УДК 517.95

І. Б. Березницька (Львів. нац. ун-т)

ВИЗНАЧЕННЯ ВІЛЬНОГО ЧЛЕНА ТА СТАРШОГО КОЕФІЦІЄНТА В ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ

We consider the inverse problem for finding an unknown time-dependent leading coefficient and a free term in a parabolic equation. Boundary conditions and overdetermination conditions are local. We find the conditions for uniqueness and local existence.

Розглядається обернена задача знаходження невідомого старшого коефіцієнта, що залежить від часу, та вільного члена в параболічному рівнянні. Крайові умови та умови перевизначення є локальними. Знайдено умови єдиності та локального існування.

Теорія обернених задач почала розвиватись відносно недавно, але має широке використання. На відміну від прямих задач, де невідомим є стан досліджуваного об'єкта, в обернених задачах невідомими є ще і деякі з так званих причинних характеристик, до яких відносять граничні умови, початкові умови, коефіцієнти рівняння, геометричні характеристики області. У даній роботі розглядається коефіцієнтна обернена задача. Умовами перевизначення є додаткові крайові умови.

При дослідженні обернених коефіцієнтних задач визначають окремі напрямки стосовно того, що є невідомим в задачі. Розглядалися задачі, в яких невідомим був вільний член, що міг залежати від часової або просторової змінної, або від обох [1]. Багато уваги приділено задачам, де невідомим є старший коефіцієнт, що теж може залежати від однієї або двох змінних [2, 3]. У даній роботі розглядається задача одночасного визначення вільного члена і старшого коефіцієнта для загального рівняння. На відміну від аналогічної задачі для рівняння без молодших членів існування розв'язку даної задачі встановлено на зменшеному часовому проміжку (доведення проводиться за допомогою теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора). Єдиність доводиться на основі властивостей інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду і має місце в цілому.

1. Постановка задачі. В області $\Omega_T = \{(x,t)\colon 0 < x < h,\ 0 < t < T\}$ розглянемо задачу знаходження трійки функцій

$$(a(t), f(t), u(x,t)) \in \left(H^{\alpha/2}[0,T]\right)^2 \times H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_T),$$

$$0 < \alpha < 1, \quad a(t) > 0, \quad f(t) \ge 0, \quad t \in [0,T],$$

що задовольняють рівняння

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(t)g_0(x,t) + g_1(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

початкову умову

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0,h], \tag{2}$$

та крайові умови і умови перевизначення вигляду

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

$$u_x(0,t) = \mu_3(t), \quad u_x(h,t) = \mu_4(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

2. Існування розв'язку. Відносно вихідних даних будемо припускати, що виконуються такі умови:

$A_1)$ $\varphi(x) \in H^{2+\alpha}[0,h]$, $\mu_i(t) \in H^{1+\alpha/2}[0,T]$, $i = \overline{1,4}$, $b(x,t), c(x,t), g_0(x,t), g_1(x,t) \in H^{1+\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$;

A_2) $\varphi''(x) > 0,\ x \in [0, h],\ (\mu_1'(t) - b(0,t)\mu_3(t) - c(0,t)\mu_1(t) - g_1(0,t))g_0(h,t) - (\mu_2'(t) - b(h,t)\mu_4(t) - c(h,t)\mu_2(t) - g_1(h,t))g_0(0,t) > 0,\ g_0(0,t) \le 0,\ g_0(h,t) > 0,$ $\mu_1'(t) - b(0,t)\mu_3(t) - c(0,t)\mu_1(t) - g_1(0,t) \le 0,\quad \mu_2'(t) - b(h,t)\mu_4(t) - c(h,t)\mu_2(t) - g_1(h,t) \ge 0,\ t \in [0, T]$;

A_3) $\varphi'(0) = \mu_1(0),\ \varphi'(h) = \mu_2(0),\ \varphi(0) = \mu_3(0),\ \varphi(h) = \mu_4(0)$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови $A_1 - A_3$. Тоді задача* (1) – (4) *має розв'язок в області $\overline{\Omega}_{T_0}$, де число T_0, $0 < T_0 \le T$, визначається вихідними даними задачі.*

Доведення. Припустивши, що $(a(t), f(t), u(x,t))$ є розв'язком задачі (1) – (4), запишемо рівняння (1) при $x = 0$ та $x = h$ з урахуванням (3) і (4):

$$\mu_1'(t) = a(t)w(0,t) + b(0,t)\mu_3(t) + c(0,t)\mu_1(t) + f(t)g_0(0,t) + g_1(0,t), \tag{5}$$

$$\mu_2'(t) = a(t)w(h,t) + b(h,t)\mu_4(t) + c(h,t)\mu_2(t) + f(t)g_0(h,t) + g_1(h,t), \tag{6}$$

де $w(x,t) = u_{xx}(x,t)$. З рівностей (5), (6), як з системи рівнянь відносно $a(t)$ і $f(t)$, знайдемо

$$\begin{aligned} a(t) = {} & [(\mu_1'(t) - b(0,t)\mu_3(t) - c(0,t)\mu_1(t) - g_1(0,t))g_0(h,t) - \\ & - (\mu_2'(t) - b(h,t)\mu_4(t) - c(h,t)\mu_2(t) - g_1(h,t))g_0(0,t)] \times \\ & \times [w(0,t)g_0(h,t) - w(h,t)g_0(0,t)]^{-1}, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} f(t) = {} & [(\mu_2'(t) - b(h,t)\mu_4(t) - c(h,t)\mu_2(t) - g_1(h,t))w(0,t) - \\ & - (\mu_1'(t) - b(0,t)\mu_3(t) - c(0,t)\mu_1(t) - g_1(0,t))w(h,t)] \times \\ & \times [w(0,t)g_0(h,t) - w(h,t)g_0(0,t)]^{-1}, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{8}$$

Позначимо через

$$G_k(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(r(t) - r(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x - \xi + 2nh)^2}{4(r(t) - r(\tau))} \right) + (-1)^k \exp\left(-\frac{(x + \xi + 2nh)^2}{4(r(t) - r(\tau))} \right) \right), \quad r(t) = \int_0^t a(\tau)\,d\tau,$$

функції Гріна для рівняння теплопровідності $u_t = a(t)u_{xx}$ першої крайової задачі при $k = 1$ і другої крайової задачі при $k = 2$. Введемо позначення $v(x,t) = u_x(x,t)$. Тоді задачу (1), (2), (4) за допомогою відповідної функції Гріна зведемо до системи інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} u(x,t) = {} & \int_0^h G_2(x,t,\xi,0)\varphi(\xi)\,d\xi - \int_0^t G_2(x,t,0,\tau)a(\tau)\mu_3(\tau)\,d\tau + \\ & + \int_0^t G_2(x,t,h,\tau)a(\tau)\mu_4(\tau)\,d\tau + \int_0^t d\tau \int_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)v(\xi,\tau) + \\ & + c(\xi,\tau)u(\xi,\tau) + f(\tau)g_0(\xi,\tau) + g_1(\xi,\tau))\,d\xi, \end{aligned} \tag{9}$$

$$v(x,t) = \int_0^h G_1(x,t,\xi,0)\varphi'(\xi)\,d\xi + \int_0^t G_{1\xi}(x,t,0,\tau)a(\tau)\mu_3(\tau)\,d\tau -$$

$$- \int_0^t G_{1\xi}(x,t,h,\tau)a(\tau)\mu_4(\tau)d\tau + \int_0^t d\tau \int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)w(\xi,\tau) +$$
$$+ (b_\xi(\xi,\tau)+c(\xi,\tau))v(\xi,\tau) + c_\xi(\xi,\tau)u(\xi,\tau) +$$
$$+ f(\tau)g_{0\xi}(\xi,\tau) + g_{1\xi}(\xi,\tau))\,d\xi, \tag{10}$$

$$w(x,t) = \int_0^h G_2(x,t,\xi,0)\varphi''(\xi)d\xi - \int_0^t G_2(x,t,0,\tau)\mu_3'(\tau)d\tau +$$
$$+ \int_0^t G_2(x,t,h,\tau)\mu_4'(\tau)d\tau + \int_0^t d\tau \int_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)w(\xi,\tau) +$$
$$+ (b_\xi(\xi,\tau)+c(\xi,\tau))v(\xi,\tau) + c_\xi(\xi,\tau)u(\xi,\tau) +$$
$$+ f(\tau)g_{0\xi}(\xi,\tau) + g_{1\xi}(\xi,\tau))\,d\xi. \tag{11}$$

Рівняння (10), (11) отримуємо з (9) диференціюванням по x, а при інтегруванні частинами використовуємо співвідношення

$$G_{2x}(x,t,\xi,\tau) = -G_{1\xi}(x,t,\xi,\tau), \qquad G_{1x}(x,t,\xi,\tau) = -G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau),$$
$$a(\tau)G_{2xx}(x,t,\xi,\tau) = -G_{2\tau}(x,t,\xi,\tau).$$

Отже, задачу (1) – (4) зведено до системи рівнянь (7) – (11). З іншого боку, враховуючи спосіб отримання системи рівнянь (7) – (11), якщо

$$(a(t), f(t), u(x,t), v(x,t), w(x,t)) \in \left(H^{\alpha/2}[0,T]\right)^2 \times \left(H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)\right)^3,$$
$$a(t) > 0, \quad t \in [0,T],$$

— розв'язок системи (7) – (11), бачимо, що $(a(t), f(t), u(x,t))$ — розв'язок оберненої задачі (1) – (4). Тому в такому розумінні задача (1) – (4) та система (7) – (11) є еквівалентними. Для дослідження цієї системи застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора [4]. Спочатку встановимо апріорні оцінки розв'язків системи.

Оскільки при $t = 0$ функція $w(x,t) = \varphi''(x) > 0$ і всі доданки, крім першого, правої частини рівняння (11) дорівнюють нулю, існує число T_1, $0 < T_1 \le T$, таке, що

$$\frac{1}{2}\int_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)\varphi''(\xi)d\xi - \Bigg| \int_0^t G_2(x,t,0,\tau)\mu_3'(\tau)\,d\tau +$$
$$+ \int_0^t G_2(x,t,h,\tau)\mu_4'(\tau)\,d\tau + \int_0^t d\tau \int_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\,(b(\xi,\tau)w(\xi,\tau) +$$
$$+ (b_\xi(\xi,\tau)+c(\xi,\tau))v(\xi,\tau) + c_\xi(\xi,\tau)u(\xi,\tau) +$$
$$+ f(\tau)g_{0\xi}(\xi,\tau) + g_{1\xi}(\xi,\tau))\,d\xi \Bigg| \ge 0, \quad t \in [0,T_1]. \tag{12}$$

Тому $a(t) > 0$, $t \in [0,T_1]$, і з (7) маємо

$$a(t) \le \frac{C_1}{\min\limits_{[0,h]}\varphi''(x)\min\limits_{[0,T]}\left(g_0(h,t) - g_0(0,t)\right)},$$

де стала $C_1 > 0$ залежить від вихідних даних задачі, або

$$a(t) \le A_1 < \infty, \quad t \in [0, T_1]. \tag{13}$$

Враховуючи умови A_2 і додатність $w(x, t)$ в області $\overline{\Omega}_{T_1}$, одержуємо $f(t) \ge 0$, $t \in [0, T_1]$. З умови (6) знаходимо

$$a(t)w(h, t) + f(t)g_0(h, t) = \mu_2'(t) - b(h, t)\mu_4(t) - c(h, t)\mu_2(t) - g_1(h, t).$$

Використовуючи додатність обох доданків лівої частини рівності, отримуємо

$$f(t) \le F < \infty, \quad t \in [0, T_1]. \tag{14}$$

Для розв'язку задачі (1), (2), (4) має місце оцінка [5]

$$|u(x, t)| \le M_1 < \infty, \quad x \in [0, h], \quad t \in [0, T_1]. \tag{15}$$

Функцію $v(x, t)$, як розв'язок вказаної нижче задачі

$$v_t = a(t)v_{xx} + b(x, t)v_x + (b_x(x, t) + c(x, t))v + c_x(x, t)u +$$
$$+ f(t)g_{0x}(x, t) + g_{1x}(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T,$$
$$v(x, 0) = \varphi'(x), \quad x \in [0, h],$$
$$v(0, t) = \mu_3(t), \quad v(h, t) = \mu_4(t), \quad t \in [0, T],$$

оцінюємо таким чином [5]:

$$|v(x, t)| \le M_2 < \infty, \quad x \in [0, h], \quad t \in [0, T_1]. \tag{16}$$

Для оцінки $w(x, t)$ позначимо

$$W(t) = \max_{x \in [0, h]} |w(x, t)|.$$

Тоді з рівняння (11) отримаємо нерівність

$$W(t) \le C_2 + C_3 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{r(t) - r(\tau)}} + C_4 \int_0^t \frac{W(\tau)\,d\tau}{\sqrt{r(t) - r(\tau)}},$$

де сталі $C_i > 0$, $i = \overline{2, 4}$, залежать лише від вихідних даних. Функцію $W(t)$ оцінимо аналогічно [6]. Для цього з (7) отримаємо нерівність

$$a(t) \ge \frac{C_5}{W(t)}, \tag{17}$$

де стала $C_5 > 0$ виражається через відомі величини. Тоді наведену вище нерівність для $W(t)$ подамо у вигляді

$$W(t) \le C_2 + C_6 \int_0^t \frac{a(\tau)W(\tau)\,d\tau}{\sqrt{r(t) - r(\tau)}} + C_7 \int_0^t \frac{a(\tau)W^2(\tau)\,d\tau}{\sqrt{r(t) - r(\tau)}},$$

або

$$W_1(t) \le C_8 + C_9 \int_0^t \frac{a(\tau)W_1^2(\tau)\,d\tau}{\sqrt{r(t) - r(\tau)}}, \tag{18}$$

де $W_1(t) = W(t) + 1/2$. Для оцінки інтеграла $\int_0^t \frac{a(\tau)W_1^2(\tau)\,d\tau}{\sqrt{r(t) - r(\tau)}}$ піднесемо нерівність (18) до квадрату, замінимо t на σ, домножимо нерівність на $\frac{a(\sigma)}{\sqrt{r(t) - r(\sigma)}}$ і проінтегруємо по σ від 0 до t. Використовуючи нерівність Коші, отримуємо

$$\int_0^t \frac{a(\sigma)W_1^2(\sigma)\,d\sigma}{\sqrt{r(t)-r(\sigma)}} \le 2C_8^2 \int_0^t \frac{a(\sigma)\,d\sigma}{\sqrt{r(t)-r(\sigma)}} + 2C_9^2 \int_0^t \left(\int_0^\sigma \frac{a(\tau)W_1^2(\tau)\,d\tau}{\sqrt{r(\sigma)-r(\tau)}}\right)^2 \frac{a(\sigma)\,d\sigma}{\sqrt{r(t)-r(\sigma)}}.$$

Враховуючи оцінку (13) і застосовуючи нерівність Коші – Буняковського, зводимо дану нерівність до вигляду

$$\int_0^t \frac{a(\sigma)W_1^2(\sigma)\,d\sigma}{\sqrt{r(t)-r(\sigma)}} \le C_{10} + C_{11} \int_0^t \frac{a(\sigma)\,d\sigma}{\sqrt{r(t)-r(\sigma)}} \int_0^\sigma \frac{a(\tau)W_1^4(\tau)\,d\tau}{\sqrt{r(\sigma)-r(\tau)}}.$$

Змінюючи порядок інтегрування і враховуючи співвідношення

$$\int_\tau^t \frac{a(\sigma)\,d\sigma}{\sqrt{(r(t)-r(\sigma))(r(\sigma)-r(\tau))}} = \pi,$$

отримуємо

$$\int_0^t \frac{a(\sigma)W_1^2(\sigma)\,d\sigma}{\sqrt{r(t)-r(\sigma)}} \le C_{10} + C_{12} \int_0^t W_1^4(\tau)\,d\tau.$$

Отже, нерівність (18) набере вигляду

$$W_1(t) \le C_{13} + C_{14} \int_0^t W_1^4(\tau)\,d\tau. \tag{19}$$

Позначивши праву частину нерівності (19) через $W_2(t)$, матимемо

$$W_2'(t) \le C_{14} W_2^4(t).$$

Поділимо останню нерівність на $W_2^4(t)$ і проінтегруємо від 0 до t. Оскільки $W_2(0) = C_{13}$, одержимо

$$W_2(t) \le \frac{C_{13}}{(1 - 3C_{13}^3 C_{14} t)^{1/3}}, \quad t \in [0, T_2],$$

де число T_2, $0 < T_2 \le T$, повинно задовольняти умову

$$1 - 3C_{13}^3 C_{14} T_2 > 0. \tag{20}$$

Оскільки $W(t) \le W_1(t) \le W_2(t)$, отримуємо оцінку

$$|w(x,t)| \le M_3 < \infty, \quad x \in [0,h], \quad t \in [0, T_2]. \tag{21}$$

Тоді з (17)

$$a(t) \ge A_2 > 0, \quad t \in [0, T_2]. \tag{22}$$

Визначимо довжину відрізка $[0, T_1]$. Число T_1 повинно бути таким, щоб виконувалась умова (12). Оцінимо ліву частину нерівності (12) знизу аналогічно [7]. Тоді число T_1 повинно задовольняти умову

$$C_{15} - C_{16}\sqrt{T_1} - C_{17} T_1 \ge 0, \tag{23}$$

де $C_{15} = \min\limits_{[0,h]} \varphi''(x) > 0$, а C_{16}, C_{17} — додатні сталі, що виражаються через $A_1, A_2, F, M_1, M_2, M_3$ та вихідні дані задачі.

Позначимо $g(t) = (a, f, u, v, w)$,

$$N = \{(a(t), f(t), u(x,t), v(x,t), w(x,t)) \in (C[0, T_0])^2 \times (C(\overline{\Omega}_{T_0}))^3 :$$
$$A_2 \le a(t) \le A_1, \quad 0 \le f(t) \le F,$$
$$|u(x,t)| \le M_1, \ |v(x,t)| \le M_2, \ |w(x,t)| \le M_3\},$$

де число $T_0 = \min\{T_1, T_2\}$. Систему рівнянь (8) – (12) запишемо у вигляді операторного рівняння

$$g = Pg, \tag{24}$$

де оператор P переводить N в N. Аналогічно [7] встановлюємо, що оператор P є цілком неперервним. Тоді на основі теореми Шаудера встановлюємо існування розв'язку. Покажемо, що знайдений розв'язок має потрібну гладкість. З (11) на підставі умов A_1 та властивості теплових потенціалів [8] випливає $w(x, t) \in H^{\alpha, \alpha/2}(\overline{\Omega}_{T_0})$. Тоді з рівнянь (7) та (8) і умов теореми маємо $a(t), f(t) \in H^{\alpha/2}[0, T_0]$. Встановивши гладкість $a(t)$ та $f(t)$ і використавши умови A_1, отримаємо $u(x, t) \in H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_{T_0})$ [5].

3. Єдиність розв'язку.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови:*

A_4) $b(x, t), c(x, t), g_0(x, t) \in H^{\alpha, \alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$;

A_5) $(\mu_1'(t) - b(0, t)\mu_3(t) - c(0, t)\mu_1(t) - g_1(0, t))g_0(h, t) - (\mu_2'(t) - b(h, t)\mu_4(t) - c(h, t)\mu_2(t) - g_1(h, t))g_0(0, t) \neq 0$.

Тоді якщо задача (1) – (4) *має розв'язок, то він єдиний в області* $\overline{\Omega}_T$.

Доведення. Припустимо, що задача (1) – (4) має два різні розв'язки $(a_i(t), f_i(t), u_i(x, t))$, $i = 1, 2$. Тоді їх різниця $(d(t), s(t), z(x, t))$ є розв'язком задачі

$$z_t = a_1(t)z_{xx} + b(x, t)z_x + c(x, t)z + d(t)u_{2xx} + s(t)g_0(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \tag{25}$$

$$z(x, 0) = 0, \quad x \in [0, h], \tag{26}$$

$$z_x(0, t) = z_x(h, t) = 0, \quad t \in [0, T], \tag{27}$$

$$z(0, t) = z(h, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \tag{28}$$

Покладемо в (25) $x = 0$ та $x = h$, врахувавши (27) і (28):

$$0 = a_1(t)z_{xx}(0, t) + d(t)u_{2xx}(0, t) + s(t)g_0(0, t), \tag{29}$$

$$0 = a_1(t)z_{xx}(h, t) + d(t)u_{2xx}(h, t) + s(t)g_0(h, t). \tag{30}$$

Оскільки на підставі (1), (3), (4) та умови A_5

$$u_{2xx}(0, t)g_0(h, t) - u_{2xx}(h, t)g_0(0, t) =$$

$$= \frac{1}{a_2(t)}\left[(\mu_1'(t) - b(0, t)\mu_3(t) - c(0, t)\mu_1(t) - g_1(0, t))g_0(h, t) - \right.$$

$$\left. - (\mu_2'(t) - b(h, t)\mu_4(t) - c(h, t)\mu_2(t) - g_1(h, t))g_0(0, t)\right] \neq 0,$$

систему (29), (30) запишемо у вигляді

$$d(t) = \frac{a_1(t)(z_{xx}(h, t)g_0(0, t) - z_{xx}(0, t)g_0(h, t))}{u_{2xx}(0, t)g_0(h, t) - u_{2xx}(h, t)g_0(0, t)}, \tag{31}$$

$$s(t) = \frac{a_1(t)(z_{xx}(0, t)u_{2xx}(h, t) - z_{xx}(h, t)u_{2xx}(0, t))}{u_{2xx}(0, t)g_0(h, t) - u_{2xx}(h, t)g_0(0, t)}, \tag{32}$$

де z_{xx}, як друга похідна від розв'язку задачі (25) – (27), має вигляд

$$z_{xx}(x, t) = \int_0^t \int_0^h G^*_{2xx}(x, t, \xi, \tau)\left(d(\tau)u_{2\xi\xi}(\xi, \tau) + s(\tau)g_0(\xi, \tau)\right)d\xi\, d\tau, \tag{33}$$

а $G_2^*(x, t, \xi, \tau)$ — функція Гріна задачі (25) – (27) [5]. Із урахуванням (33) система (31), (32) набере вигляду

$$d(t) = \int_0^t \left(K_1(t, \tau) d(\tau) + K_2(t, \tau) s(\tau)\right) d\tau, \quad t \in [0, T], \tag{34}$$

$$s(t) = \int_0^t \left(K_3(t, \tau) d(\tau) + K_4(t, \tau) s(\tau)\right) d\tau, \quad t \in [0, T], \tag{35}$$

де $K_i(t, \tau)$ — неперервні при $0 \leq \tau < t \leq T$ і задовольняють оцінку

$$|K_i(t, \tau)| \leq \frac{C_{18}}{\sqrt{t - \tau}},$$

C_{18} — додатна стала, що виражається через відомі величини. Система (34), (35) є однорідною системою інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду, тому вона має єдиний тривіальний розв'язок $d(t) = s(t) = 0$, $t \in [0, T]$ [9]. Звідси $z(x, t) = 0$, $(x, t) \in \overline{\Omega}_T$, як розв'язок однорідної прямої задачі (25) – (27). Отже, теорему доведено.

1. *Прилепко А. И., Соловьев В. В.* Теорема разрешимости и метод Ротэ в обратных задачах для уравнения параболического типа. I // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 10. – С. 1791 – 1799.
2. *Іванчов М. І.* Обернені задачі теплопровідності з нелокальними умовами // Допов. НАН України. – 1997. – № 5. – С. 15 – 21.
3. *Прилепко А. И., Костин А. Б.* Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении. I // Сиб. мат. журн. – 1992. – **33**, № 3. – С. 146 – 155.
4. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
5. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
6. *Пабирівська Н. В.* Багатопараметричні коефіцієнтні обернені задачі для рівнянь параболічного типу: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Чернівці, 2001. – 137 с.
7. *Иванчов Н. И.* Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении // Сиб. мат. журн. – 1998. – **39**, № 3. – С. 539 – 550.
8. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1967. – 428 с.
9. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. – М.: Мир, 1960. – 300 с.

Одержано 04.07.2001