Proc. Amer. Math. Soc. – 1991. – **122**, № 2. – P. 413–418.
13. *Борисович Ю. Г., Близняков Н. М., Израилевич Я. А., Фоменко Т. Н.* Введение в топологию. – М.: Высш. шк., 1980. – 292 с.

Получено 05.03.2001