УДК 517.9

В. Д. Кошманенко, Н. В. Харченко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ІНВАРІАНТНІ ТОЧКИ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ КОНФЛІКТУ В ПРОСТОРІ КУСКОВО РІВНОМІРНО РОЗПОДІЛЕНИХ МІР*

We prove the theorem on the existence and structure of invariant points of a dynamical system of conflict in the space of piecewise continuously distributed measures.

Доведено теорему про існування та структуру інваріантних точок динамічної системи конфлікту в просторі кусково рівномірно розподілених мір.

1. Вступ. Досліджується математична модель конфлікту між парою опонентів, поданих довільно нормованими кусково рівномірно розподіленими мірами. У термінах стохастичних векторів найпростішу модель такого типу запропоновано в роботі [1]. У ній введено некомутативну конфліктну композицію $*$ для пари нормованих на одиницю векторів з невід'ємними коефіцієнтами. У даній роботі ми розширюємо означення композиції $*$ на випадок, коли вектори мають довільне нормування, а також визначаємо її для пар кусково рівномірно розподілених мір. При цьому ми узагальнюємо побудови з [2] і показуємо, що така композиція породжує динамічну систему дискретного конфлікту. Основним результатом даної роботи є теорема 2, яка встановлює існування граничної інваріантної точки для довільної траєкторії динамічної системи у просторі кусково рівномірно розподілених мір. Одержано якісну характеристику усіх таких точок.

Зазначимо, що наш підхід у певному сенсі доповнює методи теорії еволюційної динаміки (див. [3 – 6]).

2. Динамічна система конфлікту в просторі $\mathbf{R}_+^n \times \mathbf{R}_+^n$. Нехай множина конфліктних позицій складається із скінченної кількості точок $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, $2 \le n < \infty$. Розглянемо на Ω пару дискретних мір μ_0, ν_0:

$$\mu_0(\omega_i) = p_i^{(0)} \ge 0, \qquad \nu_0(\omega_i) = r_i^{(0)} \ge 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Замість дискретних мір μ_0, ν_0 далі розглядаємо відповідну пару векторів $\mathbf{p}^0$, $\mathbf{r}^0 \in \mathbf{R}_+^n$ з невід'ємними координатами:

$$\mathbf{p}^0 = \left(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}\right), \qquad \mathbf{r}^0 = \left(r_1^{(0)}, r_2^{(0)}, \ldots, r_n^{(0)}\right)$$

і l_1-нормами:

$$\left|\mathbf{p}^0\right| := \sum_{i=1}^n p_i^{(0)} = \mu_0(\Omega) = c_p > 0, \qquad \left|\mathbf{r}^0\right| := \sum_{i=1}^n r_i^{(0)} = \nu_0(\Omega) = c_r > 0.$$

Динамічну систему дискретного конфлікту будуємо в прямому добутку $\mathbf{R}_+^n \times \mathbf{R}_+^n$ за допомогою відображення

$$\mathbf{R}_+^n \times \mathbf{R}_+^n \ni \left\{\mathbf{p}^0, \mathbf{r}^0\right\} \xrightarrow{U(*)} \left\{\mathbf{p}^1, \mathbf{r}^1\right\} \in \mathbf{R}_+^n \times \mathbf{R}_+^n,$$

де вектори $\mathbf{p}^1$, $\mathbf{r}^1$ визначаються некомутативною композицією конфлікту $*$, введеною в [1] для стохастичних векторів. Тут ми розширюємо означення композиції $*$ на випадок векторів $\mathbf{p}^0$, $\mathbf{r}^0$ з довільною нормою, $\left|\mathbf{p}^0\right| = c_p > 0$, $\left|\mathbf{r}^0\right| = c_r > 0$. А саме, для пари $\mathbf{p}^0$, $\mathbf{r}^0$ вводимо нову пару: $\mathbf{p}^1 = \mathbf{p}^0 * \mathbf{r}^0$,

* Частково підтримано проектами DFG 436 UKR 113/67 та INTAS 00-257.

$\mathbf{r}^1 = \mathbf{r}^0 * \mathbf{p}^0$ з координатами $p_i^{(1)}, r_i^{(1)}, \ i = 1, 2, \ldots, n,$ які знаходяться за формулами

$$p_i^{(1)} := \frac{p_i^{(0)}\left(c_r - r_i^{(0)}\right)}{z_{1,p}}, \qquad r_i^{(1)} := \frac{r_i^{(0)}\left(c_p - p_i^{(0)}\right)}{z_{1,r}}, \tag{1}$$

де нормуючі коефіцієнти $z_{1,p}, \ z_{1,r}$ визначаються з умов $\left|\mathbf{p}^1\right| = c_p, \ \left|\mathbf{r}^1\right| = c_r.$ Ці коефіцієнти легко обчислити:

$$z_{1,p} = \frac{1}{c_p}\left(c_p c_r - \left(\mathbf{p}^0, \mathbf{r}^0\right)\right), \qquad z_{1,r} = \frac{1}{c_r}\left(c_p c_r - \left(\mathbf{p}^0, \mathbf{r}^0\right)\right), \tag{2}$$

де $\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{r}^0\right)$ — скалярний добуток в $\mathbf{R}^n$.

Варто зауважити, що у формулах (1) виникає невизначеність, якщо хоча б для одного i виконується рівність $p_i^{(0)} / c_p = r_i^{(0)} / c_r = 1.$ Ми виключаємо з розгляду таку ситуацію.

Отже, відображення $U(*)$ є коректно означеним, якщо координати векторів $\mathbf{p}^0, \ \mathbf{r}^0$ задовольняють одну з умов

$$\exists\, i \in \overline{1, n}\colon \ \frac{p_i^{(0)}}{c_p} \neq \frac{r_i^{(0)}}{c_r}, \tag{3}$$

або

$$\frac{p_i^{(0)}}{c_p} = \frac{r_i^{(0)}}{c_r} \neq 1 \quad \forall\, i \in \overline{1, n}. \tag{4}$$

Ітеруючи відображення $U(*)$, одержуємо траєкторію (орбіту) динамічної системи дискретного конфлікту в просторі $\mathbf{R}_+^n \times \mathbf{R}_+^n$:

$$\left\{\mathbf{p}^0, \mathbf{r}^0\right\} \xrightarrow{U(*)} \left\{\mathbf{p}^1, \mathbf{r}^1\right\} \xrightarrow{U(*)} \ldots \xrightarrow{U(*)} \left\{\mathbf{p}^N, \mathbf{r}^N\right\} \xrightarrow{U(*)} \ldots, \tag{5}$$

де $\left\{\mathbf{p}^N, \mathbf{r}^N\right\} = U^N(*)\left\{\mathbf{p}^0, \mathbf{r}^0\right\} \equiv U(*)\left\{\mathbf{p}^{N-1}, \mathbf{r}^{N-1}\right\}, \ N = 1, 2, \ldots .$

У роботі [1] для стохастичних векторів $\left|\mathbf{p}^0\right| = 1, \ \left|\mathbf{r}^0\right| = 1$ доведено теорему, яка стверджує існування пари граничних векторів $\mathbf{p}^\infty = \lim\limits_{N\to\infty} \mathbf{p}^N, \ \mathbf{r}^\infty = \lim\limits_{N\to\infty} \mathbf{r}^N,$ інваріантних відносно дії відображення $U(*)$, а також встановлює певні співвідношення між граничними векторами. Аналогічна теорема справедлива і для пари довільно нормованих векторів $\mathbf{p}^0, \ \mathbf{r}^0$ з простору $\mathbf{R}_+^n$.

Теорема 1. *Припустимо, що пара векторів* $\mathbf{p}^0, \ \mathbf{r}^0 \in \mathbf{R}_+^n$ $\left(\left|\mathbf{p}^0\right| = c_p > 0, \left|\mathbf{r}^0\right| = c_r > 0\right)$ *задовольняє умову* (3) *або* (4). *Тоді траєкторія* (5) *збігається до інваріантної точки,*

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\mathbf{p}^N, \mathbf{r}^N\right\} = \left\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\right\} \in \mathbf{R}_+^n \times \mathbf{R}_+^n,$$

$$U(*)\left\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\right\} = \left\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\right\}.$$

При цьому, якщо виконується умова (3), *граничні вектори ортогональні,* $\mathbf{p}^\infty \perp \mathbf{r}^\infty$, *а якщо виконується умова* (4), *кожен граничний вектор має однакові координати:*

$$p_i^{(\infty)} = \frac{c_p}{m}, \qquad r_i^{(\infty)} = \frac{c_r}{m}, \quad m \le n, \tag{6}$$

де m *— кількість відмінних від нуля координат векторів* $\mathbf{p}^0,\ \mathbf{r}^0 \in \mathbf{R}_+^n$.

Розглянемо спочатку частинний випадок цієї теореми.

Твердження 1. *Нехай* $n = 2$ *і координати векторів* $\mathbf{p}^0,\ \mathbf{r}^0 \in \mathbf{R}_+^2$ $\left(\left|\mathbf{p}^0\right| = c_p > 0,\ \left|\mathbf{r}^0\right| = c_r > 0\right)$ *задовольняють одну з умов* (3) *або* (4). *Тоді існує гранична пара векторів*

$$\left\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\right\} = \lim_{N\to\infty}\left\{\mathbf{p}^N, \mathbf{r}^N\right\},$$

інваріантна відносно композиції конфлікту, яка має наступну структуру. Якщо виконується умова (3), *то*

$$\mathbf{p}^\infty = \left(c_p, 0\right), \qquad \mathbf{r}^\infty = \left(0, c_r\right),$$

або

$$\mathbf{p}^\infty = \left(0, c_p\right), \qquad \mathbf{r}^\infty = \left(c_r, 0\right);$$

а якщо виконується умова (4), *то*

$$\mathbf{p}^\infty = \left(\frac{c_p}{2}, \frac{c_p}{2}\right), \qquad \mathbf{r}^\infty = \left(\frac{c_r}{2}, \frac{c_r}{2}\right).$$

Доведення. Нехай виконується умова (3). Покладемо $\mathbf{p}^0 = (a, b),\ a + b = c_p$. Використовуючи формули (1), (2), легко показати, що вже на першому кроці конфліктної композиції координати векторів $\mathbf{p}^1$ і $\mathbf{r}^1$ пов'язані таким чином:

$$\mathbf{p}^1 = \left(a_1, b_1\right), \qquad \mathbf{r}^1 = \left(hb_1, ha_1\right), \qquad h := \frac{c_r}{c_p}.$$

Після наступного кроку конфліктної композиції перша координата вектора $\mathbf{p}^2$ обчислюється за формулою

$$p_1^{(2)} \equiv a_2 = \frac{a_1^2 c_p}{a_1^2 + b_1^2}, \qquad p_2^{(2)} \equiv b_2 = \frac{b_1^2 c_p}{a_1^2 + b_1^2}.$$

Позначаючи

$$k_1 = \frac{c_p a_1}{a_1^2 + b_1^2},$$

можемо записати

$$b_2 = \frac{b_1^2}{a_1} k_1, \qquad a_2 = a_1 k_1,$$

причому $a_2 < a_1$, оскільки $k_1 = \dfrac{a_1 c_p}{a_1^2 + (c_p - a_1)^2} < 1$, тому що не втрачаючи загальності можна вважати, що $a_1 < \dfrac{c_p}{2} < b_1$.

За індукцією на $(N+1)$-му кроці конфліктної композиції маємо

$$p_1^{(N+1)} \equiv a_{N+1} = \frac{a_N^2 c_p}{a_N^2 + b_N^2}, \qquad p_2^{(N+1)} \equiv b_{N+1} = \frac{b_N^2 c_p}{a_N^2 + b_N^2},$$

а також

$$a_{N+1} = a_N k_N = a_1 k_1 k_2 \ldots k_N,$$

де

$$k_N = \frac{c_p a_N}{a_N^2 + b_N^2}.$$

При цьому $a_N < a_{N-1} < \frac{c_p}{2}$, оскільки, очевидно, $k_N < 1$. Більш того, покажемо, що $k_{N+1} < k_N$, $N \geq 2$.

Легко бачити, що $a_N < b_N$, оскільки $a_N + b_N = c_p$. Тому $(a_N - b_N)^2 > 0$, що рівносильно нерівності

$$\frac{a_N b_N}{a_N^2 + b_N^2} < \frac{1}{2}.$$

Тепер нерівність $k_{N+1} < k_N$ випливає із співвідношення

$$\frac{k_{N+1}}{k_N} = \frac{c_p a_{N+1}}{a_{N+1}^2 + b_{N+1}^2} \frac{1}{k_N} = \frac{c_p a_N}{a_{N+1}^2 + b_{N+1}^2} =$$

$$= \frac{a_N}{c_p} \frac{\left(a_N^2 + b_N^2\right)^2}{a_N^4 + b_N^4} < \frac{1}{2} \frac{1}{1 - 2\left(\dfrac{a_N b_N}{a_N^2 + b_N^2}\right)^2} < 1.$$

Отже, $p_1^{(\infty)} = \lim\limits_{N\to\infty} p_1^{(N)} \equiv \lim\limits_{N\to\infty} a_N = 0$, а тому $p_2^{(\infty)} = \lim\limits_{N\to\infty} p_2^{(N)} \equiv \lim\limits_{N\to\infty} b_N = c_p$. Аналогічно доводиться, що $r_2^{(\infty)} = \lim\limits_{N\to\infty} r_2^{(N)} = 0$, $r_1^{(\infty)} = \lim\limits_{N\to\infty} r_1^{(N)} = c_r$.

У випадку, коли виконується умова (4), тобто $h\mathbf{p}^0 = \mathbf{r}^0$, з формул (1), (2) випливає, що не пізніше, ніж на першому кроці, траєкторія (5) збігається до інваріантної точки $\left\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\right\} = \left\{\left(\frac{c_p}{2}, \frac{c_p}{2}\right), \left(\frac{c_r}{2}, \frac{c_r}{2}\right)\right\}$.

Твердження доведено.

***Доведення теореми* 1.** У випадку, коли $n = 2$, справедливість теореми випливає з твердження 1, тому будемо розглядати випадок $n \geq 3$.

Нехай виконується умова (4), тобто $hp_i^{(0)} = r_i^{(0)} \neq c_r$ для усіх $i = 1, 2, \ldots, n$, де $h = \frac{c_r}{c_p}$. Припустимо, що $hp_i^{(0)} = r_i^{(0)} \neq 0$. Неважко переконатися, що $hp_i^{(N)} = r_i^{(N)}$ для усіх натуральних N.

Без втрати загальності координати вектора $\mathbf{p}^0$ можна вважати впорядкованими:

$$0 < p_1^{(0)} \leq p_2^{(0)} \leq \ldots \leq p_n^{(0)} < c_p. \tag{7}$$

Тоді внаслідок умови (4) і того, що $\mathbf{p}^0 = h^{-1}\mathbf{r}^0$, $h > 0$, числа $r_i^{(0),c} := c_r - r_i^{(0)}$ мають зворотну впорядкованість:

$$c_r > r_1^{(0),c} \geq r_2^{(0),c} \geq \ldots \geq r_n^{(0),c} > 0. \tag{8}$$

З (8) випливає

$$r_1^{(0),c} > z_{1,p} > r_n^{(0),c}. \tag{9}$$

Дійсно, з (2) і рівності $c_p = \sum_i p_i^{(0)}$ маємо

$$z_{1,p} = \frac{1}{c_p}\sum_{i=1}^{n} p_i^{(0)}\left(c_r - r_i^{(0)}\right) = \frac{1}{c_p}\sum_{i=1}^{n} p_i^{(0)} r_i^{(0),c}.$$

Тепер, замінюючи усі $r_i^{(0),c}$ на $r_1^{(0),c}$ або на $r_n^{(0),c}$ і враховуючи (7), одержуємо (9).

Покажемо, що координати вектора $\mathbf{p}^1$ задовольняють нерівності

$$p_1^{(0)} < p_1^{(1)} \le p_i^{(1)} \le p_n^{(1)} < p_n^{(0)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Справді, безпосередньо з (9) випливає $p_1^{(0)} < p_1^{(1)}$ і $p_n^{(1)} < p_n^{(0)}$. Для доведення нерівностей $p_1^{(1)} \le p_i^{(1)} \le p_n^{(1)}$ запишемо їх у еквівалентному вигляді

$$p_1^{(0)}\left(c_r - r_1^{(0)}\right) \le p_i^{(0)}\left(c_r - r_i^{(0)}\right) \le p_n^{(0)}\left(c_r - r_n^{(0)}\right),$$

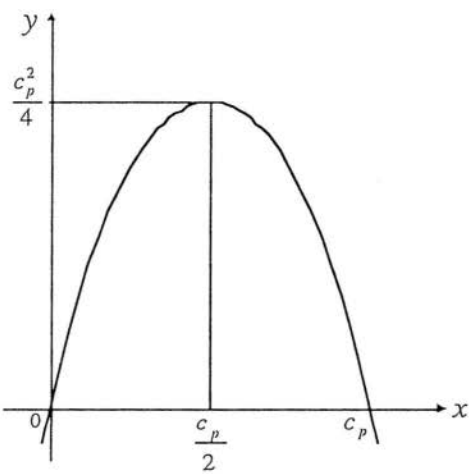
звідки, враховуючи співвідношення $\mathbf{p}^0 = h^{-1}\mathbf{r}^0$, маємо

$$p_1^{(0)}\left(c_r - hp_1^{(0)}\right) \le p_i^{(0)}\left(c_r - hp_i^{(0)}\right) \le p_n^{(0)}\left(c_r - hp_n^{(0)}\right).$$

Далі, оскільки $h = \dfrac{c_r}{c_p} > 0$, то

$$p_1^{(0)}\left(c_p - p_1^{(0)}\right) \le p_i^{(0)}\left(c_p - p_i^{(0)}\right) \le p_n^{(0)}\left(c_p - p_n^{(0)}\right).$$

Справедливість цих нерівностей (вони еквівалентні (10)) випливає з наступних міркувань. Розглянемо функцію $y(x) = x(c_p - x)$, $x \in [0, c_p]$ (див. рисунок).



Вона має симетричний графік відносно прямої $x = \dfrac{c_p}{2}$, в якій досягає максимуму. Нехай $p_n^{(0)} < \dfrac{c_p}{2}$. Тоді внаслідок впорядкованості координат для будь-якого $i = 1, 2, \ldots, n$ $0 < p_i^{(0)} < \dfrac{c_p}{2}$. Оскільки на інтервалі $\left[0, \dfrac{c_p}{2}\right]$ функція $y(x)$ монотонно зростає, то з нерівностей (7) випливає

$$y\left(p_1^{(0)}\right) \le y\left(p_i^{(0)}\right) \le y\left(p_n^{(0)}\right).$$

Нехай $p_n^{(0)} > \frac{c_p}{2}$. Тоді виконуються нерівності $0 < p_i^{(0)} < c_p - p_n^{(0)} < \frac{c_p}{2}$, оскільки $\sum_{i=1}^{n} p_i^{(0)} = c_p$ для будь-якого $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Отже, внаслідок монотонного зростання функції $y(x)$ на інтервалі $\left[0, \frac{c_p}{2}\right]$ з нерівностей (7) випливає

$$y\left(p_1^{(0)}\right) \leq y\left(p_i^{(0)}\right) \leq y\left(c_p - p_n^{(0)}\right).$$

Завдяки симетричності графіка функції $y(x)$ маємо $y\left(p_n^{(0)}\right) = y\left(c_p - p_n^{(0)}\right)$, звідки

$$y\left(p_1^{(0)}\right) \leq y\left(p_i^{(0)}\right) \leq y\left(p_n^{(0)}\right),$$

що й доводить (10).

За індукцією нерівності (10) встановлюються для координат векторів $\mathbf{p}^N$ з довільним N:

$$p_1^{(0)} < p_1^{(1)} < \ldots < p_1^{(N)} \leq p_i^{(N)} \leq p_n^{(N)} < \ldots < p_n^{(1)} < p_n^{(0)}. \tag{11}$$

З (11) випливає, що принаймні для деякої підпослідовності N_k існують границі

$$p_i^{(\infty)} = \lim_{N_k \to \infty} p_i^{(N_k)}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

які задовольняють нерівності

$$0 < p_1^{(\infty)} \leq p_i^{(\infty)} \leq p_n^{(\infty)} < c_p. \tag{12}$$

Для цих границь на підставі (1) маємо

$$p_i^{(\infty)} = \frac{p_i^{(\infty)}\left(c_r - r_i^{(\infty)}\right)}{z_{\infty,p}},$$

де $r_i^{(\infty)} = h p_i^{(\infty)}$. Звідси робимо висновок, що нормуючий коефіцієнт $z_{\infty,p} = c_r - r_i^{(\infty)}$ не залежить від індексу i. У свою чергу, оскільки нормуючий коефіцієнт можна записати у вигляді $z_{\infty,p} = \frac{c_r}{c_p}\left(c_p - p_i^{(\infty)}\right)$, співвідношення (12) можливі, лише якщо $p_i^{(\infty)} = \frac{c_p}{n}$ при умові $p_i^{(0)} > 0$ для усіх $i = 1, 2, \ldots, n$. Аналогічні міркування проводимо і для координат вектора $\mathbf{r}^0$. Таким чином,

$$\lim_{N \to \infty} p_i^{(N)} = \frac{c_p}{n}, \quad \lim_{N \to \infty} r_i^{(N)} = \frac{c_r}{n}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{13}$$

що доводить (6). Зрозуміло, що у випадку $h p_i^{(0)} = r_i^{(0)} \neq 0$ лише для $m < n$ координат границі в (13) дорівнюють $\frac{c_p}{m}$ та $\frac{c_r}{m}$ відповідно.

Розглянемо тепер ситуацію, коли для усіх i виконується умова (3) і, отже, $h\mathbf{p}^0 \neq \mathbf{r}^0$. Тоді знайдеться i таке, що $p_i^{(0)} > h^{-1} r_i^{(0)}$. На підставі (1) аналогічна нерівність виконується і для наступних координат, $p_i^{(1)} > h^{-1} r_i^{(1)}$, а також для усіх N: $p_i^{(N)} > h^{-1} r_i^{(N)}$. Покажемо, що з $s_i^{(0)} := \frac{p_i^{(0)}}{r_i^{(0)}} > h^{-1}$ з необхідністю випливає

$$r_i^{(N)} \to 0, \quad N \to \infty. \tag{14}$$

Для доведення (14) достатньо показати, що відношення $s_i^{(N)} := \dfrac{p_i^{(N)}}{r_i^{(N)}}$ прямує до нескінченності при $N \to \infty$. Так, для $s_i^{(1)}$ маємо

$$s_i^{(1)} := \frac{p_i^{(1)}}{r_i^{(1)}} = h^{-1} \frac{p_i^{(0)}}{r_i^{(0)}} \frac{c_r - r_i^{(0)}}{c_p - p_i^{(0)}} = s_i^{(0)} k_i^{(0)},$$

де $k_i^{(0)} := h^{-1} \dfrac{c_r - r_i^{(0)}}{c_p - p_i^{(0)}}$. Неважко переконатись, що $k_i^{(0)} > 1$, тому $s_i^{(0)} < s_i^{(1)}$. За індукцією

$$h^{-1} < s_i^{(0)} < s_i^{(1)} < \ldots < s_i^{(N)} < s_i^{(N+1)} = s_i^{(N)} k_i^{(N)} = s_i^{(0)} k_i^{(0)} \ldots k_i^{(N)},$$

де коефіцієнти $k_i^{(N)}$ строго зростають при $N \to \infty$:

$$1 < k_i^{(0)} < k_i^{(1)} < \ldots < k_i^{(N)}. \tag{15}$$

Справді, для $k_i^{(1)}$ маємо

$$k_i^{(1)} = h^{-1} \frac{c_r - r_i^{(1)}}{c_p - p_i^{(1)}} = h^{-1} \frac{c_r - \dfrac{1}{z_{1,r}} r_i^{(0)}\left(c_p - p_i^{(0)}\right)}{c_p - \dfrac{1}{z_{1,p}} p_i^{(0)}\left(c_r - r_i^{(0)}\right)} =$$

$$= \frac{c_p\left(c_r - r_i^{(0)}\right) - \left(\sum_j p_j^{(0)} r_j^{(0)} - p_i^{(0)} r_i^{(0)}\right)}{c_r\left(c_p - p_i^{(0)}\right) - \left(\sum_j p_j^{(0)} r_j^{(0)} - p_i^{(0)} r_i^{(0)}\right)} = \frac{c_p\left(c_r - r_i^{(0)}\right) - I_i^0}{c_r\left(c_p - p_i^{(0)}\right) - I_i^0},$$

де

$$I_i^0 = \sum_{j \neq i} p_j^{(0)} r_j^{(0)} < c_r \sum_{j \neq i} p_j^{(0)} \frac{r_j^{(0)}}{c_r} < c_r \sum_{j \neq i} p_j^{(0)} = c_r\left(c_p - p_j^{(0)}\right),$$

тобто $I_i^0 < c_r\left(c_p - p_j^{(0)}\right)$.

Крім того, оскільки $c_r\left(c_p - p_i^{(0)}\right) < c_p\left(c_r - r_i^{(0)}\right)$, то

$$1 < k_i^{(0)} = \frac{c_p\left(c_r - r_i^{(0)}\right)}{c_r\left(c_p - p_i^{(0)}\right)} < k_i^{(1)} = \frac{c_p\left(c_r - r_i^{(0)}\right) - I_j^0}{c_r\left(c_p - p_i^{(0)}\right) - I_j^0}.$$

Аналогічно доводиться, що $k_i^{(1)} < k_i^{(2)}$, і за індукцією одержуємо (15). Отже, з $hp_i^{(0)} > r_i^{(0)}$ випливає $s_i^{(N)} \to \infty$, і тому $r_i^{(N)} \to 0$, оскільки усі $p_i^{(N)}$ обмежені. Аналогічно, з $hp_k^{(0)} < r_k^{(0)}$ випливає $p_k^{(N)} \to 0$. Це означає, що скалярний добуток $\left(\mathbf{p}^N, \mathbf{r}^N\right) \to 0$ і тому $z_{N,p} \to c_r$, а $z_{N,r} \to c_p$ при умові, що початкові вектори $\mathbf{p}^0$, $\mathbf{r}^0$ не мають жодних координат таких, що $hp_i^0 = r_i^0 \neq 0$. Це означає, що існують границі

$$\lim_{N \to \infty} p_i^{(N)} = p_i^{(\infty)} \geq 0, \qquad \lim_{N \to \infty} r_i^{(N)} = 0 \quad \text{при} \quad hp_i^{(0)} > r_i^{(0)},$$

$$\lim_{N \to \infty} r_k^{(N)} = r_k^{(\infty)} \geq 0, \qquad \lim_{N \to \infty} p_k^{(N)} = 0 \quad \text{при} \quad hp_k^{(0)} < r_k^{(0)}.$$

Розглянемо тепер випадок, коли для координат векторів $\mathbf{p}^0$ та $\mathbf{r}^0$ одночасно існують такі i, для яких виконується умова (3), і такі j, для яких виконується умова (4).

Позначимо множину індексів, для яких виконується умова (4), через $\Omega_=$, тобто

$$\Omega_= := \left\{ i\colon \frac{p_i^{(0)}}{c_p} = \frac{r_i^{(0)}}{c_r} \neq 0 \right\}.$$

Граничні значення $p_i^{(\infty)}$, $r_k^{(\infty)}$, для $i, k \notin \Omega_=$ існують, як і в попередньому випадку. Це видно з формул (1), оскільки, як і раніше, $r_i^{(n)} \to 0$ при $hp_i^{(0)} > r_i^{(0)}$, а також $p_k^{(n)} \to 0$ при $hp_i^0 < r_i^0$.

Очевидно, що для послідовності $N = 1, 2, \ldots$ значення $t_N := \sum_{j \in \Omega_=} \left(\frac{p_j^{(N)}}{c} \right)^2$ такі, що $0 < t_N < 1$. Припустимо, що для деяких $j \in \Omega_=$ послідовність $p_j^{(N)}$ при $N \to \infty$ не збігається до нуля. Тоді завдяки обмеженості значень t_N існує деяка підпослідовність N' така, що $t_{N'} \to t > 0$ при $N' \to \infty$. Тому, використовуючи формулу (2) для нормуючого коефіцієнта, можемо записати його у вигляді

$$z_{N',p} = c_r \left(1 - \sum_{j \in \Omega_=} \left(\frac{p_j^{(N')}}{c_p} \right)^2 \right) - \frac{1}{c_p} \sum_{j \notin \Omega_=} p_i^{(N')} r_i^{(N')} \to z'_{\infty,p} = c_r(1-t) < c_r,$$

оскільки $\sum_{i \notin \Omega_=} p_i^{(N)} r_i^{(N)}$ збігається до нуля. Це означає, що для деякого $i \notin \Omega_=$ права і ліва частини рівності

$$p_i^{(N'+1)} = \frac{p_i^{(N')} \left(c_r - r_i^{(N')} \right)}{z_{N',p}}$$

збігаються до різних границь. Тобто ми прийшли до суперечності.

Аналогічні міркування проводяться і відносно вектора $\mathbf{r}$.

Отже, $\left(\mathbf{p}^N, \mathbf{r}^N \right) \to 0$, $N \to \infty$, в загальному випадку, що гарантує справедливість тверджень теореми.

Теорему доведено.

У випадку, коли вектори $\mathbf{p}^0$, $\mathbf{r}^0$ нормовані на одиницю, $c_p = 1 = c_r$, тобто є стохастичними, попередні формули мають простіший вигляд (див. [1, 2]). Наступне твердження описує зв'язок стохастичних векторів і векторів, не нормованих на одиницю при дії композиції конфлікту.

Твердження 2. *Для довільної пари векторів* $\mathbf{p}^0$, $\mathbf{r}^0 \in \mathbf{R}_+^n$ $\left(\left| \mathbf{p}^0 \right| = c_p, \left| \mathbf{r}^0 \right| = c_r \right)$ *і відповідної пари стохастичних векторів*

$$\mathbf{p}'^0 := \frac{1}{c_p} \mathbf{p}^0, \qquad \mathbf{r}'^0 := \frac{1}{c_p} \mathbf{r}^0$$

справджуються наступні рівності:

$$\mathbf{p}^N = c_p \mathbf{p}'^N, \qquad \mathbf{r}^N = c_r \mathbf{r}'^N, \quad N = 0, 1, \ldots, \tag{16}$$

$$\mathbf{p}^{\infty} = \lim_{N\to\infty}\mathbf{p}^{N} = c_p\mathbf{p}'^{\infty} = c_p\lim_{N\to\infty}\mathbf{p}'^{N},$$
$$\mathbf{r}^{\infty} = \lim_{N\to\infty}\mathbf{r}^{N} = c_r\mathbf{r}'^{\infty} = c_r\lim_{N\to\infty}\mathbf{r}'^{N}. \tag{17}$$

Доведення. Якщо $\mathbf{p}'^{0} = \frac{1}{c_p}\mathbf{p}^0$ і $\mathbf{r}'^{0} = \frac{1}{c_r}\mathbf{r}^0$, то $p_i^{(0)} = c_p p_i'^{(0)}$, $r_i^{(0)} = c_r r_i'^{(0)}$.

Запишемо нормуючий коефіцієнт для $\mathbf{p}^1$:

$$z_{1,p} = \frac{1}{c_p}\left(c_pc_r - \left(\mathbf{p}^0, \mathbf{r}^0\right)\right) = c_r\left(1 - \left(\mathbf{p}'^0, \mathbf{r}'^0\right)\right) = c_r z_{1,p'}.$$

Тоді отримаємо

$$p_i^{(1)} = \frac{1}{z_{1,p}}p_i^{(0)}\left(c_r - r_i^{(0)}\right) = c_p\frac{1}{z_{1,p'}}p_i'^{(0)}\left(1 - r_i'^{(0)}\right) = c_p p_i'^{(1)}.$$

Аналогічно для $\mathbf{r}^1$:

$$z_{1,r} = c_p z_{1,r'}, \qquad r_i^{(1)} = c_r r_i'^{(1)}.$$

Внаслідок довільності вибраного i можна стверджувати, що $\mathbf{p}^1 = c_p\mathbf{p}'^1$ та $\mathbf{r}^1 = c_r\mathbf{r}'^1$. За індукцією для довільного натурального N справджуються рівності $\mathbf{p}^N = c_p\mathbf{p}'^N$ і $\mathbf{r}^N = c_r\mathbf{r}'^N$. Отже, маємо

$$\lim_{N\to\infty}\mathbf{p}^N = c_p\lim_{N\to\infty}\mathbf{p}'^N,$$
$$\lim_{N\to\infty}\mathbf{r}^N = c_p\lim_{N\to\infty}\mathbf{r}'^N,$$

що і доводить справедливість (17).

Твердження доведено.

Зауваження. З твердження 1 випливає, що доведення теореми 1 можна спростити, пославшись на результати з [1, 2]. Наведене вище незалежне і повне доведення використовується в наступних дослідженнях, зокрема при побудові моделей конфлікту із зміною норми відповідних векторів.

3. Динамічна система у просторі кусково рівномірно розподілених мір. Нехай $f_\mu(x) := \mu(\{-\infty, x\})$ позначає функцію розподілу борелевої міри μ на $\mathbf{R}$. Міру μ, визначену на деякому компакті з $\mathbf{R}$, називаємо кусково рівномірно розподіленою (пишемо $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{kpp}}(\mathbf{R})$), якщо її щільність $f'_\mu(x)$ є простою функцією, тобто кусково сталою. Отже, міру μ можна зобразити скінченною сумою $\mu = \sum_i \mu_i$, де кожна міра μ_i є рівномірно розподіленою на своєму носії $\operatorname{supp}\mu_i = [a_i, b_i]$, при цьому $(a_i, b_i) \cap \left(a_j, b_j\right) = \varnothing$, $i \neq j$.

Розглянемо пару мір $\mu, \nu \in \mathcal{M}_{\mathrm{kpp}}(\mathbf{R})$. Припустимо, що $\operatorname{supp}\mu$, $\operatorname{supp}\nu \subset [0, 1]$, тобто $\mu, \nu \in \mathcal{M}_{\mathrm{kpp}}([0, 1])$. Нехай $\left\{r_1, r_2, \ldots, l_1, l_2, \ldots\right\}$ — точки розриву кусково сталих функцій f'_μ, $f'_\nu(x)$, відповідних мірам μ, ν. Нехай $\left\{s_1, s_2, \ldots, s_{k+1}\right\}$ позначає впорядковану послідовність різних точок з набору $\left\{0, r_1, r_2, \ldots, l_1, l_2, \ldots, 1\right\}$. Послідовність $\left\{s_1, s_2, \ldots, s_{k+1}\right\}$ утворює деяке скінченне розбиття відрізка $[0, 1]$:

$$[0, 1] = \bigcup_{i=1}^{k}\left[s_i, s_{i+1}\right], \tag{18}$$

де кожен проміжок $[s_i, s_{i+1}]$ має ненульову довжину $q_i := s_{i+1} - s_i$. Зрозуміло, що кожна з мір μ, ν є рівномірно розподіленою на проміжку $[s_i, s_{i+1}]$.

Використовуючи розбиття (18), поставимо у відповідність мірам μ, ν пару векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbf{R}_+^k$, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_k)$, $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_k)$, з невід'ємними координатами, які задаються таким чином:

$$p_i := \mu([s_i, s_{i+1}]), \qquad r_i := \nu([s_i, s_{i+1}]), \quad i = 1, \dots, k. \tag{19}$$

При цьому

$$\sum_{i=1}^k p_i = \mu([0,1]) =: c_\mu, \qquad \sum_{i=1}^k r_i = \nu([0,1]) =: c_\nu.$$

І навпаки, кожній парі векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbf{R}_+^k$ розбиття (18) однозначно співставляє пару кусково рівномірно розподілених мір $\mu, \nu \in \mathcal{M}_{\text{kpp}}([0,1])$. Для відновлення цих мір досить покласти $\mu([s_i, s_{i+1}]) := p_i$, $\nu([s_i, s_{i+1}]) := r_i$. А для довільної борелевої підмножини $A \subseteq [s_i, s_{i+1}]$ значення $\mu(A) := p_i |A| / q_i$, $\nu(A) := := r_i |A| / q_i$, де $|A|$ позначає міру Лебега множини A. Таким чином, фіксоване розбиття (18) встановлює взаємно однозначну відповідність між векторами з $\mathbf{R}_+^k$ та мірами з $\mathcal{M}_{\text{kpp}}([0,1])$, які рівномірно розподілені на кожному проміжку $[s_i, s_{i+1}]$.

Цю відповідність можна використати для побудови динамічної системи у просторі $\mathcal{M}_{\text{kpp}}([0,1]) \times \mathcal{M}_{\text{kpp}}([0,1])$. З цією метою розглянемо у просторі пар таких мір відображення:

$$\{\mu_0, \nu_0\} \xrightarrow{V(*)} \{\mu_1, \nu_1\}, \tag{20}$$

де нова пара мір μ_1, ν_1 визначається по $\mu_0 \equiv \mu$ і $\nu_0 \equiv \nu$ таким чином: кожна з мір μ_1, ν_1 є кусково рівномірно розподіленою із набором проміжків $[s_i, s_{i+1}]$ з розбиття (18). При цьому

$$\mu_1([s_i, s_{i+1}]) := p_i^{(1)}, \qquad \nu_1([s_i, s_{i+1}]) := r_i^{(1)}, \quad i = 1, \dots, k,$$

де координати векторів $\mathbf{p}^1 = \{p_i^{(1)}\}_{i=1}^k$, $\mathbf{r}^1 = \{r_i^{(1)}\}_{i=1}^k$ визначено згідно з композицією конфлікту $*$ (див. формули (1), (2) з попереднього пункту). Для довільної борелевої множини $A \in \mathcal{B}$ міри μ_1, ν_1 визначаються таким чином:

$$\mu_1(A) = \sum_{i=1}^k \mu_1(A_i) = \sum_{i=1}^k \frac{p_i^{(1)} |A_i|}{q_i}, \qquad \nu_1(A) = \sum_{i=1}^k \nu_1(A_i) = \sum_{i=1}^k \frac{r_i^{(1)} |A_i|}{q_i}, \tag{21}$$

де $A_i = A \cap [s_i, s_{i+1}]$.

Ітеруючи відображення (20), одержуємо орбіту динамічної системи конфлікту в просторі $\mathcal{M}_{\text{kpp}}([0,1]) \times \mathcal{M}_{\text{kpp}}([0,1])$:

$$\{\mu_0, \nu_0\} \xrightarrow{V(*)} \{\mu_1, \nu_1\} \xrightarrow{V(*)} \dots \xrightarrow{V(*)} \{\mu_N, \nu_N\} \xrightarrow{V(*)} \dots \tag{22}$$

з початковою точкою $\{\mu_0, \nu_0\}$, де $\{\mu_N, \nu_N\} := V^N(*)\{\mu_0, \nu_0\}$, $N = 1, 2, \dots,$ — пара мір на N-му кроці ітерації.

Наступна теорема містить опис стаціонарних станів побудованої динамічної системи.

Теорема 2. *Нехай задано пару кусково рівномірно розподілених мір* μ_0, ν_0 *на інтервалі* $[0,1]$, *який розбито на проміжки* $\left[s_i, s_{i+1}\right]$, $i = 1, \ldots, k$, *згідно з* (18). *Припустимо, що виконується одна з умов:*

$$\exists\, i \in \overline{1, n}: \quad \frac{\mu_0\left(\left[s_i, s_{i+1}\right]\right)}{c_\mu} \neq \frac{\nu_0\left(\left[s_i, s_{i+1}\right]\right)}{c_\nu}, \tag{23}$$

або

$$\frac{\mu_0\left(\left[s_i, s_{i+1}\right]\right)}{c_\mu} = \frac{\nu_0\left(\left[s_i, s_{i+1}\right]\right)}{c_\nu} \neq 1 \quad \forall\, i \in \overline{1, n}, \tag{24}$$

де $c_\mu := \mu([0,1])$, $c_\nu := \nu([0,1])$. *Тоді траєкторія* (22) *збігається до інваріантної точки у просторі* $\mathcal{M}_{\text{kpp}}([0,1]) \times \mathcal{M}_{\text{kpp}}([0,1])$, *тобто існує пара кусково рівномірно розподілених граничних мір*

$$\mu_\infty = \lim_{N\to\infty} \mu_N, \qquad \nu_\infty = \lim_{N\to\infty} \nu_N,$$

інваріантних відносно відображення $V(*)$:

$$V(*)\{\mu_\infty, \nu_\infty\} = \{\mu_\infty, \nu_\infty\}.$$

При цьому, якщо виконується умова (23), *міри* μ_∞, ν_∞ *є взаємно сингулярними,*

$$\mu_\infty \perp \nu_\infty,$$

а якщо виконується умова (24), *граничні міри* μ_∞ *і* ν_∞ *набувають на проміжках* $\left[s_i, s_{i+1}\right]$ *таких значень:*

$$\mu_\infty\left(\left[s_i, s_{i+1}\right]\right) = \frac{c_\mu}{k}, \qquad \nu_\infty\left(\left[s_i, s_{i+1}\right]\right) = \frac{c_\nu}{k}.$$

Доведення. Нехай для деякого i виконується умова (23). Внаслідок (19) для координат векторів $\mathbf{p}^0$, $\mathbf{r}^0 \in \mathbf{R}_+^k$, що відповідають мірам μ_0, ν_0, виконується аналогічна умова

$$\frac{p_i^{(0)}}{c_\mu} \neq \frac{r_i^{(0)}}{c_\nu}.$$

За теоремою 1 існують граничні взаємно ортогональні вектори $\mathbf{p}^\infty$, $\mathbf{r}^\infty \in \mathbf{R}_+^k$, інваріантні відносно композиції конфлікту. Нехай μ_∞, ν_∞ позначає пару відповідних кусково рівномірно розподілених мір із простору $\mathcal{M}_{\text{kpp}}([0,1]) \times \mathcal{M}_{\text{kpp}}([0,1])$.

Згідно з формулою (21) для довільної борелевої множини A та будь-якого натурального $N = 1, 2, \ldots$ існують міри $\mu_N(A)$ та $\nu_N(A)$. Таким чином, використовуючи формули (21), переходимо до границь

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N(A) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \mu_N(A_i) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \frac{p_i^{(N)}|A_i|}{q_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{p_i^{(\infty)}|A_i|}{q_i} = \mu_\infty(A),$$

де $A_i = A \cap \left[s_i, s_{i+1}\right]$.

Аналогічно $\lim_{N\to\infty} \nu_N(A) = \nu_\infty(A)$. Отже,

$$\mu_\infty = \lim_{N\to\infty} \mu_N, \qquad \nu_\infty = \lim_{N\to\infty} \nu_N.$$

При цьому з ортогональності векторів $\mathbf{p}^{\infty}$, $\mathbf{r}^{\infty}$ випливає взаємна сингулярність граничних мір.

У випадку, коли для всіх $i = 1, 2, \ldots, k$ виконується умова (24), для координат відповідних векторів $\mathbf{p}^0$, $\mathbf{r}^0 \in \mathbf{R}_+^k$ маємо

$$0 < \frac{p_i^{(0)}}{c_\mu} = \frac{r_i^{(0)}}{c_\nu} \neq 1.$$

Знову за теоремою 2 існують граничні вектори $\mathbf{p}^{\infty}$, $\mathbf{r}^{\infty}$ такі, що для всіх їхніх координат

$$p_i^{(\infty)} = \frac{c_\mu}{k}, \qquad r_i^{(\infty)} = \frac{c_\nu}{k}.$$

Згідно з формулою (21) для довільної борелевої множини A та будь-якого натурального $N = 1, 2, \ldots$ існують міри $\mu_N(A)$ та $\nu_N(A)$. Отже,

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N(A) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \mu_N(A_i) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \frac{p_i^{(N)}|A_i|}{q_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{p_i^{(\infty)}|A_i|}{q_i} = \mu_\infty(A),$$

де $A_i = A \cap [s_i, s_{i+1}]$.

Аналогічно $\lim\limits_{N\to\infty} \nu_N(A) = \nu_\infty(A)$. Таким чином,

$$\mu_\infty = \lim_{N\to\infty} \mu_N, \qquad \nu_\infty = \lim_{N\to\infty} \nu_N.$$

При цьому для $i = 1, 2, \ldots, k$

$$\mu_\infty([s_i, s_{i+1}]) = p_i^{(\infty)} \frac{|[s_i, s_{i+1}]|}{q_i} = \frac{c_\mu}{k},$$

$$\nu_\infty([s_i, s_{i+1}]) = r_i^{(\infty)} \frac{|[s_i, s_{i+1}]|}{q_i} = \frac{c_\nu}{k}.$$

Останнє доводить справедливість теореми.

1. *Кошманенко В. Д.* Теорема про конфлікт для пари стохастичних векторів // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 4. – С. 555 – 560.
2. *Koshmanenko V.* The theorem on conflict for probability measures // Math. Math. Oper. Res. – 2004. – **59**, № 2. – P. 303 – 313.
3. *Epstein J. M.* Nonlinear dynamics, mathematical biology, and social science. – Addison-Wesley Publ. Co. , 1997. – 164 p.
4. *Hofbauer J., Sigmund K.* The theory of evolution and dynamical systems. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988. – 341 p.
5. *Hofbauer J., Sigmund K.* Evolutionary games and population dymanics. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. – 323 p.
6. *Sigmund K.* The population dynamics of conflict and cooperation // Doc. Math. J. DMV, I. – 1998. – P. 487 – 506.

Одержано 27.05.2003