УДК 519.21

А. А. Дороговцев (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ СЛАБОЙ КОМПАКТНОСТИ СЕМЕЙСТВА МЕРОЗНАЧНЫХ ПРОЦЕССОВ

We present a criterion of the weak compactness of continuous measure-valued processes in terms of the weak compactness of families of some space integrals of these processes.

Наведено критерій слабкої компактності неперервних мірозначних процесів у термінах слабкої компактності сімей деяких просторових інтегралів від цих процесів.

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество всех конечных мер на борелевской σ-алгебре евклидова пространства $\mathbb{R}^d$. На $\mathfrak{M}$ задана топология слабой сходимости. В настоящей статье обсуждаются условия слабой компактности семейств $\mathfrak{M}$-значных непрерывных случайных процессов или случайных элементов в некоторых модификациях пространства $\mathfrak{M}$.

1. Метрика в пространстве $\mathfrak{M}$. В данном пункте вводится метрика на $\mathfrak{M}$, соответствующая слабой сходимости и удобная для получения критерия слабой компактности случайных мерозначных процессов. Пусть $C_b(\mathbb{R}^d)$ — пространство непрерывных ограниченных функций на $\mathbb{R}^d$, а $C_0(\mathbb{R}^d)$ — пространство финитных функций на $\mathbb{R}^d$ с равномерной нормой. Рассмотрим последовательность функций $\{f_n; n \geq 1\}$ из $C_b(\mathbb{R}^d)$ такую, что:

1) $f_1 \equiv 1$;

2) $\forall\, n \geq 1: \sup\limits_{\mathbb{R}^d} |f_n| \leq 1$;

3) $\forall\, n > 1: f_n \in C_0(\mathbb{R}^d)$;

4) для любой $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^d)$, ограниченной единицей, существует подпоследовательность $\{f_{n_k}; k \geq 1\}$ такая, что

$$\max_{\mathbb{R}^d} \left| \varphi - f_{n_k} \right| \to 0, \quad k \to \infty.$$

Для мер $\mu, \nu \in \mathfrak{M}$ определим

$$\rho_1(\mu, \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\langle \mu, f_n \rangle - \langle \nu, f_n \rangle|}{1 + |\langle \mu, f_n \rangle - \langle \nu, f_n \rangle|}.$$

Здесь и далее через $\langle \mu, f \rangle$ обозначен интеграл от функции f по мере μ по всему $\mathbb{R}^d$. Нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма 1. *Последовательность мер $\{\mu_n; n \geq 1\}$ из $\mathfrak{M}$ слабо сходится к мере $\mu \in \mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда*

$$\rho_1(\mu_n, \mu) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Пространство $\mathfrak{M}$ с метрикой ρ_1 является сепарабельным, но не полным. Рассмотрим еще одну последовательность функций $\{g_n; n \geq 1\}$ из $C_b(\mathbb{R}^d)$ таких, что:

1) $\forall\, x \in \mathbb{R}^d,\ n \geq 1:\ 0 \leq g_n(x) \leq 1$;

2) $\forall\, x \in \mathbb{R}^d,\ \|x\| \le n:\ g_n(x) = 0;$

3) $\forall\, x \in \mathbb{R}^d,\ \|x\| \ge n+1:\ g_n(x) = 1.$

Для мер $\mu, \nu \in \mathfrak{M}$ положим

$$\rho_2(\mu, \nu) = \max_{n\ge1} \left|\langle \mu, g_n\rangle - \langle \nu, g_n\rangle\right|.$$

Отметим, что ρ_2 не является метрикой в $\mathfrak{M}$, однако сумма $\rho = \rho_1 + \rho_2$ — это метрика.

Лемма 2. $(\mathfrak{M}, \rho)$ — *полное метрическое сепарабельное пространство, и сходимость в метрике* ρ *равносильна слабой сходимости.*

Доказательство. То, что сходимость в метрике ρ равносильна слабой сходимости, следует из леммы 1. Поскольку дискретными мерами можно аппроксимировать любую меру из $\mathfrak{M}$ в смысле слабой сходимости, $(\mathfrak{M}, \rho)$ — сепарабельное пространство. Пусть теперь $\{\mu_n; n \ge 1\}$ — фундаментальная последовательность в $(\mathfrak{M}, \rho)$. Тогда последовательности $\left\{(\langle \mu_n, g_k\rangle)_{k\ge1};\ n \ge 1\right\}$ образуют фундаментальную последовательность в пространстве c_0 сходящихся к 0 последовательностей с равномерной нормой. Следовательно,

$$\sup_{n\ge1} \langle \mu_n, g_k\rangle \to 0, \quad k \to \infty,$$

т. е.

$$\sup_{n\ge1} \mu_n \{x : \|x\| \ge k\} \to 0, \quad k \to \infty. \tag{1}$$

При этом (из-за фундаментальности в метрике ρ_1)

$$\forall\, k \ge 1 \quad \exists \lim_{n\to\infty} \langle \mu_n, f_k\rangle. \tag{2}$$

В частности, с учетом того, что $f_1 \equiv 1$,

$$\exists \lim_{n\to\infty} \mu_n\left(\mathbb{R}^d\right). \tag{3}$$

Из (1) и (3) следует, что меры $\{\mu_n; n \ge 1\}$ образуют слабо предкомпактное множество, а из (2) — что $\{\mu_n; n \ge 1\}$ имеет единственную предельную точку μ. Теперь $\rho(\mu_n, \mu) \to 0$, $n \to \infty$.

Лемма доказана.

Обозначим через $\mathfrak{M}'$ пополнение пространства $\mathfrak{M}$ в метрике ρ_1.

Лемма 3. *Замкнутое множество* F *в пространстве* $(\mathfrak{M}, \rho)$ *компактно тогда и только тогда, когда* F *предкомпактно в* $\left(\mathfrak{M}', \rho_1\right)$ *и множество*

$$\left\{(\langle \mu, g_k\rangle)_{k\ge1};\ \mu \in F\right\}$$

предкомпактно в c_0.

Доказательство леммы 3 стандартно (используется описание фундаментальных последовательностей в $\mathfrak{M}$) и поэтому опускается. В качестве следствия получаем известное утверждение из [1].

Следствие. *Совокупность случайных мер, т. е. случайных элементов в* $\mathfrak{M}$, $\{\xi_\alpha; \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *слабо предкомпактна тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) *последовательность случайных величин* $\left\{\langle \xi_\alpha, f_1\rangle = \xi_\alpha\left(\mathbb{R}^d\right); \alpha \in \mathfrak{A}\right\}$ *слабо компактна;*

2) $\forall\, \varepsilon > 0\colon\ \sup\limits_{\mathfrak{A}} \mathrm{P}\{\langle \xi_\alpha, g_k\rangle > \varepsilon\} \to 0, \quad k \to \infty.$

Доказательство. Достаточность. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Из условия 1 и определения последовательности $\{f_k; k \ge 1\}$ следует существование последовательности чисел $\{a_k; k \ge 1\}$ такой, что

$$\forall\, \alpha \in \mathfrak{A} \quad \forall\, k \ge 1\colon \quad \mathrm{P}\{|\langle \xi_\alpha, f_k\rangle| > a_k\} < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Из условия 2 следует существование такой последовательности номеров $\{k_i; i \ge 1\}$, что

$$\forall\, \alpha \in \mathfrak{A} \quad \forall\, i \ge 1\colon \quad \mathrm{P}\left\{\left|\left\langle \xi_\alpha, g_{k_i}\right\rangle\right| > \frac{1}{i}\right\} < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}.$$

Рассмотрим множество

$$F = \left\{\mu\colon |\langle \mu, f_k\rangle| \le a_k,\ k \ge 1,\ \left\langle \mu, g_{k_i}\right\rangle \le \frac{1}{i},\ i \ge 1\right\}.$$

Согласно лемме 3 F — компакт в $(\mathfrak{M}, \rho)$. Кроме того, сейчас

$$\forall\, \alpha \in \mathfrak{A}\colon \quad \mathrm{P}\{\xi_\alpha \in F\} > 1 - \varepsilon.$$

Достаточность доказана.

Необходимость. Необходимость условия 1 очевидна. Докажем необходимость условия 2. Пусть $\{\xi_\alpha; \alpha \in \mathfrak{A}\}$ — слабо предкомпактное семейство. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует компакт K в $(\mathfrak{M}, \rho)$ такой, что

$$\forall\, \alpha \in \mathfrak{A}\colon \quad \mathrm{P}\{\xi_\alpha \in K\} > 1 - \varepsilon.$$

Согласно лемме 3

$$\sup_{\mu \in K} \langle \mu, g_k\rangle \to 0, \quad k \to \infty.$$

Поэтому

$$\exists\, k_0\colon \quad \forall\, k \ge k_0\colon \ \sup_{\mu \in K} \langle \mu, g_k\rangle < \varepsilon.$$

Отсюда

$$\forall\, \alpha \in \mathfrak{A} \quad \forall\, k \ge k_0\colon \quad \mathrm{P}\{\langle \xi_\alpha, g_k\rangle > \varepsilon\} < \varepsilon.$$

Следствие доказано.

2. Слабая компактность в пространстве $C([0;1], c_0)$. Рассмотрим вначале критерий слабой компактности в пространстве $C([0;1], c_0)$.

Лемма 4. *Замкнутое множество K в $C([0;1], c_0)$ компактно тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) *множество*

$$F = \left\{\max_{i \ge k} |\varphi_i|;\ \varphi \in K,\ k \ge 1,\ 0\right\}$$

— *компакт в* $C([0;1])$;

2) *при каждом* $k \ge 1$ *множество* $\{\varphi_k; \varphi \in K\}$ *компактно в* $C([0;1])$.

Доказательство. Необходимость. Проверим, что для произвольной $\varphi \in C\big([0;1], c_0\big)$ и $k \geq 1$ функция $\max\limits_{i \geq k} |\varphi_i|$ непрерывна на $[0;1]$. Действительно,

$$\forall\, t_1, t_2 \in [0;1] \quad \forall\, k \geq 1: \quad \left| \max_{i \geq k} |\varphi_i(t_1)| - \max_{i \geq k} |\varphi_i(t_2)| \right| \leq \max_{i \geq k} |\varphi_i(t_1) - \varphi_i(t_2)|.$$

Из приведенного соотношения следует равностепенная равномерная непрерывность функций из F. Рассмотрим при фиксированном $t \in [0;1]$ множество

$$\left\{ \max_{i \geq k} |\varphi_i(t)|,\ \varphi \in K,\ k \geq 1,\ 0 \right\}.$$

Нетрудно проверить, что это компакт в $\mathbb{R}$. Таким образом, F — компакт. Необходимость условия 2 очевидна.

Достаточность. Пусть выполнены условия 1 и 2. Рассмотрим произвольную последовательность функций $\{\varphi_k^n; k \geq 1\}$ из K. Используя диагональный метод Кантора, выбираем подпоследовательность $\{\varphi^{n_j}; j \geq 1\}$ такую, что при каждом $k \geq 1$ последовательности $\{\varphi^{n_j}; j \geq 1\}$ и $\left\{\max_{i \geq k} \left|\varphi_i^{n_j}\right|,\ j \geq 1\right\}$ равномерно сходятся к некоторым функциям φ_k и g_k соответственно. Тогда функция $\varphi = (\varphi_k)_{k \geq 1} \in C\big([0;1], c_0\big)$, так как

$$\sup_{[0;1]} \sup_{j \geq 1} \max_{i \geq k} \left| \varphi_i^{n_j}(t) \right| \to 0, \quad k \to \infty.$$

Кроме того, $\varphi^{n_j} \to \varphi$, $j \to \infty$, в $C\big([0;1], c_0\big)$. В силу замкнутости K $\varphi \in K$.

Лемма доказана.

Теорема 1. *Семейство* $\{\xi_\alpha; \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *случайных элементов в* $C\big([0;1], c_0\big)$ *слабо предкомпактно тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) *семейство* $\left\{\max_{i \geq k} \left|\xi_\alpha^i\right|;\ \alpha \in \mathfrak{A},\ k \geq 1\right\}$ *случайных процессов в* $C([0;1])$ *слабо предкомпактно;*

2) *при каждом* $k \geq 1$ *семейство* $\left\{\xi_\alpha^k;\ \alpha \in \mathfrak{A}\right\}$ *слабо предкомпактно в* $C([0;1])$;

3) $\forall\, t \in [0;1]$ $\forall\, \varepsilon > 0$: $\sup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathrm{P}\left\{ \max\limits_{k \geq n} \left|\xi_\alpha^k(t)\right| > \varepsilon \right\} \to 0, \quad n \to \infty.$

Доказательство. Необходимость. Пусть семейство $\{\xi_\alpha; \alpha \in \mathfrak{A}\}$ слабо предкомпактно в $C\big([0;1], c_0\big)$. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ существует компакт K в $C\big([0;1], c_0\big)$ такой, что

$$\inf_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathrm{P}\{\xi_\alpha \in K\} \geq 1 - \varepsilon.$$

Рассмотрим множество F в $C([0;1])$ вида

$$F = \left\{ \max_{i \geq k} \left|\varphi^i\right|;\ \varphi \in K,\ k \geq 1,\ 0 \right\}.$$

В силу леммы 4 F — компакт. При этом

$$\forall\, \alpha \in \mathfrak{A} \quad \forall\, k \geq 1: \quad \mathrm{P}\left\{\max_{i \geq k} \left|\xi_\alpha^i\right| \in F\right\} \geq 1 - \varepsilon.$$

Следовательно, условие 1 выполнено. Отметим теперь, что при фиксированном $t \in [0; 1]$

$$\sup_{x \in K} \max_{k \geq n} \left|x_k(t)\right| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Поэтому существует n_0 такой, что

$$\sup_K \max_{k \geq n_0} \left|x_k(t)\right| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\forall\, \alpha \in \mathfrak{A}: \quad \mathrm{P}\left\{\max_{k \geq n_0} \left|\xi_\alpha^k(t)\right| \geq \varepsilon\right\} < \varepsilon.$$

Поэтому условие 3 также выполнено. Необходимость условия 2 очевидна.

Достаточность. Пусть условия 1–3 выполнены. Докажем плотность в $C\big([0; 1], c_0\big)$ семейства распределений случайных элементов $\{\xi_\alpha; \alpha \in \mathfrak{A}\}$. Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно условию 1 в $C([0; 1])$ существует компакт F такой, что

$$\forall\, \alpha \in \mathfrak{A} \quad \forall\, k \geq 1: \quad \mathrm{P}\left\{\max_{i \geq k} \left|\xi_\alpha^i\right| \in F\right\} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4}$$

Для F справедливо соотношение

$$\sup_{f \in F} \sup_{|t_1 - t_2| \leq \delta} \left|f(t_1) - f(t_2)\right| \to 0; \quad \delta \to 0+.$$

Выберем такое разбиение отрезка $[0; 1]$ $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$, чтобы

$$\forall\, f \in F \quad \forall\, t \in [0; 1]: \quad \min_{i = \overline{0, n}} \left|f(t) - f(t_i)\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Согласно условию 3 существует номер n_0 такой, что

$$\sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathrm{P}\left\{\max_{k \geq n_0} \max_{i = \overline{0, n}} \left|\xi_\alpha^k(t_i)\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{6}$$

Из (6) и (5) с учетом (4) получаем

$$\sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathrm{P}\left\{\max_{k \geq n_0} \max_{[0; 1]} \left|\xi_\alpha^k(t)\right| > \varepsilon\right\} < \frac{2}{3}\varepsilon. \tag{7}$$

В силу условия 2 теоремы существует такой компакт G в $C\big([0; 1], \mathbb{R}^{n_0}\big)$, что

$$\inf_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathrm{P}\left\{\left(\xi_\alpha^1, \ldots, \xi_\alpha^{n_0}\right) \in G\right\} > 1 - \frac{\varepsilon}{3}. \tag{8}$$

Построим в $C\big([0; 1], c_0\big)$ компакт

$$\tilde{G} = \left\{\varphi\colon \left(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n_0}\right) \in G,\ \varphi_k \equiv 0,\ k > n_0\right\}.$$

Тогда из (7) и (8) следует

$$\forall\, \alpha \in \mathfrak{A}: \quad \mathrm{P}\left\{d\left(\xi_\alpha, \tilde{G}\right) > \varepsilon\right\} < \varepsilon. \tag{9}$$

Здесь d — расстояние в $C\left([0;1], c_0\right)$ от точки до множества, определенное обычным образом. Из (9) и произвольности ε следует плотность семейства распределений $\{\xi_\alpha; \alpha \in \mathfrak{A}\}$.

Теорема доказана.

3. Компактность распределений мерозначных процессов. Пусть $\{\xi_\alpha; \alpha \in \mathfrak{A}\}$ — случайные элементы в $C([0;1], \mathfrak{M})$. Как и ранее, обозначим через $\mathfrak{M}'$ пополнение пространства $\mathfrak{M}$ в метрике ρ_1. Отметим, что для произвольного $\alpha \in \mathfrak{A}$ ξ_α можно естественным образом рассматривать как случайный элемент в пространствах $C\left([0;1], \mathfrak{M}'\right)$ и $C\left([0;1], c_0\right)$.

Лемма 5. *Семейство* $\{\xi_\alpha; \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *слабо предкомпактно в* $C([0;1], \mathfrak{M})$ *тогда и только тогда, когда* $\{\xi_\alpha; \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *слабо предкомпактно в каждом из пространств* $C\left([0;1], \mathfrak{M}'\right)$ *и* $C\left([0;1], c_0\right)$.

Доказательство леммы следует из описания компактов в $\mathfrak{M}$ из леммы 3.

Теорема 2. *Семейство* $\{\xi_\alpha; \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *слабо предкомпактно в* $C([0;1], \mathfrak{M})$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) *для любого* $k \geq 1$ *семейство случайных процессов* $\{\langle \xi_\alpha, f_k\rangle; \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *слабо предкомпактно в* $C([0;1])$;

2) *семейство* $\{\langle \xi_\alpha, g_k\rangle; \alpha \in \mathfrak{A},\ k \geq 1\}$ *слабо предкомпактно в* $C([0;1])$;

3) $\forall\, t \in [0;1] \ \ \forall\, \varepsilon > 0: \ \sup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathrm{P}\{\langle \xi_\alpha(t), g_k\rangle > \varepsilon\} \to 0, \ k \to \infty.$

Доказательство. Согласно лемме 5 достаточно проверить предкомпактность в каждом из пространств $C\left([0;1], \mathfrak{M}'\right)$ и $C\left([0;1], c_0\right)$. Условие 1 равносильно предкомпактности в $C\left([0;1], \mathfrak{M}'\right)$, а условия 2 и 3 в силу теоремы 1 равносильны предкомпактности в $C\left([0;1], c_0\right)$.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь вопрос о компактности мерозначных процессов постоянной массы в пространстве мер, имеющих моменты. Обозначим для $n \geq 1$ через $\mathfrak{M}_n$ пространство всех вероятностных мер на $\mathbb{R}^d$, имеющих конечный n-й момент нормы. В $\mathfrak{M}_n$ введем расстояние Вассерштейна [2]

$$\gamma_n(\mu, \nu) = \left(\inf_{\kappa \in Q(\mu,\nu)} \iint_{\mathbb{R}^d} \|u - v\|^n \kappa(du, dv)\right)^{\frac{1}{n}},$$

где $Q(\mu, \nu)$ — множество всех вероятностных мер в $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, имеющих μ и ν своими маргинальными распределениями. Можно проверить, что $(\mathfrak{M}_n, \gamma_n)$ — полное сепарабельное метрическое пространство.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 6. *Последовательность* $\{\mu_k; k \geq 1\}$ *из* $\mathfrak{M}_n$ *сходится к* $\mu \in \mathfrak{M}_n$ *в метрике* γ_n *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) $\{\mu_k; k \geq 1\}$ *слабо сходится к* μ;

2) $\sup\limits_{k \geq 1} \int_{\mathbb{R}^d} \|u\|^n \mu_k(du) < +\infty$;

3) $\lim\limits_{m\to\infty} \sup\limits_{k\geq 1} \int\limits_{\|u\|\geq m} \|u\|^n \mu_k(du) = 0.$

Доказательство леммы стандартно и потому не приводится (см., например, [2]).

Введем теперь последовательность функций

$$h_k(u) = g_k(u)\|u\|^n, \qquad u\in\mathbb{R}^d, \quad k\geq 1.$$

Отображение

$$\mathfrak{M}_n \ni \mu \mapsto \{\langle \mu, h_k\rangle; k\geq 1\}$$

переводит $\mathfrak{M}_n^{\cdot}$ в c_0.

Из леммы следует, что сходимость в метрике γ_n равносильна теперь сходимости в метрике

$$\rho(\mu, \nu) = \rho_1(\mu, \nu) + \max_{k\geq 1}|\langle \mu, h_k\rangle - \langle \nu, h_k\rangle|.$$

Следовательно, справедливы все дальнейшие рассуждения пп. 2 и 3 о характеризации компактов в $\mathfrak{M}_n$ и $C([0;1], \mathfrak{M}_n)$, а также о слабой компактности в $C([0;1], \mathfrak{M}_n)$. Приведем соответствующую теорему.

Теорема 3. *Семейство случайных элементов* $\{\xi_\alpha; \alpha\in\mathfrak{A}\}$ *слабо предкомпактно в* $C([0;1], \mathfrak{M}_n)$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) *для любого* $k\geq 1$ *семейство случайных процессов* $\{\langle \xi_\alpha, f_k\rangle; \alpha\in\mathfrak{A}\}$ *слабо предкомпактно в* $C([0;1])$;

2) *семейство* $\{\langle \xi_\alpha, h_k\rangle; \alpha\in\mathfrak{A}, k\geq 1\}$ *слабо предкомпактно в* $C([0;1])$;

3) $\forall\, t\in[0;1]\ \ \forall\, \varepsilon>0$: $\sup\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathrm{P}\{\langle \xi_\alpha(t), h_k\rangle > \varepsilon\} \to 0,\ k\to\infty.$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.

1. *Скороход А. В.* Стохастические уравнения для сложных систем. – М.: Наука, 1983. – 192 с.
2. *Dudley R. M.* Real analysis and probability. – Belmont (California): Wadsworth and Brooks, 1989. – 320 p.

Получено 17.04.2003