УДК 517.5

В. В. Савчук (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАЙКРАЩІ НАБЛИЖЕННЯ ТВІРНИХ ЯДЕР ПРОСТОРІВ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Exact values are found for the best approximation of reproducing kernel of a system of p-Faber polynomials by functions from the Hardy space H_q, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, and for the best approximation of the Szegő reproducing kernel of the space $E_2(\Omega)$ in the simply-connected domain Ω with a rectifiable boundary.

Знайдено точні значення величин найкращого наближення твірного ядра системи p-фаберових многочленів функціями простору Харді H_q, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, та твірного ядра Сеге простору $E_2(\Omega)$ в однозв'язній області Ω зі спрямлюваною межею.

1. Вступ. Нехай Γ — замкнена жорданова спрямлювана крива в комплексній площині $\mathbb{C}$. Через Ω і Ω_∞ будемо позначати компоненти $\operatorname{int}\Gamma$ і $\operatorname{ext}\Gamma$ двозв'язної області $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ на сфері Рімана $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, перша з яких (та, що не містить нескінченно віддаленої точки ∞) називається внутрішністю Γ, а друга — зовнішністю кривої Γ. У випадку, коли Γ збігається з одиничним колом, тобто $\Gamma = \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, будемо писати $\mathbb{D}$ і $\mathbb{D}_\infty$ замість Ω і Ω_∞ відповідно.

Внаслідок теореми Рімана існує єдина голоморфна в $\mathbb{D}_\infty$ функція Ψ, що конформно відображає область $\mathbb{D}_\infty$ на область Ω_∞ за умов $\Psi(\infty) = \infty$, $\lim\limits_{w \to \infty} w^{-1}\Psi(w) = \gamma > 0$.

Покладемо

$$K_p(w, z) := \frac{w[\Psi'(w)]^{1-1/p}}{\Psi(w) - z}.$$

Якщо $1 \le p \le \infty$ і $z \in \Omega$, то функція $w \mapsto K_p(w, z)$, $w \in \mathbb{D}_\infty$, називається твірним ядром системи p-фаберових (узагальнених) многочленів $\{F_{k,p}\}_{k=0}^{\infty}$, що відповідають області Ω (див., наприклад, [1, с. 369, 375]), при цьому

$$K_p(w, z) = \sum_{k=0}^{\infty} F_{k,p}(z) w^{-k} \qquad \forall\, w \in \mathbb{D}_\infty, \tag{1}$$

де ряд в (1) збігається рівномірно в області $\mathbb{D}_\infty$ при кожному фіксованому z в Ω.

Нехай $0 < p < \infty$, σ — нормована міра Лебега на колі $\mathbb{T}$ і $L_p(\mathbb{T})$ — простір функцій $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, вимірних відносно σ, які задовольняють умову

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{T})} := \left(\int_{\mathbb{T}} |f(w)|^p \, d\sigma(w)\right)^{1/p} < \infty.$$

Через $L_\infty(\mathbb{T})$ будемо позначати простір функцій $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, вимірних відносно σ, які задовольняють умову

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{T})} := \operatorname*{ess\,sup}_{w \in \mathbb{T}} |f(w)| < \infty.$$

Нехай, далі,

$$L_p(\mathbb{T})_+ := \left\{ f \in L_p(\mathbb{T}) : \int_{\mathbb{T}} f(w) w^k d\sigma(w) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \right\}$$

і

$$L_p^0(\mathbb{T})_+ := \left\{ f \in L_p(\mathbb{T})_+ : \int_{\mathbb{T}} f(w) d\sigma(w) = 0 \right\}.$$

Відомо [1], що коли $1 \le p \le \infty$, то внаслідок спрямлюваності кривої Γ при кожному фіксованому $z \in \Omega$ функція $w \mapsto K_p(w, z)$ має на колі $\mathbb{T}$ граничні значення (які будемо позначати так само через $K_p(w, z)$) по недотичних шляхах в області $\mathbb{D}_\infty$, ці граничні значення належать просторові $L_q(\mathbb{T})_- :=$ $:= L_q(\mathbb{T}) \setminus L_q^0(\mathbb{T})_+$, де $q = p/(p-1)$, і розкладається в ряд Фур'є

$$K_p(e^{it}, z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} F_{k,p}(z) e^{-ikt}. \tag{2}$$

Величину найкращого наближення функції $K_p(\cdot, z)$ при фіксованому $z \in \Omega$ функціями простору $L_q^0(\mathbb{T})_+$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, будемо позначати через $E(K_p, z)_q$, тобто

$$E(K_p, z)_q := \inf \left\{ \left\| K_p(\cdot, z) - g(\cdot) \right\|_{L_q(\mathbb{T})} : g \in L_q^0(\mathbb{T})_+ \right\}.$$

Ця величина є модифікацією величини

$$\mathscr{E}(\Gamma, z)_q := \inf \left\{ \left(\int_{\mathbb{T}} \left| \frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} - \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k(z) w^k \right|^q |dw| \right)^{1/q} : \mu_k(\cdot) \text{ визначена в } \Omega \right\},$$

яку вперше введено в [2] при оцінюванні похибок наближення інтегралів типу Коші многочленами, що будуються на основі розкладів в ряди за фарберовими ($p = \infty$) многочленами $\{F_k\}_{k=0}^{\infty}$ у внутрішніх точках області Ω за умови, що граничні значення на колі $\mathbb{T}$ функції Ψ' належать $L_q(\mathbb{T})$.

У випадку, коли $\Gamma = \mathbb{T}$ (у цьому випадку $K_p(w, z) = (1 - \overline{w}z)^{-1}$), відомо (див., наприклад, [3], твердження 7), що для будь-якого $q \in [1, \infty)$ і $q = \infty$

$$E(K_p, z)_q = \mathscr{E}(\mathbb{T}, z)_q = \left(1 - |z|^2\right)^{-1/p}, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

У термінах величини, що стоїть у правій частині цих рівностей, а отже, у термінах $\mathscr{E}(K_p, z)_q$ виражено точні значення поперечників класів Харді у рівномірній метриці [4, 5], точні значення величин найкращого лінійного наближення [6], оцінки поперечників класів Харді в інтегральних метриках [7]. При доведеннях більшості цих результатів істотно використовується, хоча це явно не зазначається, лема Шварца, яку в термінах величини $\mathscr{E}(\Gamma, z)_q$ можна сформулювати в такому вигляді (див., наприклад, [8]):

для будь-якої функції $f \in L_p^0(\mathbb{T})_+$ її інтеграл типу Коші

$$\mathcal{K}(f)(z) := \int_{\mathbb{T}} \frac{f(w)}{1 - \overline{w}z} d\sigma(w)$$

в кожній точці $z \in \mathbb{D}$ можна оцінити таким чином:

$$|\mathcal{K}(f)(z)| \le \frac{|z|}{\left(1 - |z|^2\right)^{1/p}} \|f\|_{L_p(\mathbb{T})} = |z| \mathscr{E}(\mathbb{T}, z)_q \|f\|_{L_p(\mathbb{T})}. \tag{3}$$

Нерівність (3) *є непокращуваною в тому розумінні, що при фіксованому* $z \in \mathbb{D}$ *для функції*

$$f_z(w) := w\left(\frac{1-|z|^2}{(1-\bar{z}w)^2}\right)^{1/p}$$

в (3) *виконується рівність.*

Одне з можливих узагальнень цього твердження для функцій, що є аналітичними в області Ω, можна подати у вигляді співвідношення

$$\sup\left\{\left|\int_{\mathbb{T}} f(w)K_p(w,z)\,d\sigma(w)\right| : f \in L_p(\mathbb{T})_+,\ \|f\|_{L_p(\mathbb{T})} \le 1\right\} = E(K_p, z)_q, \qquad (4)$$

яке випливає із співвідношень двоїстості, доведених у роботі [9].

У роботі [9] (див. також [8, 10, 11]) вказано необхідні і достатні умови, за яких існують екстремальні функції f^* і g^*, на яких реалізуються верхня межа в лівій частині (4) і величина $E(K_p, z)_q$. Проте задача про знаходження явного вигляду цих функцій і точного значення величини $E(K_p, z)_q$, окрім випадку, коли $p = q = 2$, як відомо авторові, залишається не розв'язаною у загальному випадку.

Метою даної статті є знаходження аналітичного виразу для функції

$$z \mapsto E(K_p, z)_q, \quad z \in \Omega,$$

при кожному значенні параметра p, $1 < p < \infty$, і при $q = p/(p-1)$ для якнайширшої множини кривих Γ. Паралельно буде знайдено точне значення величини найкращого наближення твірного ядра Сеге простору Смірнова $E_2(\Omega)$.

Можна сподіватися, що отримані в цій роботі результати, крім самостійного інтересу, можуть знадобитись і при узагальненні результатів робіт [6, 7] про точні значення ряду апроксимативних величин на випадок наближень класів аналітичних функцій, що зображуються інтегралами типу Коші вздовж кривої Γ, функцій простору $E_p(\Omega)$.

2. Інтеграли типу Коші, простори $E_p(\Omega)$, твірні ядра та мінімальна функція області. Під інтегралами типу Коші вздовж Γ будемо розуміти значення оператора $\mathcal{K}_p$, визначеного на просторі $L_p(\mathbb{T})$, що діє за правилом

$$\mathcal{K}_p(f)(z) = \int_{\mathbb{T}} f(w)K_p(w,z)\,d\sigma(w).$$

Дійсно, функція $\mathcal{K}_p(f)(\cdot)$ є аналітичною в області $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$, і оскільки $d\sigma(w) = dw/(2\pi i w)$, $w \in \mathbb{T}$, то виконуючи заміну змінних $w = \Phi(\zeta) := \Psi^{-1}(\zeta)$, одержуємо зображення

$$\mathcal{K}_p(f)(\cdot) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} (f \circ \Phi)(\zeta)[\Phi'(\zeta)]^{1/p}\frac{d\zeta}{\zeta - \cdot},$$

де $\circ$ — символ композиції. Отже, функція $\mathcal{K}_p(f)(\cdot)$ є інтегралом типу Коші зі щільністю $(f \circ \Phi)(\zeta)[\Phi'(\zeta)]^{1/p}$ у звичайному розумінні.

Скрізь далі під $\mathcal{K}_p(f)(\cdot)$ будемо розуміти звуження функції $\mathcal{K}_p(f)(\cdot)$ на область Ω, тобто покладаємо $\mathcal{K}_p(f) = \mathcal{K}_p(f)\big|_{\Omega}$.

Повторюючи хід доведення твердження 2 із [3], можна показати, що для будь-якого $p \in (1, \infty)$

$$\mathcal{K}_p(L_p(\mathbb{T})) = \mathcal{K}_p(L_p(\mathbb{T})_+). \qquad (5)$$

Простір $E_p(\Omega)$ складається з усіх аналітичних в Ω функцій f, для кожної з яких знайдеться послідовність $\{G_j\}_{j\geq 1}$ однозв'язних областей зі спрямлюваними межами ∂G_j, що вичерпує область Ω, така, що

$$\sup_j \int_{\partial G_j} |f(w)|^p |dw| < \infty.$$

Під висловом „послідовність $\{G_j\}_{j\geq 1}$ областей вичерпує область Ω" розуміють таке: $G_j \subset \Omega$, $j = 1, 2, \ldots$, і для будь-якої компактної частини K області Ω знайдеться такий номер $j(K)$, що $K \subset G_j$ при всіх $j > j(K)$.

Нехай σ_Γ — нормована міра Лебега на кривій Γ (елемент довжини кривої Γ) і φ — конформне відображення області Ω на круг $\mathbb{D}$. Надалі ми будемо користуватися виразом міри σ_Γ у термінах конформного відображення φ:

$$d\sigma_\Gamma(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)d\zeta}{i|\Gamma||\varphi'(\zeta)|\varphi(\zeta)} \quad \text{майже скрізь на } \Gamma, \tag{6}$$

де $|\Gamma|$ — довжина кривої Γ.

Відомо, що кожна функція f простору $E_p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, у випадку, коли межа Γ є спрямлюваною, має на Γ граничні значення по недотичних до Γ шляхах в області Ω, причому ці граничні значення утворюють функцію (за якою збережемо позначення f), вимірну відносно σ_Γ і сумовну в p-му степені. У такому випадку норма в $E_p(\Omega)$ вводиться таким чином:

$$\|f\|_{E_p(\Omega)} := \|f\|_{L_p(\Gamma)} := \begin{cases} \left(\int_\Gamma |f(w)|^p d\sigma_\Gamma(w)\right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty; \\ \sup_{z\in\Omega} |f(z)|, & p = \infty. \end{cases}$$

У випадку, коли $\Omega = \mathbb{D}$, простір $E_p(\mathbb{D})$ збігається з простором Харді H_p.

У цій роботі при відшуканні аналітичного виразу для функції $z \mapsto E(K_p, z)_q$, $z \in \Omega$, будемо розглядати лише ті криві Γ, для яких оператор $\mathcal{K}_p$ діє неперервно з $L_p(\mathbb{T})$ у простір $E_p(\Omega)$.

Із результатів робіт [12, 13] випливає, що множина таких кривих збігається з множиною замкнених регулярних кривих. Так називають [13] криві Γ, для кожної з яких існує своя константа $C > 0$ така, що для будь-яких $\zeta \in \Gamma$ і $r > 0$ довжина тієї частини кривої, яка міститься в крузі $\mathbb{D}_r(\zeta) := \{z \in \mathbb{C} : |z - \zeta| < < r\}$, не перевищує числа Cr.

Таким чином, для замкнених регулярних кривих Γ з (5) випливає рівність множин

$$\mathcal{K}_p(L_p(\mathbb{T})_+) = E_p(\Omega), \quad 1 < p < \infty. \tag{7}$$

Справді, з одного боку, згідно з результатом В. І. Смірнова (див., наприклад, [14, с. 423]), $E_p(\Omega) \subseteq \mathcal{K}_p(L_p(\mathbb{T})_+)$, а з іншого — для регулярних кривих $\mathcal{K}_p(f) \in \in E_p(\Omega)$ для будь-якої $f \in L_p(\mathbb{T})_+$, тому $\mathcal{K}_p(L_p(\mathbb{T})_+) \subseteq E_p(\Omega)$.

Звуження оператора $\mathcal{K}_p$ на простір $L_p(\mathbb{T})_+$ позначимо через T_p, тобто $T_p := \mathcal{K}_p\big|_{L_p(\mathbb{T})_+}$. Маючи на увазі вкладення (7), норму оператора T_p, як оператора, що діє в $E_p(\Omega)$, позначимо через $\|T_p\|$:

$$\|T_p\| := \sup_{\substack{f\in L_p(\mathbb{T})_+ \\ f\neq 0}} \frac{\|T_p(f)\|_{E_p(\Omega)}}{\|f\|_{L_p(\mathbb{T})}}.$$

Таким чином, норма оператора T_p для будь-якої регулярної кривої Γ задовольняє співвідношення $1 \leq \|T_p\| < \infty$.

Оператор T_p, мабуть, вперше розглядався у роботах [15, 16], де був названий p-фаберовим оператором ($1 \leq p < \infty$) і фаберовим при $p = \infty$.

Ядром Сеге області Ω називають функцію $(\zeta, z) \mapsto S(\zeta, z)$ (див., наприклад, [17, 18]), визначену на декартовому добутку $\Omega\times\Omega$, що є антианалітичною за першою змінною та аналітичною за другою змінною ($S(z,\cdot)\in E_2(\Omega)$) і, окрім цього, задовольняє умови

$$f(z) = \int_\Gamma f(\zeta)\overline{S(z,\zeta)}\,d\sigma_\Gamma(\zeta) \qquad \forall f\in E_2(\Omega), \quad \forall z\in\Omega. \tag{8}$$

Ядро Сеге є твірним ядром простору (гільбертового) $E_2(\Omega)$ в тому розумінні, що за допомогою інтеграла, що стоїть у правій частині (8), відтворюються всі функції простору $E_2(\Omega)$ через свої граничні значення.

Ядро Сеге має також низку екстремальних властивостей. Зокрема, розв'язком екстремальної задачі

$$\|f\|_{E_2(\Omega)} \to \min, \quad f\in E_{2,\xi,\alpha}(\Omega), \quad \xi\in\Omega, \tag{9}$$

де

$$E_{2,\xi,\alpha}(\Omega) := \{f\in E_2(\Omega) : f(\xi) = \alpha\},$$

є функція

$$f_{\xi,\alpha}(z) := \alpha\frac{S(\xi,z)}{S(\xi,\xi)}.$$

Функція $f_{\xi,1}$, що є розв'язком екстремальної задачі (9), називається мінімальною функцією (для точки ξ) області Ω у просторі $E_2(\Omega)$.

Іноді ядром Сеге називають функцію, задану рівністю

$$S(z,\xi) = f_{\xi,1}(z)\|f_{\xi,1}\|^{-2}_{E_2(\Omega)}.$$

3. Основні результати. У прийнятих вище позначеннях має місце така теорема.

Теорема 1. *Нехай $1 < p < \infty$, $q = p/(p-1)$, φ — конформне відображення Ω на $\mathbb{D}$ і $\Gamma = \partial\Omega$ — регулярна крива. Тоді для будь-якого $z\in\Omega$ є правильними рівності*

$$E(K_p, z)_q = \|T_p\|\left(\frac{|\Gamma|}{2\pi}\frac{|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{1/p} = \|T_p\|\,S(z,z)^{1/p} =$$
$$= \|T_p\|\|T_2\|^{-2/p}\|K_2(\cdot,z)\|^{2/p}_{L_2(\mathbb{T})} = \|T_p\|\|T_2\|^{-2/p}\left(\sum_{k=0}^\infty |F_{k,2}(z)|^2\right)^{1/p}. \tag{10}$$

Зауваження. При $p = \infty$, $q = 1$, як показано в [19], можна ствердити наступне: для будь-якої спрямлюваної кривої Γ

$$\sup_{z\in\Omega} E(K_\infty, z)_1 = \sup_{z\in\Omega} \mathscr{E}(\Gamma, z)_1 = \|T_\infty\|.$$

Область, межа якої є замкненою жордановою спрямлюваною кривою такою, що $\|T_\infty\| < \infty$, називається областю Фабера.

Наступні твердження є по суті етапами доведення теореми 1, проте вони не позбавлені й самостійного інтересу.

Теорема 2. *Нехай* Ω — *однозв'язна область зі спрямлюваною замкненою жордановою межею і* φ — *конформне відображення* Ω *на* $\mathbb{D}$. *Тоді для будь-якої функції* $f \in E_p(\Omega)$, $p > 0$, *в кожній точці* $\xi \in \Omega$ *виконується нерівність*

$$|f(\xi)| \le \left(\frac{|\Gamma|}{2\pi}\frac{|\varphi'(\xi)|}{1-|\varphi(\xi)|^2}\right)^{1/p} \|f\|_{E_p(\Omega)}. \tag{11}$$

Для функції

$$f^*(z) := \left(\frac{|\Gamma|}{2\pi}\frac{1-|\varphi(\xi)|^2}{(1-\overline{\varphi(\xi)}\varphi(z))^2}\frac{\overline{\varphi'(\xi)}\varphi'(z)}{|\varphi'(\xi)|}\right)^{1/p}$$

в (11) *має місце рівність.*

Звернемо тепер увагу ще раз на рівність (8), зауваживши, що вона має місце і для функцій простору $E_p(\Omega)$, $1 \le p < 2$, у тих випадках, коли для деякого $z \in \Omega$ функція $S(z,\cdot)$ належить простору $E_q(\Omega)$, $p^{-1}+q^{-1} = 1$, що рівносильно умові $\sqrt{\varphi_z'} \in E_q(\Omega)$ [20, с. 291], де φ_z — конформне відображення Ω на $\mathbb{D}$, нормоване умовами $\varphi_z(z) = 0$ і $\varphi_z'(z) > 0$.

Природно виникає питання про те, який вигляд матимуть твірне ядро та мінімальна функція простору $E_p(\Omega)$, $1 \le p < 2$, у загальному випадку.

Відповідь на перше питання дає така теорема.

Теорема 3. *Нехай* $1 \le p \le \infty$ *і* Ω — *однозв'язна область зі спрямлюваною замкненою жордановою межею* Γ. *Для будь-якої функції* $f \in E_p(\Omega)$

$$f(z) = \int_\Gamma f(\zeta) S_p(\zeta, z)\, d\sigma_\Gamma(\zeta) \quad \forall z \in \Omega, \tag{12}$$

де

$$S_p(\zeta, z) := S(z,z)^{2/p-1}\frac{|S(z,\zeta)|^2}{S(z,\zeta)^{2/p}}.$$

Зазначимо, що у випадку, коли область Ω є такою, що $0 < K_1 \le \varphi'(\zeta) \le K_2$ $\forall \zeta \in \Omega$ (K_1, K_2 — деякі константи), рівність (12) випливає з теореми 1 роботи [21].

Наступне зауваження до теореми 3 стосується випадку, коли $\Omega = \mathbb{D}$, $p = \infty$. У цьому випадку ядро $S_\infty(\zeta, z)$ збігається з ядром Пуассона, тобто

$$S_\infty(\zeta, z) = P(\zeta, z) := \frac{1-|z|^2}{|1-\bar{\zeta}z|^2},$$

а рівність (12) є відомою формулою Пуассона

$$f(z) = \int_{\mathbb{T}} f(\zeta) P(\zeta, z)\, d\sigma(\zeta) \quad \forall z \in \Omega.$$

Як одне з поширень цієї формули для функцій, що є аналітичними в довільних обмежених областях зі спрямлюваними межами, можна розглядати наступне твердження.

Покладемо

$$L_p(\Gamma, \varphi') := \left\{ f : \int_\Gamma |f(\zeta)|^p |\varphi'(\zeta)|\, d\sigma_\Gamma(\zeta) < \infty \right\}, \quad 1 \le p < \infty.$$

Зауважимо, що коли за вагу φ' виберемо похідну конформного відображення області Ω на круг $\mathbb{D}$, то для будь-яких двох таких відображень φ_1 і φ_2 буде правильною рівність множин $L_p(\Gamma, \varphi_1') = L_p(\Gamma, \varphi_2')$. Іншими словами, множина $L_p(\Gamma, \varphi')$ не залежить від вибору конформного відображення φ.

Теорема 4. *Нехай Ω — обмежена однозв'язна область зі спрямлюваною межею. Для того щоб функцію f, аналітичну в області Ω, можна було зобразити у вигляді інтеграла*

$$f(z) = \int_\Gamma g(\zeta) \frac{|S(\zeta, z)|^2}{S(z, z)} d\sigma_\Gamma(\zeta) \quad \forall z \in \Omega, \tag{13}$$

в якому функція $g \in L_1(\Gamma, \varphi')$, необхідно і достатньо, щоб для кожного конформного відображення $\varphi : \Omega \to \mathbb{D}$ добуток $f\varphi' \in E_1(\Omega)$.

У випадку, коли $\Omega = \mathbb{D}$ (у цьому випадку $\varphi_0' \equiv 1$, $E_1(\Omega) = H_1$), теорема 4 є відомою як теорема Г. М. Фіхтенгольця (див., наприклад, [14, с. 392]).

Зауважимо, що використовуючи рівність (21), ядро

$$S_\infty(\zeta, z) = \frac{|S(\zeta, z)|^2}{S(z, z)}$$

можемо записати у вигляді

$$S_\infty(\zeta, z) = \frac{|\Gamma|}{2\pi} \frac{1 - |\varphi(z)|^2}{\left|1 - \overline{\varphi(\zeta)}\varphi(z)\right|^2} |\varphi'(\zeta)| = \frac{|\Gamma|}{2\pi} P(\varphi(\zeta), \varphi(z)) |\varphi'(\zeta)|, \quad \zeta,\ z \in \Omega. \tag{14}$$

Отже, рівності (13) і (14) підтверджують відомий факт, що гармонічна міра $d\mu_\tau(w) := P(w, \tau)|dw|$, $\tau \in \mathbb{D}$, визначена на колі $\mathbb{T}$, є інваріантною відносно конформних відображень.

Тому формулу (13) можна вважати одним із варіантів поширення формули Пуассона на однозв'язні області. З неї на підставі відомих фактів про граничну поведінку інтеграла Пуассона в крузі $\mathbb{D}$ (див., наприклад, [8, 14, с. 372]) випливає, що для будь-якої функції $g \in L_p(\Gamma, \varphi')$, $1 \le p \le \infty$, інтеграл

$$\int_\Gamma g(\zeta) \frac{|S(\zeta, z)|^2}{S(z, z)} d\sigma_\Gamma(\zeta)$$

задає в області Ω гармонічну функцію, яка має границю при прямуванні точки z до межі області по будь-якому недотичному шляху майже в кожній точці кривої Γ, і ця границя майже скрізь на Γ збігається з функцією g.

Застосування теореми 3 дає змогу довести одне твердження про зв'язок ядер $S_p(z, \zeta)$ і $S(z, \zeta)$ з мінімальною функцією області у просторі $E_p(\Omega)$ та розв'язками деяких екстремальних задач.

Нехай $\alpha \in \mathbb{C}$. Покладемо

$$E_{p,\xi,\alpha}(\Omega) := \{f \in E_p(\Omega) : f(\xi) = \alpha\}$$

і

$$E_p^0(\Omega) := \left\{ f \in E_p(\Omega) : \int_\Gamma f(\zeta) d\sigma_\Gamma(\zeta) = 0 \right\}.$$

Теорема 5. *Нехай Ω — однозв'язна область зі спрямлюваною замкненою жордановою межею, $\xi \in \Omega$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $1 \le p \le \infty$.*

1. *Екстремальна задача*

$$\left\| S_p(\cdot,\xi) - g(\cdot) \right\|_{E_q(\Omega)} \to \min, \quad g \in E_q^0(\Omega), \quad p^{-1} + q^{-1} = 1, \tag{15}$$

має єдиний розв'язок $g_* \equiv 0$.

2. *Якщо для деякого* $z \in \Omega$ $\sqrt{\varphi_z'} \in E_q(\Omega)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, *то екстремальна задача*

$$\| S(\cdot,\xi) - g(\cdot) \|_{E_q(\Omega)} \to \min, \quad g \in E_q^0(\Omega), \tag{16}$$

має єдиний розв'язок

$$g_*(z) := S(z,\xi)\left(1 - \left(\frac{S(\xi,z)}{S(\xi,\xi)}\right)^{2/q-1}\right), \tag{17}$$

а шуканий мінімум знаходиться за формулою

$$\min\left\{\| S(\cdot,\xi) - g(\cdot) \|_{E_q(\Omega)} : g \in E_q^0(\Omega)\right\} = \left\| S_p(\cdot,\xi) \right\|_{E_q(\Omega)} = S(\xi,\xi)^{1/p}. \tag{18}$$

3. *Екстремальна задача*

$$|f(\xi)| \to \max, \quad f \in E_p(\Omega), \quad \|f\|_{E_q(\Omega)} \le 1, \tag{19}$$

має єдиний розв'язок

$$f^*(z) := S(\xi,\xi)^{-1/p} S(\xi,z)^{2/p}.$$

4. *Екстремальна задача*

$$\|f\|_{E_p(\Omega)} \to \min, \quad f \in E_{p,\xi,\alpha}(\Omega), \tag{20}$$

має єдиний розв'язок

$$f_*(z) := \alpha S(\xi,\xi)^{-1/p} f^*(z) = \alpha\left(\frac{S(\xi,z)}{S(\xi,\xi)}\right)^{2/p},$$

який є мінімальною функцією області Ω *для точки* ξ *у просторі* $E_p(\Omega)$.

Шуканий мінімум знаходиться за формулою

$$\min\left\{\|f\|_{E_p(\Omega)} : f \in E_{p,\xi,\alpha}(\Omega)\right\} = \alpha S(\xi,\xi)^{-1/p}.$$

Третій пункт теореми 5 є добре відомим твердженням [14, с. 425]. Ми ввели його до формулювання теореми з метою повноти висвітлення суті питання найкращого наближення та ілюстрації екстремальних властивостей ядра Сеге, адже задача (19) є двоїстою до екстремальної задачі (16), а задача (20) є, в певному розумінні, оберненою до (19).

Зауважимо, що розв'язок екстремальної задачі (19) можна отримати з теореми 2, а саме, екстремальна функція в теоремі 2 є розв'язком задачі (19). Таким чином, зрівнюючи екстремальну функцію з теореми 2 з екстремальною функцією в теоремі 5 (пункт 3), одержуємо вираз ядра Сеге через будь-яке конформне відображення області Ω на круг $\mathbb{D}$:

$$S(\xi,z) = \frac{|\Gamma|}{2\pi} \frac{\overline{\sqrt{\varphi'(\xi)}}\sqrt{\varphi'(z)}}{1 - \overline{\varphi(\xi)}\,\varphi(z)}. \tag{21}$$

4. Доведення основних результатів. ***Доведення теореми* 1.** Доведення першої рівності в (10) ґрунтується на співвідношенні двоїстості (4), в якому інтеграл є інтегралом типу Коші згідно з прийнятими у цій статті позначеннями.

Оскільки крива Γ є регулярною кривою, то згідно з (7) оператор T_p є обмеженим і образ $T_p(f)(\cdot)$ будь-якої функції $f \in L_p(\mathbb{T})_+$ є функцією простору $E_p(\Omega)$ з нормою, що не перевищує числа $\|T_p\| \|f\|_{L_p(\mathbb{T})}$, і, навпаки, для будь-якої функції $g \in E_p(\Omega)$, $\|g\|_{E_p(\Omega)} \le 1$, серед множини $L_p(\mathbb{T})_+$ знайдеться функція f, $\|f\|_{L_p(\mathbb{T})} \le 1$, така, що $\|T_p\| g(z) = T_p(f)(z)$ для будь-якого $z \in \Omega$. Таким чином, правильною є рівність

$$\sup\left\{ \left|T_p(f)(z)\right| : f \in L_p(\mathbb{T})_+, \|f\|_{L_p(\mathbb{T})} \le 1 \right\} =$$

$$= \|T_p\| \sup\left\{ |f(z)| : f \in E_p(\Omega), \|f\|_{E_p(\Omega)} \le 1 \right\} \quad \forall z \in \Omega,$$

з якої згідно з (4) випливає співвідношення

$$E(K_p, z)_q = \|T_p\| \sup\left\{ |f(z)| : f \in E_p(\Omega), \|f\|_{E_p(\Omega)} \le 1 \right\} \quad \forall z \in \Omega. \tag{22}$$

Згідно з теоремою 2 супремум у правій частині останньої рівності дорівнює величині $(|\Gamma| |\varphi'(z)| / (2\pi(1 - |\varphi(z)|^2)))^{1/p}$.

Таким чином,

$$E(K_p, z)_q = \|T_p\| \left(\frac{|\Gamma|}{2\pi} \frac{|\varphi'(z)|}{1 - |\varphi(z)|^2} \right)^{1/p} \quad \forall z \in \Omega.$$

Друга рівність в (10) випливає із співвідношення (22), якщо скористатися п. 3 теореми 5, за яким супремум у правій частині (22) дорівнює величині $S(z, z)^{1/p}$.

Для доведення третьої і четвертої рівностей в (10) досить зауважити, що згідно з (1), (2) і доведеними вище рівностями

$$S(z, z) = \|T_2\|^{-2} \left(\|T_2\| S(z, z)^{1/2} \right)^2 = \|T_2\|^{-2} (E_2(K_2, z)_2)^2 =$$

$$= \|T_2\|^{-2} \|K_2(\cdot, z)\|^2_{L_2(\mathbb{T})} = \|T_2\|^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \left| F_{k,2}(z) \right|^2.$$

Теорему доведено.

***Доведення теореми* 2.** Зафіксуємо $\xi \in \Omega$ і розглянемо будь-яке конформне відображення φ області Ω на круг $\mathbb{D}$. Нехай $\psi := \varphi^{-1}$ — конформне відображення круга $\mathbb{D}$ на область Ω, обернене до φ. За означенням класу $E_p(\Omega)$, введеного В. І. Смірновим, $f \in E_p(\Omega)$ тоді і тільки тоді, коли $f \circ \psi \cdot (\psi')^{1/p} \in H_p$. Таким чином, згідно з відомими нерівностями для функцій простору Харді (див., наприклад, [6]) маємо

$$\left| (f \circ \psi)(w) (\psi'(w))^{1/p} \right| \le \left(\frac{|\Gamma|}{2\pi} \right)^{1/p} \frac{\|f\|_{E_p(\Omega)}}{\left(1 - |w|^2\right)^{1/p}}.$$

Покладаючи тепер $w = \varphi(\xi)$, отримуємо

$$|f(\xi)| \le \left(\frac{|\Gamma|}{2\pi} \frac{|\varphi'(\xi)|}{1 - |\varphi(\xi)|^2} \right)^{1/p} \|f\|_{E_p(\Omega)}.$$

Екстремальну функцію f^*, для якої в останньому співвідношенні виконується рівність, шукаємо з умови

$$\left(\frac{|\Gamma|}{2\pi}\frac{1-|w|^2}{(1-\overline{w}\tau)^2}\right)^{1/p} = e^{i\alpha/p}(f^*\circ\psi)(\tau)(\psi'(\tau))^{1/p} \quad \forall\,\tau\in\mathbb{D},$$

де $\alpha = -\arg\psi'(w)$.

Таким чином, покладаючи $w = \varphi(\xi)$, $\tau = \varphi(z)$, маємо

$$f^*(z) = \left(\frac{|\Gamma|}{2\pi}\frac{1-|\varphi(\xi)|^2}{(1-\overline{\varphi(\xi)}\varphi(z))^2}\frac{\overline{\varphi'(\xi)}\varphi'(z)}{|\varphi'(\xi)|}\right)^{1/p}.$$

Теорему 2 доведено.

***Доведення теореми* 3.** Нехай $1 \le p < \infty$ і $f\in E_p(\Omega)$. Зрозуміло, що для довільного фіксованого $z\in\Omega$ функція $\zeta\mapsto S_p(\zeta, z)$, $\zeta\in\Gamma$, належить простору $L_q(\Gamma)$, $p^{-1}+q^{-1} = 1$, тому інтеграл

$$I_p(f)(z) := \int_\Gamma f(\zeta)S_p(\zeta, z)\,d\sigma_\Gamma(\zeta) \tag{23}$$

існує та є скінченним.

Зафіксуємо $z\in\Omega$ і позначимо через φ_z конформне відображення Ω на $\mathbb{D}$, нормоване умовами $\varphi_z(z) = 0$, $\varphi'_z(z) > 0$. Відомо (див., наприклад, [20, с. 291]), що

$$S(z,\zeta) = \frac{|\Gamma|}{2\pi}\sqrt{\varphi'_z(z)}\,\overline{\sqrt{\varphi'_z(\zeta)}}. \tag{24}$$

Тому функцію $S_p(\cdot\,, z)$ можна подати у вигляді

$$S_p(\zeta, z) = \frac{|\Gamma|}{2\pi}(\varphi'_z(z))^{1/p}(\varphi'_z(\zeta))^{1/q}\frac{|\varphi'_z(\zeta)|}{\varphi'_z(\zeta)}. \tag{25}$$

Враховуючи (6) і (25), отримуємо

$$I_p(f)(z) = (\varphi'_z(z))^{1/p}\int_\Gamma f(\zeta)(\varphi'_z(\zeta))^{1/q}\frac{d\zeta}{2\pi i\varphi_z(\zeta)}.$$

Виконаємо заміну змінної інтегрування $\zeta = \psi_z(w)$, де $\psi_z := \varphi_z^{-1}$ — конформне відображення, обернене до φ_z:

$$I_p(f)(z) = (\varphi'_z(z))^{1/p}\int_\mathbb{T}(f\circ\psi_z)(w)(\psi'_z(w))^{1/p}\,d\sigma(w).$$

Оскільки $(f\circ\psi_z)(\cdot)(\psi'_z(\cdot))^{1/p}\in H_p$, то звідси одержуємо

$$I_p(f)(z) = (\varphi'_z(z))^{1/p}(f\circ\psi_z)(0)(\psi'_z(0))^{1/p} = f(z).$$

Теорему 3 доведено.

***Доведення теореми* 4.** *Необхідність.* Нехай для аналітичної в Ω функції f має місце зображення (13). Скористаємося рівністю (14) для ядра S_∞. Тоді (13) набирає вигляду

$$f(z) = \frac{|\Gamma|}{2\pi}\int_\Gamma g(\zeta)P(\varphi(\zeta),\varphi(z))|\varphi'(\zeta)|\,d\sigma_\Gamma(\zeta),$$

де φ — будь-яке конформне відображення Ω на $\mathbb{D}$.

Виконуючи заміну змінних $\zeta = \psi(w) = \varphi^{-1}(\zeta)$, отримуємо

$$(f\circ\psi)(\tau) = \int_\mathbb{T}(g\circ\psi)(w)P(w,\tau)\,d\sigma(w), \quad |\tau| < 1.$$

Звідси маємо оцінку

$$\left|(f\circ\psi)(\tau)\right| \le \int\limits_{\mathbb{T}} \left|(f\circ\psi)(w)\right| P(w,\tau)\,d\sigma(w), \quad |\tau| < 1.$$

Інтегруючи по колу $\{\tau : |\tau| = \rho,\ 0 < \rho < 1\}$, одержуємо

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \left|(f\circ\psi)(\rho\tau)\right| d\sigma(\tau) \le \int\limits_{\mathbb{T}} \left|(g\circ\psi)(w)\right| d\sigma(w) < \infty \quad \forall\, \rho \in (0;1),$$

тобто $f\circ\psi \in H_1$.

Достатність. Нехай z — довільна фіксована точка області Ω, φ_z — конформне відображення області Ω на круг $\mathbb{D}$, нормоване умовами $\varphi_z(z) = 0$, $\varphi'_z(z) > 0$ і $f\varphi'_z \in E_1(\Omega)$. Тоді

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \left|(f\circ\psi_z)(\rho w)\right| |dw| = \frac{1}{\rho} \int\limits_{\Gamma_\rho} \left|f(\zeta)\varphi'_z(\zeta)\right| |d\zeta| < \infty \quad \forall\, \rho \in (0;1),$$

де $\Gamma_\rho := \{\zeta \in \Omega : \zeta = \psi_z(w),\ |w| = \rho\}$.

Отже, функція $f\circ\psi_z \in H_1$ і до неї можна застосувати формулу Коші, за якою

$$(f\circ\psi_z)(0) = \int\limits_{\mathbb{T}} (f\circ\psi_z)(w)\,d\sigma(w).$$

Але інтеграл у правій частині цієї рівності збігається з інтегралом $I_\infty(f)(z)$ (див. (23)), який дорівнює $f(z)$.

Таким чином,

$$f(z) = (f\circ\psi_z)(0) = I_\infty(f)(z) = \int\limits_{\Gamma} f(\zeta) \frac{|S(\zeta,z)|^2}{S(z,z)}\,d\sigma_\Gamma(\zeta).$$

Оскільки права частина цієї рівності не залежить від конформного відображення, то вона має місце і для будь-якої іншої точки $z \in \Omega$ і відповідного конформного відображення φ_z.

Теорему 4 доведено.

***Доведення теореми* 5.** Доведемо спочатку перший та третій пункти теореми.

Оскільки класи $E_p(\Omega)$ і $E_q^0(\Omega)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, є взаємно ортогональними, тобто для будь-яких функцій $f \in E_p(\Omega)$ і $g \in E_q^0(\Omega)$

$$\int\limits_{\Gamma} f(\zeta) g(\zeta)\,d\sigma_\Gamma(\zeta) = 0, \tag{26}$$

то на підставі (12) та загальних співвідношень двоїстості [9] (див. також [8, с. 111, 11, с. 138]) є правильною рівність

$$\inf_{g\in E_q^0(\Omega)} \left\| S_p(\cdot,\xi) - g(\cdot)\right\|_{L_q(\Gamma)} = \max\left\{ |f(\xi)| : f\in E_p(\Omega),\ \|f\|_{E_p(\Omega)} \le 1 \right\}. \tag{27}$$

З огляду на те, що будь-яка функція $f \in E_p(\Omega)$ майже в кожній точці на Γ має недотичні граничні значення з простору $L_p(\Gamma)$ і норма функції f в $E_p(\Omega)$ збігається з нормою її граничних значень у просторі $L_p(\Gamma)$, норму $\|\cdot\|_{L_q(\Gamma)}$ в лівій частині (27) можна замінити на $\|\cdot\|_{E_q(\Omega)}$.

Розглянемо праву частину рівності (27).

За теоремою 3 маємо рівність

$$f(\xi) = \int_{\Gamma} f(\zeta) S_p(\zeta, \xi) d\sigma_{\Gamma}(\zeta) \quad \forall f \in E_p(\Omega),$$

з якої за нерівністю Гельдера випливає оцінка

$$\max\left\{|f(\xi)|: f \in E_p(\Omega),\ \|f\|_{E_p(\Omega)} \le 1\right\} \le \left\|S_p(\cdot, \xi)\right\|_{E_q(\Omega)} = S(\xi, \xi)^{1/p}.$$

Простою перевіркою переконуємося в тому, що функція $f^*(\cdot) = S(\xi, \xi)^{-1/p} \times$ $\times S(\xi, \cdot)^{2/p} \in E_p(\Omega)$ і для неї $f^*(\xi) = S(\xi, \xi)^{1/p}$. Ця функція згідно з тими самими співвідношеннями двоїстості [9, 8, с. 132, 11, с. 138] є єдиною у випадках, коли $1 < p \le \infty$. При $p = 1$ єдиність випливає з єдиності екстремальної функції в задачі (20), яку буде доведено в наступному пункті.

Отже, згідно з (27) маємо рівність

$$\inf_{g \in E_q^0(\Omega)} \left\|S_p(\cdot, \xi) - g(\cdot)\right\|_{L_q(\Gamma)} = \left\|S_p(\cdot, \xi)\right\|_{L_q(\Gamma)} = S(\xi, \xi)^{1/p}. \tag{28}$$

Для функції $g_* \equiv 0$ досягається інфімум у лівій частині цієї рівності, і оскільки завжди існує принаймні одна екстремальна функція (двоїста), для якої досягається максимум у правій частині (27), то екстремальна функція g_* завжди є єдиною для всіх p, $1 \le p \le \infty$ [8, с. 132, 11, с. 139].

Доведемо тепер другий пункт теореми.

Перш за все зазначимо, що умова $\sqrt{\varphi_z'} \in E_q(\Omega)$ для деякого фіксованого $z \in \Omega$ є рівносильною тому, що функція $\zeta \mapsto S(\zeta, \xi)$, $\zeta \in \Gamma$, належить простору $L_q(\Gamma)$ для будь-якого $z \in \Omega$. Справді, згідно з рівністю (24) $S(\zeta, \xi) =$ $= |\Gamma| / (2\pi)\sqrt{\varphi_z'(z)}\sqrt{\varphi_z'(\zeta)}$. Оскільки члени сім'ї конформних відображень $\{\varphi_z\}_{z \in \Omega}$ області Ω на круг $\mathbb{D}$ утворюються один з одного за допомогою дробово-лінійного перетворення, що переводить круг $\mathbb{D}$ в круг $\mathbb{D}$, то з того, що $\sqrt{\varphi_z'} \in E_p(\Omega)$ при деякому виборі $z \in \Omega$, випливає, що $\sqrt{\varphi_z'} \in E_p(\Omega)$ і при будь-якому іншому виборі параметра $z \in \Omega$.

Отже, умова $\sqrt{\varphi_z'} \in E_q(\Omega)$ дозволяє зобразити кожну функцію $f \in E_p(\Omega)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, інтегралом (8) (див., наприклад, [20, с. 292]).

Виходячи з (8), за співвідношеннями двоїстості [9] (див. також [8, с. 111, 11, с. 138]) з урахуванням рівностей (27), (28) одержуємо

$$\inf_{g \in E_q^0(\Omega)} \|S(\cdot, \xi) - g(\cdot)\|_{E_q(\Omega)} = \inf_{g \in E_q^0(\Omega)} \left\|S_p(\cdot, \xi) - g(\cdot)\right\|_{E_q(\Omega)} = S(\xi, \xi)^{1/p}.$$

Якщо в лівій частині цієї рівності за функцію g взяти функцію, означену правилом (17), або, що те ж саме, функцію $g_*(\zeta) = S(\zeta, \xi) - S_p(\zeta, \xi)$, то отримаємо рівність

$$\inf_{g \in E_q^0(\Omega)} \|S(\cdot, \xi) - g(\cdot)\|_{E_q(\Omega)} = \|S(\cdot, \xi) - g_*(\cdot)\|_{E_q(\Omega)} = \left\|S_p(\cdot, \xi)\right\|_{E_q(\Omega)} = S(\xi, \xi)^{1/p}.$$

Залишається показати, що $g_* \in E_q^0(\Omega)$. У цьому легко переконатися, зауваживши, що згідно з (8) і (12) для будь-якої функції $f \in E_p(\Omega)$ і функції g_* виконується рівність (26). Виконавши заміну змінних в інтегралі в (26), одержимо

$$\int_{\mathbb{T}} (f \circ \psi)(w) \psi'(w)^{1/p} (g_* \circ \psi)(w) \psi'(w)^{1/q} d\sigma(w) = 0,$$

де ψ — конформне відображення круга $\mathbb{D}$ на область Ω. Це рівносильне тому (див., наприклад, [11, с. 241]), що функція $w \mapsto (g_* \circ \psi)(w)\psi'(w)^{1/q}$, $w \in \mathbb{D}$, належить класові H_q^0. Останнє, в свою чергу, рівносильне тому, що $g_* \in E_q^0(\Omega)$.

Єдиність екстремальної функції g_* доводиться так само, як і єдиність екстремальної функції в задачі (15).

Доведемо тепер четвертий пункт теореми.

З рівності (12) за нерівністю Гельдера маємо оцінку

$$\alpha = |f(\xi)| \leq \|f\|_{E_p(\Omega)} S(\xi, \xi)^{1/p} \qquad \forall f \in E_{p,\xi,\alpha}(\Omega),$$

з якої випливає співвідношення

$$\|f\|_{E_p(\Omega)} \geq \alpha S(\xi, \xi)^{-1/p} \qquad \forall f \in E_{p,\xi,\alpha}(\Omega).$$

Легко бачити, що для функції $f_*(z) := \alpha(S(\xi, z)/S(\xi, \xi))^{2/p}$ в останньому співвідношенні виконується рівність. Єдиність екстремальної функції доведено в [14, с. 425].

Теорему 5 доведено.

1. *Дзядык В. К,* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 508 с.
2. *Степанец А. И.* Приближение интегралов типа Коши в жордановых областях // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 6. – С. 809 – 833.
3. *Степанец А. И., Савчук В. В.* Приближение интегралов типа Коши // Там же. – 2002. – **54**, № 5. – С. 706 – 740.
4. *Осипенко К. Ю., Стесин М. И.* О поперечниках класса Харди H_p в n-мерном шаре // Успехи мат. наук. – 1990. – **45**, № 5. – С. 193 – 194.
5. *Fisher S. D., Stessin M. I.* On n-widths of classes of holomorphic functions with reproducing kernel // Ill. J. Math. – 1994. – **38**. – P. 589 – 615.
6. *Савчук В. В.* Найкращі лінійні методи наближення функцій класу Харді H_p // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 7. – С. 919 – 925.
7. *Fisher S. D., Micchelli C. A.* The n-widths of analytic functions // Duke Math. J. – 1980. – **47**, № 4. – P. 789 – 801.
8. *Duren P.* Theory of H^p spaces. – New York: Acad. Press, 1970. – 258 p.
9. *Хавинсон С. Я.* Теория экстремальных задач для ограниченных аналитических функций, удовлетворяющих дополнительным условиям внутри области // Успехи мат. наук. – 1963. – **18**, № 2. – С. 25 – 98.
10. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p. – М.: Мир, 1984. – 368 с.
11. *Гарнет Дж.* Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир, 1984. – 496 с.
12. *Пааташвили В. А.* О принадлежности к классам E_p аналитических функций, представимых интегралом типа Коши // Тр. Мат. ин-та АН ГССР. – 1972. – **42**. – С. 87 – 94.
13. *David G.* Operateurs integraux singulers sur certaines courbex du plan complexe // Ann. sci. Ecole norm. supér. – 1984. – **17**. – P. 157 – 189.
14. *Голузин Г. М,* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 623 с.
15. *Дынькин Е. М.* Равномерная полиномиальная аппроксимация в комплексной области // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1974. – **47**. – С. 164 – 165.
16. *Дынькин Е. М.* Скорость полиномиальной аппроксимации в $E^p(G)$ // Докл. АН СССР. – 1976. – **231**, № 3. – С. 529 – 531.
17. *Сеге Г.* Ортогональные полиномы. – М.: Мир, 1962. – 500 с.
18. *Bergman S.* The kernel function and conformal mapping // Math. Surv. – New York: Amer. Math. Soc., 1950. – **5**. – P. 163.
19. *Савчук В. В.* Області Фабера і задача О. І. Степанця // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **35**. – С. 151 – 163.
20. *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1964. – 440 с.
21. *Osipenko K. Y., Stessin M. I.* On optimal recovery of a holomorphic function in the unit ball of $\mathbf{C}^n$ // Constr. Approxim. – 1992. – **8**, № 2. – P. 141 – 159.

Одержано 03.06.2003