УДК 513.88

О. Г. Сторож, О. Б. Шувар (Львів. нац. ун-т)

УМОВИ МАКСИМАЛЬНОЇ ДИСИПАТИВНОСТІ МАЙЖЕ ОБМЕЖЕНИХ ЗБУРЕНЬ ГЛАДКИХ ЗВУЖЕНЬ ОПЕРАТОРІВ, СПРЯЖЕНИХ З СИМЕТРИЧНИМИ

We establish conditions of the maximal dissipativity of a class of densely defined closed linear operators in the Hilbert space. We use the results obtained for the investigation of some particular boundary-differential operators.

Встановлено умови максимальної дисипативності одного класу щільно визначених замкнених лінійних операторів у гільбертовому просторі. Отримані результати застосовано для дослідження деяких конкретних диференціально-граничних операторів.

Ця стаття є продовженням праці авторів [1], тому в ній використовуються позначення і термінологія, прийняті у згаданій праці. Перш ніж перейти до викладу результатів, нагадаємо, що лінійний оператор $T\colon H \to H$, де H — гільбертів простір, називається дисипативним (акумулятивним), якщо $\forall\, y \in D(T)$ $\operatorname{Im}(Ty\,|\,y) \geq 0$ (≤ 0), і максимально дисипативним (максимально акумулятивним), якщо, крім цього, він не має в H нетривіальних дисипативних (акумулятивних) розширень. Дисипативні оператори природним чином виникають при дослідженні коректності певних класів крайових задач для параболічних та гіперболічних систем диференціальних рівнянь у частинних похідних [2, 3]. При цьому нерідко постає задача про опис максимально дисипативних розширень симетричного оператора, якій присвячено багато праць (див., наприклад, [4–7]). Ми розглядаємо більш загальну задачу, а саме задачу про умови максимальної дисипативності (зокрема, самоспряженості) майже обмеженого збурення гладкого звуження оператора, спряженого із симетричним у сенсі означень, запропонованих у [8, с. 167].

1. Нехай H — гільбертів простір, $L_0 \in \mathscr{C}(H)$ — симетричний оператор з індексом дефекту (m_+, m_-), тобто $\dim\ker(L \mp i\mathbf{1}_H) = m_\pm$, де $L \overset{\mathrm{df}}{=} L_0^*$, $\mathbf{1}_H$ — тотожне перетворення простору H;

$$(G, U) \overset{\mathrm{df}}{=} (G_1 \oplus G_2, U_1 \oplus U_2)$$

та

$$(\tilde{G}, \tilde{U}) \overset{\mathrm{df}}{=} (G_2 \oplus G_1, \tilde{U}_1 \oplus \tilde{U}_2)$$

— крайові пари для (L, L_0) такі, що

$$\forall y \in D(L), \quad \forall z \in D(L) \qquad (Ly|z) - (y|Lz) = \left(U_1 y|\tilde{U}_2 z\right)_{G_1} - \left(U_2 y|\tilde{U}_1 z\right)_{G_2} \tag{1}$$

(див. [8], означення 4.1.1, наслідок 4.2.6), а $\Phi_i \in \mathcal{B}(H, G_i)$, $i = 1, 2$. Визначимо оператор S за допомогою співвідношень

$$D(S) = \{y \in D(L)\colon U_1 y = \Phi_1 y\}, \tag{2}$$

$$\forall y \in D \quad (S)\, Sy = Ly + \Phi_2^* U_2 y, \tag{3}$$

причому будемо вважати, що

$$R(U - (\Phi_1 \oplus 0)) = G, \qquad R\left(\tilde{U} - (\Phi_2 \oplus 0)\right) = \tilde{G}. \tag{4}$$

Відомо [1, 8, с. 173, 174], що з рівностей (4) випливає замкненість та щільна визначеність оператора S і що ці рівності мають місце, якщо справджується хоча б одна з двох умов:

а) оператори Φ_1, Φ_2 є компактними;

б) оператори U_1, U_2 мають нульову L-грань.

Лема 1. *Якщо оператор* (2), (3) *є дисипативним, то існує* $c > 0$ *таке, що для будь-якого* $y \in H$

$$\| \Phi_2 y \|_{G_2} \le c \| \Phi_1 y \|_{G_1}. \tag{5}$$

Доведення. Оскільки, як випливає з (4), множина $D(S) \bigcap \ker U_2$ щільна в H, то досить показати, що (5) справджується при всіх y, що належать цій множині. Припустимо, що це не так. Тоді

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}) \qquad \left(\exists \xi_n \in D(S) \bigcap \ker U_2 : \| \Phi_2 \xi_n \|_{G_2} > \| \Phi_1 \xi_n \|_{G_1} \right).$$

Покладемо $x_n = \xi_n / \| \Phi_2 \xi_n \|_{G_2}$. Зрозуміло, що

$$U_1(nx_n) = \Phi_1(nx_n) \underset{n \to \infty}{\to} 0 \tag{6}$$

$$(\forall\, n \in N) \qquad \left(\| \Phi_2 x_n \|_{G_2} = 1,\ U_2(nx_n) = 0 \right), \tag{7}$$

а отже,

$$\tilde{U}_i(nx_n) \underset{n \to \infty}{\to} 0, \qquad i = 1, 2. \tag{8}$$

Нехай $\hat{U} \overset{\text{df}}{=} (U_1 - \Phi_1) \oplus U_2$, $R - (\cdot \,|\, \cdot)_L$ — ортогональне доповнення до $\ker \hat{U}$. Із (4) і теореми Банаха про обернений оператор випливає, що $\hat{U} | R$ — лінійний гомеоморфізм $R \to G$, тому

$$(\forall\, n \in N) \quad (\exists\, z_n \in R) \qquad ((U_1 - \Phi_1) z_n = 0,\ U_2 z_n = \Phi_2 x_n),$$

причому

$$\| z_n \|_L \le a \| \Phi_2 x_n \|_{G_2} = a, \tag{9}$$

де $a \overset{\text{df}}{=} \left\| (\hat{U} | R)^{-1} \right\| < +\infty$, так що

$$\sup_{n \in N} \max \left\{ \| U_1 z_n \|_{G_1}, \| U_2 z_n \|_{G_2}, \left\| \tilde{U}_1 z_n \right\|_{G_{12}}, \left\| \tilde{U}_2 z_n \right\|_{G_1}, \| \Phi_2 z_n \|_{G_1} \right\} < +\infty. \tag{10}$$

Покладемо $y_n \overset{\text{df}}{=} inx_n + z_n$. Зрозуміло, що $y_n \in D(S)$, тому $\operatorname{Im}(Sy_n | y_n) \ge 0$. Але з огляду на (1)

$$\operatorname{Im}(Sy_n | y_n) = \alpha_n - n, \tag{11}$$

де

$$\alpha_n = \frac{1}{2i} \left[(U_1 y_n | \tilde{U}_2 y_n)_{G_1} - (U_2 y_n | \tilde{U}_1 y_n)_{G_2} \right] + \operatorname{Im} (\Phi_2 x_n | \Phi_2 z_n)_{G_2}.$$

З (6) – (10) випливає, що послідовність $\{\alpha_n\}$ є обмеженою, а з (11) — що $\alpha_n \ge \ge n$, $n \in N$. Отримана суперечність свідчить про правильність леми.

Наслідок 1. *Нехай* S — *максимально дисипативний оператор. Тоді існують* $\Phi \in \mathcal{B}(H, G_2)$, $C \in \mathcal{B}(G_2, G_1)$ *такі, що* $C | \overline{R(\Phi)} : \overline{R(\Phi)} \to \overline{R(C\Phi)}$ — *гомеоморфізм і*

$$D(S) = \{ y \in D(L) : U_1 y = C \Phi y \}, \tag{12}$$

$$\forall\, y \in D(S) \qquad Sy = Ly + \Phi^* U_2 y. \tag{13}$$

Доведення. З (5) випливає, що $\ker\Phi_1 \subset \ker\Phi_2$, тому існує лінійна сюр'єкція $\hat{C}\colon R(\Phi_1) \to R(\Phi_2)$ така, що $\Phi_2 = \hat{C}\Phi_1$. Звідси ж випливає обмеженість оператора $\hat{C}$. Позначимо через C_2 продовження за неперервністю оператора $\hat{C}$.

Аналогічно показуємо, що якщо S^* є акумулятивним, то існує

$$C_1 \in \mathcal{B}\left(\overline{R(\Phi_2)}, \overline{R(\Phi_1)}\right)$$

такий, що $\Phi_1 = C_1\Phi_2$. Зрозуміло, що $C_2^{-1} = C_1$. Таким чином, для завершення доведення досить покласти $\Phi = \Phi_2$ і прийняти за C будь-який оператор з $\mathcal{B}(G_2, G_1)$, який є розширенням оператора C_1 (нагадаємо, що дисипативний оператор S є максимально дисипативним тоді і тільки тоді, коли S^* є акумулятивним (див. [3–6])).

***Зауваження* 1.** У випадку, коли L_0 має скінченні дефектні числа, наслідок 1 випливає з результатів праці [10].

2. Далі мова йтиме про умови максимальної дисипативності оператора S, визначеного згідно з (12), (13). При цьому будемо використовувати такі позначення: $P_\Phi(P)$ — ортопроектор $G_2 \to \overline{R(\Phi)}$ $(G \to G_1 \oplus \overline{R(\Phi)})$, $\forall\, h_i \in G_i$, $i = 1, 2$, $J(h_1, h_2) \overset{\text{df}}{=} (ih_2, -ih_1)$.

Лема 2. *Має місце рівність*

$$\overline{R\left(J^*\tilde{U}\,\middle|\,D(S^*)\right)} = G_1 \oplus \overline{R(\Phi)}. \tag{14}$$

Доведення. Перш за все зазначимо, що

$$D(S^*) = \left\{z \in D(L)\colon \tilde{U}_1 z = \Phi z\right\}, \tag{15}$$

$$\forall\, z \in D(S^*) \quad S^* z = Lz + \Phi_1^* C^* z \tag{16}$$

(див. [1]). Враховуючи (15), бачимо, що

$$R\left(J^*\tilde{U}\,\middle|\,D(S^*)\right) = \left\{(i\tilde{U}_2 z, -i\Phi z)\colon z \in D(L),\ \tilde{U}_1 z = \Phi z\right\}. \tag{17}$$

Припустимо, що елемент $h = (h_1, h_2) \in G_1 \oplus G_2$ є ортогональним до множини (17). Тоді

$$\forall\, z \in D(S^*) \quad f(z) \overset{\text{df}}{=} (\tilde{U}_2 z | h_1)_{G_1} - (\Phi z | h_2)_{G_2} = 0.$$

Іншими словами, $\ker(U_1 - \Phi) \subset \ker f$. Використовуючи лему про трійку [8, с. 23, 11, с. 262] та теорему Рісса про загальний вигляд лінійного неперервного функціонала в гільбертовому просторі, бачимо, що

$$(\exists\, g \in G_2) \quad (\forall\, z \in D(L)) \qquad \left((\tilde{U}_2 z | h_1) - (\Phi z | h_2)_{G_2} = \left((\tilde{U}_1 - \Phi) z | g\right)_{G_2}\right).$$

Зокрема, для будь-якого z з $D(L_0)$ (а отже, й з H) $(\Phi z | h_2)_{G_2} = (\Phi z | g)_{G_2}$, тобто

$$h_2 - g \in R(\Phi)^\perp. \tag{18}$$

Звідси випливає, що при всіх $z \in D(L)$ $(\tilde{U}_2 z | h_1)_{G_1} = (\tilde{U}_1 z | g)_{G_2}$, а отже, $h_1 = 0$, $g = 0$. Виходячи звідси і враховуючи (18), робимо висновок, що має місце (14).

***Наслідок* 2.** *Оператор $-S^*$ є дисипативним тоді і тільки тоді, коли*

$$P\left[iULU' - \begin{pmatrix} 0 & -iC \\ iC^* & 0 \end{pmatrix}\right]P \geq 0. \tag{19}$$

Доведення. Нехай $z \in D(S^*)$, $f = J^*\tilde{U}z$. Беручи до уваги (1), (15), (16), доведену в [8, с. 195] рівність $U = -iULU'J^*$ і рівність $Pf = f$, отримуємо

$$\mathrm{Im}(-S^*z|z) = \frac{1}{2}\left(P\left[iULU' - \begin{pmatrix} 0 & -iC \\ iC^* & 0 \end{pmatrix}\right]Pf\middle| f\right)_G.$$

Звідси випливає достатність умови (19). Щоб переконатися в її необхідності, досить застосувати лему 2.

Введемо до розгляду оператори $L_1 \stackrel{\mathrm{df}}{=} L\big|\ker U_1$, $M_1 \stackrel{\mathrm{df}}{=} L\big|\ker \tilde{U}_1$. Відомо [1], що $L_1^* = M_1$.

Наслідок 3. *Якщо $-S^*$ є дисипативним, то й $-M_1$ дисипативний. Зокрема, якщо S є максимально дисипативним, то й L_1 максимально дисипативний.*

Доведення. Застосовуючи наслідок 2 при $\Phi = 0$, бачимо, що в цьому випадку умова (19) рівносильна дисипативності оператора $-L_1^* = -M_1$. Аналогічно доводимо, що з дисипативності оператора $S = -(S^*)^*$ випливає дисипативність оператора $L_1 = -(-L_1^*)^*$. Тому якщо S є максимально дисипативним, тобто S та $-S^*$ дисипативні, то L_1 та $-L_1^* = -M_1$ дисипативні, тобто L_1 є максимально дисипативним.

Лема 3. *Нехай оператор S визначено згідно з* (12), (13), *причому*:

а) *виконується умова* (19);

б) L_1 — *максимально дисипативний оператор*;

в) Φ — *скінченновимірний оператор*.

Тоді S — максимально дисипативний оператор.

Доведення. Із максимальної дисипативності оператора $-M_1$ випливає $R(-M_1 + i\mathbf{1}_H) = H$, а з дисипативності операторів $-M_1$ та $-S^*$ —

$$\ker(-S^* + i\mathbf{1}_H) = \ker(-M_1 + i\mathbf{1}_H) = \{0\}$$

(див. [3–6]). Далі, оператори M_1 та S^* мають спільне скінченновимірне звуження $\hat{L}$, яке визначається за допомогою співвідношень

$$D(\hat{L}) = \left\{z \in D(S^*) \colon \Phi z = 0,\ P_{C\Phi}\tilde{U}_2 z = 0\right\}, \qquad \hat{L} \subset L,$$

де $P_{C\Phi}$ — ортопроектор $G_1 \to R(C\Phi)$. Зрозуміло, що

$$\dim\left[D(S^*)\,/\,D(\hat{L})\right] = \dim\left[D(M_1)\,/\,D(\hat{L})\right] = 2\dim R(\Phi).$$

Із викладеного вище і з теореми 8.2 [12] випливає $R(-S^* + i\mathbf{1}_H) = H$, тому $-S^*$, а отже, й S є максимально дисипативними операторами.

Теорема 1. *Для того щоб оператор* (12), (13) *був максимально дисипативним, необхідно і достатньо, щоб справджувалась умова* (19) *і оператор L_1 був максимально дисипативним.*

Доведення. *Достатність.* Нехай $\{e_\alpha\}$ — ортонормована база в $\overline{R(\Phi)}$, а $y_0 \in D(S)$. Відомо [13, с. 943], що існує не більш ніж зчисленна підсистема $\{e_{\alpha_i}\}$ системи $\{e_\alpha\}$ така, що

$$\Phi y_0 = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\Phi y_0 \middle| e_{\alpha_i}\right)e_{\alpha_i}.$$

Позначимо через P_{Φ_n} ортопроектор $G_2 \to \mathrm{sp}\left\{e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_n}\right\}$ і покладемо $\Phi_n =$

$= P_{\Phi_n}\Phi$. Зрозуміло, що $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n y_0 = \Phi y_0$. Далі міркуючи, як і при доведенні леми 4.8.7 [8], переконуємось, що

$$(\forall\, n \in N) \quad ((\exists\, y_n \in D(L)) \quad (U_1 y_n = C\Phi_n y_0) \\ (U_2 y_n = U_2 y_0) \quad (\Phi_n y_n = \Phi_n y_0). \tag{20}$$

Розглянемо оператор S_n, $n \in N$, визначений за допомогою співвідношень

$$D(S_n) = \{y \in D(L) \colon U_1 y = C\Phi_n y\},$$

$$\forall\, y \in D(S_n) \qquad S_n y = Ly + \Phi_n^* U_2 y,$$

і позначимо через P_n ортопроектор $G \to G_1 \oplus R(\Phi_n)$. З (19) випливає

$$P_n P\left[iULU' - \begin{pmatrix} 0 & -iC \\ iC^* & 0 \end{pmatrix}\right] PP_n \geq 0.$$

Тому якщо L_1 — максимально дисипативний оператор, то за лемою 3 S_n — максимально дисипативний оператор. Зокрема (див. (20)), $y_n \in S_n$ і

$$\mathrm{Im}(S_n y_n | y_n) =$$

$$= \frac{1}{2i}\Big\{\Big[(Ly_n | y_n) - (y_n | Ly_n)\Big] + \Big[(U_2 y_n | \Phi_n y_n)_{G_2} - (\Phi_n y_n | U_2 y_n)_{G_2}\Big]\Big\} =$$

$$= \frac{1}{2i}\Big\{\Big[\big(U_1 y_n \big| \tilde{U}_2 y_n\big)_{G_1} - \big(U_2 y_n \big| \tilde{U}_1 y_n\big)_{G_2}\Big] +$$

$$+ \Big[(U_2 y_n | \Phi_n y_n)_{G_2} - (\Phi_n y_n | U_2 y_n)_{G_2}\Big]\Big\} \geq 0. \tag{21}$$

Крім того, з (20) зрозуміло, що

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n y_n = \Phi y_0, \qquad \lim_{n\to\infty} U_1 y_n = U_1 y_0, \qquad \lim_{n\to\infty} U_2 y_n = U_2 y_0,$$

а отже,

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{U}_i y_n = \tilde{U}_i y_0, \qquad i = 1, 2.$$

Тому, переходячи в (21) до границі, одержуємо

$$\frac{1}{2i}\Big\{\Big[\big(U_1 y_0 \big| \tilde{U}_2 y_0\big)_{G_1} - \big(U_2 y_0 \big| \tilde{U}_1 y_0\big)_{G_2}\Big] + \Big[(U_2 y_0 | \Phi y_0)_{G_2} - (\Phi y_0 | U_2 y_0)_{G_2}\Big]\Big\} \geq 0,$$

тобто $\mathrm{Im}(Sy_0 | y_0) \geq 0$. Оскільки y_0 — довільний елемент з $D(S)$, то S є дисипативним, а тому, внаслідок (19), наслідку 2 і результатів, викладених в [3, 4], і максимально дисипативним оператором. Це й доводить достатність.

Необхідність випливає з наслідку 2.

Зауваження 2. Аналогічно доводиться, що оператор (12), (13) є максимально акумулятивним тоді і тільки тоді, коли

$$P\left[iULU' - \begin{pmatrix} 0 & -iC \\ iC^* & 0 \end{pmatrix}\right] P \leq 0,$$

а L_1 — максимально акумулятивний оператор.

Враховуючи, що самоспряженість оператора рівносильна його одночасній максимальній дисипативності та максимальній акумулятивності, робимо висновок, що $S = S^*$ тоді і тільки тоді, коли $L_1^* = L_1$ і

$$P\left[iULU' - \begin{pmatrix} 0 & -iC \\ iC^* & 0 \end{pmatrix}\right]P = 0.$$

Означення. *Нехай* $L_0 \in \mathscr{C}(H)$ *— симетричний оператор з індексом дефекту* (m_+, m_-). *Четвірка* $(G^+, G^-, \delta_+, \delta_-)$, *де* G^+, G^- *— гільбертові простори,* $\delta_\pm \in \mathcal{B}\left(D\left[L_0^*\right], G^\pm\right)$, *називається антисиметричним простором граничних значень (ПГЗ) оператора* L_0, *якщо:*

i) $\dim G^\pm = m_\pm$, $R(\delta_+ \oplus \delta_-) = G^+ \oplus G^-$, $\ker(\delta_+ \oplus \delta_-) = D(L_0)$;

ii) $\forall\, y,\ z \in D(L_0^*)$ $\left(L_0^* y | z\right) - \left(y \middle| L_0^* z\right) = i\left[(\delta_+ y | \delta_+ z)_{G^+} - (\delta_- y | \delta_- z)_{G^-}\right]$.

***Наслідок* 4.** *Якщо оператор* (12), (13) *є максимально дисипативним, то*

$$\dim G_1 = m_-, \qquad \dim G_2 = m_+,$$

де $m_\pm \overset{\mathrm{df}}{=} \dim\ker(L \pm i\mathbf{1}_H)$.

Доведення. Нехай S (а тому й $-S^*$) є максимально дисипативним. Із наслідку 3 випливає максимальна дисипативність операторів L_1 та $-M_1$. Тому (див. [14]) існує антисиметричний ПГЗ $(G^+, G^-, \delta_+, \delta_-)$ такий, що $D(L_1) = \ker(\delta_- - K\delta_+)$. Зрозуміло, що $R(\delta_- - K\delta_+) = G^-$. Крім цього, $\ker G_1 = D(L_1)$, $R(U_1) = G_1$. Виходячи звідси і з цитованої вище леми про трійку, робимо висновок, що існує гомеоморфізм $C_- \in \mathcal{B}(G^-, G^+)$ такий, що $U_1 = C(\delta_- - K\delta_+)$, тобто $\dim G_1 = m_-$. Далі, $\forall\, y \in D(L_1)$, $\forall\, z \in D(L)$

$$(L_1 y | z) = (y | Lz) + i(\delta_+ y | \delta_+ z)_{G^+} - i(\delta_- y | \delta_- z)_{G^-} =$$

$$= (y | Lz) + i(\delta_+ y | \delta_+ z - K\delta_- z)_{G^+}.$$

Тому

$$D(L_1^*) = \ker(\delta_+ - K^*\delta_-).$$

Але $D(L_1^*) = \ker \hat{U}_1$, причому $R(\hat{U}_1) = G_2$, отже, існує гомеоморфізм $C_+ \in \mathcal{B}(G^+, G_2)$ такий, що $\hat{U}_1 = C_+(\delta_+ - K^*\delta_-)$. Оскільки $R(\delta_+ - K^*\delta_-) = G^+$, то $\dim G_2 = m_+$.

***Наслідок* 5.** *Якщо* $m_- < \infty$, *то умова* (19) *є (не тільки необхідною, але й) достатньою для максимальної дисипативності оператора* (12), (13).

Доведення. Нехай виконується умова (19), а отже, й умова

$$iU_1 L U_1' \geq 0, \tag{22}$$

яка рівносильна дисипативності оператора $-L_1^*$ (щоб переконатись у цьому, досить застосувати наслідок 2 при $\Phi = 0$). З елементарних властивостей дисипативних операторів (див., наприклад, [3, 4]) випливає, що існує максимально дисипативний оператор $\hat{L} \in \mathscr{C}(H)$ такий, що $\hat{L} \subset L_1$ і $\dim\left[D(L) / D(\hat{L})\right] = m_-$. З іншого боку, умова $R(U_1) = G_1$ гарантує, що функціонали $y \mapsto (U_1 y | e_j)_{G_1}$, $j = 1, \ldots, m$, де $\{e_j\}_{j=1}^m$ — довільна база простору G_1, є лінійно незалежними, тобто $\dim\left[D(L) / D(L_1)\right] = m_-$. Таким чином, $L_1 = \hat{L}$ — максимально дисипативний оператор.

***Наслідок* 6.** *Нехай* $(G^+, G^-, \delta_+, \delta_-)$ — *антисиметричний ПГЗ оператора* L_0, *причому* L-*грань оператора* $\delta \overset{\text{df}}{=} \delta_+ \oplus \delta_-$ *дорівнює нулю,*

$$\Phi \in \mathcal{B}(H, G^+), \qquad C \in \mathcal{B}(G^+, G^-),$$

P — *ортопроектор*:

$$G^- \oplus G^+ \to G^- \oplus \overline{R(\Phi)}, \qquad A_{11} \in \mathcal{B}(G^-),$$

$$A_{12} \in \mathcal{B}(G^+, G^-), \qquad A_{21} \in \mathcal{B}(G^-, G^+), \qquad A_{22} \in \mathcal{B}(G^+)$$

такі, що $A = (A_{ij})_{i,j=1}^2$ *є оборотним в* $\mathcal{B}(G^- \oplus G^+)$. *Визначимо оператор* S *за допомогою співвідношень*

$$D(S) = \{y \in D(L) \colon A_{11}\delta_- y + A_{12}\delta_+ y = C\Phi y\}, \tag{23}$$

$$\forall y \in D(S) \qquad Sy = Ly + \Phi^*(A_{21}\delta_- y + A_{22}\delta_+ y) \tag{24}$$

і покладемо

$$A_C \overset{\text{df}}{=} P\left[A\begin{pmatrix} -\mathbf{1}_{G^-} & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{G^+} \end{pmatrix}A^* - \begin{pmatrix} 0 & iC \\ -iC^* & 0 \end{pmatrix}\right]P.$$

Оператор (23), (24) *є максимально дисипативним* (*максимально акумулятивним; самоспряженим*) *тоді і тільки тоді, коли*

$$A_C \le 0, \qquad \ker A_{11} = \{0\} \tag{25}$$

(*відповідно* $A_C \ge 0$, $\ker A_{12} = \{0\}$; $A_C = 0$, $\ker A_{11} = \ker A_{12} = \{0\}$).

Доведення. Оскільки в цьому випадку

$$U = A\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_{G^-} \\ \mathbf{1}_{G^+} & 0 \end{pmatrix}\delta,$$

то враховуючи, що

$$-i\delta L\delta' = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{G^+} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_{G^-} \end{pmatrix} \tag{26}$$

(див. [14]), отримуємо

$$iULU' = A\begin{pmatrix} \mathbf{1}_{G^-} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_{G^+} \end{pmatrix}A^*.$$

Тому умова (19) є рівносильною першій умові з (25), з якої випливає

$$A_{11}A_{11}^* - A_{12}A_{12}^* \ge 0. \tag{27}$$

Оскільки L_1 — максимально дисипативний оператор тоді і тільки тоді, коли справджуються нерівність (27) і друге зі співвідношень (25) (див. [14]), то критерій максимальної дисипативності оператора (23), (24) доведено. Аналогічно доводиться критерій максимальної акумулятивності цього оператора. Для завершення доведення потрібно скористатися тим, що самоспряженість оператора рівносильна його одночасній максимальній дисипативності та максимальній акумулятивності.

***Наслідок* 7.** *Нехай* L_0 — *оператор з однаковими дефектними числами,* $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ — *ПГЗ цього оператора* (*див.* [5, 6, *с.* 159]), *причому* L-*грань оператора* $\Gamma \overset{\text{df}}{=} \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$ *дорівнює нулю,*

$$\Phi \in \mathcal{B}(H, \mathcal{H}), \quad C \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \ A_{ij} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad i, j = 1, 2,$$

такі, що $A = (A_{ij})_{i,j=1}^{2}$ *є оборотним в* $\mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$, P *— ортопроектор*

$$\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \to \mathcal{H} \oplus \overline{R(\Phi)}, \quad \forall h_1, h_2 \in \mathcal{H} \quad J(h_1, h_2) \overset{\text{df}}{=} (ih_2, -ih_1).$$

Визначимо оператор S *за допомогою співвідношень*

$$D(S) = \{y \in D(L) : A_{11}\Gamma_1 y + A_{12}\Gamma_2 y = C\Phi y\}, \tag{28}$$

$$\forall y \in D(S) \quad Sy = Ly + \Phi^*(A_{21}\Gamma_1 y + A_{22}\Gamma_2 y). \tag{29}$$

Оператор (28), (29) *є максимально дисипативним (максимально акумулятивним; самоспряженим) тоді і тільки тоді, коли*

$$A_C \overset{\text{df}}{=} P\left[AJA^* - \begin{pmatrix} 0 & iC \\ -iC^* & 0 \end{pmatrix}\right]P \le 0, \quad \ker(A_{11} + iA_{12}) = \{0\}$$

(*відповідно* $A_C \ge 0$, $\ker(A_{11} - iA_{12}) = \{0\}$; $A_C = 0$, $\ker(A_{11} \pm iA_{12}) = \{0\}$).

Доведення аналогічне доведенню наслідку 6, але замість (26) слід застосувати встановлену в [8, с. 161] рівність $\Gamma L \Gamma' = iJ$, з якої випливає, що в розглядуваному випадку $iULU' = -AJA^*$, а також критерій максимальної дисипативності (максимальної акумулятивності) оператора L_1 (див. [5–7]).

***Зауваження* 3.** Нехай

$$N_\pm = \ker(L \mp i\mathbf{1}_H), \quad N = N_+ \oplus N_-, \quad P^\pm(P_0^\pm) - (\cdot|\cdot)_L$$

— ортопроектор $D(L) \to N_\pm (N \to N_\pm)$. Легко бачити, що (N_+, N_-, P^+, P^-) — антисиметричний ПГЗ оператора L_0, а

$$U_1 y = (U_1 | N_-)P^- y + (U_1 | N_+)P^+ y.$$

Виходячи звідси і з наслідку 6, неважко зрозуміти, що в теоремі 1 умову максимальної дисипативності оператора L_1 можна замінити умовою

$$\ker(U_1 | N_-) = \ker\big(U_1 | \ker(L + i\mathbf{1}_H)\big) = \{0\},$$

яка (оскільки U_1 — нормально розв'язний оператор) рівносильна такій:

$$R\Big((U_1 | N_-)^*\Big) = N_+$$

(детальніше див. [14]). Але

$$(U_1 | N_-)^* = P_0^+ U_1' = \frac{1}{2}(iL | N + \mathbf{1}_H).$$

Таким чином, оператор (12), (13) є максимально дисипативним тоді і тільки тоді, коли справджується (19) і

$$R(iLU_1' + U_1') = \ker(L + i\mathbf{1}_H).$$

Аналогічним чином формулюються умови максимальної акумулятивності та самоспряженості цього оператора.

***Зауваження* 4.** Якщо оператор Φ, який фігурує в (23), (24), є компактним, то умова *L-грань оператора* $\delta \overset{\text{df}}{=} \delta_+ \oplus \delta_-$ *дорівнює нулю* в наслідку 6 стає неістотною. Аналогічно, коли компактним є оператор Φ, який фігурує в (28), (29), то в наслідку 7 неістотною стає умова *L-грань оператора* $\Gamma \overset{\text{df}}{=} \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$ *дорівнює нулю.*

Приклад. Нехай $(G^+, G^-, \delta_+, \delta_-)$ — антисиметричний ПГЗ оператора L_0, причому L-грань оператора $\delta \overset{\mathrm{df}}{=} \delta_+ \oplus \delta_-$ дорівнює нулю, $\Phi \in \mathcal{B}(H, G^+)$, P_Φ — ортопроектор $G^+ \to \overline{R(\Phi)}$, а $E \in \mathcal{B}(G^-, G^+)$ задовольняє умови

$$EE^* = P_\Phi, \quad E^*E = \mathbf{1}_{G^-}, \tag{30}$$

з яких випливає

$$\ker E = \{0\}, \quad R(E) = \overline{R(\Phi)}, \quad \ker E^* = \ker \Phi^*, \quad R(E^*) = G^-. \tag{31}$$

Визначимо оператор S за допомогою співвідношень

$$D(S) = \{y \in D(L) : \delta_- y = iE^*\Phi y\}, \tag{32}$$

$$\forall y \in D(S) \quad Sy = Ly + \Phi^*(E\delta_- y + \delta_+ y). \tag{33}$$

Цей оператор задовольняє умову наслідку 6 при

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{G^-} & 0 \\ E & \mathbf{1}_{G^+} \end{pmatrix}, \quad -iC = E^*. \tag{34}$$

Враховуючи (30) – (34), бачимо, що в розглядуваному випадку

$$A_C = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{G^-} & 0 \\ 0 & P_\Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{G^-} & 0 \\ 0 & P_\Phi - \mathbf{1}_{G^+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{G^-} & 0 \\ 0 & P_\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{G^-} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0.$$

Оскільки $L_1 = L \,|\, \ker \delta$, очевидно, є максимально дисипативним, то з наслідку 6 випливає максимальна дисипативність оператора (32), (33).

3. Нехай $-\infty < a < b < +\infty$ і для будь-якого $x \in [a, b]$ $p(x)$ — обмежений самоспряжений оператор у сепарабельному гільбертовому просторі H_0, причому оператор-функція $x \mapsto p(x)$ є сильно неперервною на $[a, b]$. Розглянемо диференціальний вираз

$$l[y](x) = -y''(x) + p(x)y, \quad x \in [a, b],$$

і позначимо через L та L_0 відповідно максимальний та мінімальний оператори, породжені в просторі $H \overset{\mathrm{df}}{=} L_2(H_0, (a, b))$ цим виразом. Відомо [6, 15], що L та L_0 — взаємно спряжені замкнені, щільно визначені оператори, а трійка $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, де $\mathcal{H} = H_0 \oplus H_0$,

$$\forall y \in D(L) \quad \Gamma_1 y = (y'(a), -y'(b)), \quad \Gamma_2 y = (y(a), y(b)), \tag{35}$$

є ПГЗ оператора L_0.

Припустимо, що $\alpha_{ij} \in \mathcal{B}(H_0)$, $i, j = 1, \ldots, 4$; $\Phi^{(i)} \in \mathcal{B}(H, H_0)$, $i = 1, 2$, причому операторна матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{14} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{41} & \cdots & \alpha_{44} \end{pmatrix} \tag{36}$$

є оборотною в $\mathcal{B}(H_0^4)$. Позначимо

$$u_i(y) = \alpha_{i1}y(a) + \alpha_{i2}y'(a) + \alpha_{i3}y(b) + \alpha_{i4}y'(b), \tag{37}$$
$$y \in D(L), \quad i = 1, \ldots, 4,$$

і визначимо оператор S за допомогою співвідношень

$$D(S) = \{y \in D(L) \colon u_1(y) = \Phi^{(1)}y,\ u_2(y) = \Phi^{(2)}y\}, \tag{38}$$

$$\forall\, y \in D(S) \quad Sy = l[y] + \left(\Phi^{(1)}\right)^* u_3(y) + \left(\Phi^{(2)}\right)^* u_4(y). \tag{39}$$

Введемо такі позначення:

$$J \overset{\text{df}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{0}_H & i\mathbf{1}_H \\ -i\mathbf{1}_H & \mathbf{0}_H \end{pmatrix}, \quad \Pi \overset{\text{df}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad E \overset{\text{df}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tag{40}$$

де символами $\mathbf{1}$ та $\mathbf{0}$ позначено відповідно одиничний та нульовий оператори в H_0. Як підтверджує безпосередня перевірка,

$$J = J^* = J^{-1}, \quad \Pi^* = \Pi^{-1}, \tag{41}$$

$$\Pi(iJ)\Pi' = \begin{pmatrix} E & \mathbf{0}_H \\ \mathbf{0}_H & -E \end{pmatrix}. \tag{42}$$

Розглянемо питання про умови максимальної дисипативності оператора (38), (39). Для цього покладемо $\Phi \overset{\text{df}}{=} \Phi^{(1)} \oplus \Phi^{(2)}$ і позначимо через P ортопроектор $H_0^4 \to H_0^2 \oplus \overline{R(\Phi)}$.

Теорема 2. *Оператор* S, *визначений за допомогою співвідношень* (38), (39), *є максимально дисипативним тоді і тільки тоді, коли*

$$P\left[A\Pi J\Pi^* A^* - J\right]P \le 0,$$

$$\ker\left[\begin{pmatrix} \alpha_{12} & -\alpha_{14} \\ \alpha_{22} & -\alpha_{24} \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{pmatrix}\right] = \{0\}.$$

Доведення. Перш за все зазначимо, що оскільки оператори Γ_1, Γ_2 мають нульові L-грані (див. [1]), то $S \in \mathscr{C}(H)$. Далі, беручи до уваги (35) – (37), (40) – (42), бачимо, що співвідношення (38), (39) набирають вигляду

$$D(S) = \left\{y \in D(L) \colon \widehat{A}_{11}\Gamma_1 y + \widehat{A}_{12}\Gamma_2 y = \Phi y\right\},$$

$$\forall\, y \in D(S) \quad Sy = Ly + \Phi^*\left(\widehat{A}_{21}\Gamma_1 y + \widehat{A}_{22}\Gamma_2 y\right),$$

де

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} \widehat{A}_{11} & \widehat{A}_{12} \\ \widehat{A}_{21} & \widehat{A}_{22} \end{pmatrix} = A\Pi.$$

Отже,

$$\widehat{A}J\widehat{A}^* = A\Pi J\Pi^* A^*,$$

$$\left(\widehat{A}_{11}, \widehat{A}_{12}\right) = (A_{11}, A_{12})\Pi = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{12} & -\alpha_{14} & \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & -\alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{pmatrix},$$

тобто

$$\widehat{A}_{11} = \begin{pmatrix} \alpha_{12} & -\alpha_{14} \\ \alpha_{22} & -\alpha_{24} \end{pmatrix}, \quad \widehat{A}_{12} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{pmatrix}. \tag{43}$$

Таким чином, справедливість твердження випливає з наслідку 7.

***Зауваження* 5.** Аналогічно доводиться, що оператор (38), (39) є максимально акумулятивним (самоспряженим) тоді і тільки тоді, коли

$$P\left[A\Pi Л\Pi^* A^* - J\right]P \geq 0, \quad \ker\left(\widehat{A}_{11} - i\widehat{A}_{12}\right) = \{0\}$$

(відповідно

$$P\left[A\Pi Л\Pi^* A^* - J\right]P = 0, \quad \ker\left(\widehat{A}_{11} \pm i\widehat{A}_{12}\right) = \{0\}),$$

де $\widehat{A}_{11}$, $\widehat{A}_{12}$ визначено за формулами (43).

***Зауваження* 6.** Частину результатів цієї праці анонсовано в [16].

1. *Сторож О. Г., Шувар О. Б.* Про один клас майже обмежених збурень гладких звужень замкненого оператора // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 10. – С. 1396 – 1402.
2. *Лянце В. Э.* Об одной краевой задаче для параболических систем с сильно эллиптической правой частью // Мат. сб. – 1954. – **35**, № 2. – С. 357 – 368.
3. *Филлипс П. С.* Диссипативные операторы и гиперболические системы дифференциальных уравнений в частных производных // Математика: сб. пер. – 1962. – **6**, № 4. – С. 11 – 70.
4. *Штраус А. В.* О расширениях и характеристической функции симметрического оператора // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1968. – **32**, № 1. – С. 186 – 207.
5. *Кочубей А. Н.* О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений // Мат. заметки. – 1975. – **17**, № 1. – С. 41 – 48.
6. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
7. *Брук В. М.* Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии // Мат. сб. – 1976. – **100**, № 2. – С. 210 – 216.
8. *Лянце В. Э., Сторож О. Г.* Методы теории неограниченных операторов. – Киев: Наук. думка, 1983. – 210 с.
9. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
10. *Кочубей А. Н.* О расширениях неплотно заданного симметрического оператора // Сиб. мат. журн. – 1977. – **18**, № 2. – С. 314 – 320.
11. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 544 с.
12. *Лянце В. Э.* О замкнутых операторах в гильбертовом пространстве // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1972. – Вып. 16. – С. 165 – 186.
13. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Спектральная теория. – М.: Мир, 1966. – 1063 с.
14. *Сторож О. Г.* О расширениях симметрических операторов с неравными дефектными числами // Мат. заметки. – 1984. – **36**, № 5. – С. 791 – 796.
15. *Рофе-Бекетов Ф. С.* Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций // Докл. АН СССР. – 1969. – **184**, № 5. – С. 1034 –1037.
16. *Сторож О. Г., Шувар О. Б.* Умови максимальної дисипативності деяких диференціально-граничних операторів у просторі вектор-функцій // Допов. НАН України. – 1994. – № 2. – С. 20 – 24.

Одержано 12.05.2003