. УДК 517.5

В. Н. Коновалов (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ФОРМОСОХРАНЯЮЩИЕ ПОПЕРЕЧНИКИ ТИПА КОЛМОГОРОВА КЛАССОВ s-МОНОТОННЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Let $s \in \mathbb{N}_0$ and Δ_+^s be a set of functions x which are defined on a finite interval I and are such that, for all collections of $s+1$ pairwise different points $t_0, \ldots, t_s \in I$, the corresponding divided differences $[x; t_0, \ldots, t_s]$ of order s are nonnegative. Let $\Delta_+^s B_p := \Delta_+^s \cap B_p$, $1 \le p \le \infty$, where B_p is the unit ball of the space L_p, and let $\Delta_+^s L_q := \Delta_+^s \cap L_q$, $1 \le q \le \infty$. For every $s \ge 3$ and $1 \le q \le p \le \infty$, exact orders of the shape-preserving Kolmogorov widths

$$d_n\left(\Delta_+^s B_p, \Delta_+^s L_q\right)_{L_q}^{\mathrm{kol}} := \inf_{M^n \in \mathcal{M}^n} \sup_{x \in \Delta_+^s B_p} \inf_{y \in M^n \cap \Delta_+^s L_q} \|x - y\|_{L_q},$$

are obtained, where $\mathcal{M}^n$ is the set of all affine linear manifolds M^n in L_q such that $\dim M^n \le n$ and $M^n \cap \Delta_+^s L_q \ne \varnothing$.

Нехай $s \in \mathbb{N}_0$ і Δ_+^s — множина функцій x, визначених на скінченному інтервалі I і таких, що для всіх наборів з $s+1$ попарно різних точок $t_0, \ldots, t_s \in I$ відповідні поділені різниці $[x; t_0, \ldots, t_s]$ порядку s є невід'ємними. Нехай $\Delta_+^s B_p := \Delta_+^s \cap B_p$, $1 \le p \le \infty$, де B_p — одинична куля простору L_p, і $\Delta_+^s L_q := \Delta_+^s \cap L_q$, $1 \le q \le \infty$. Для всіх $s \ge 3$ і $1 \le q \le p \le \infty$ знайдено точні порядки формозберігаючих поперечників типу Колмогорова

$$d_n\left(\Delta_+^s B_p, \Delta_+^s L_q\right)_{L_q}^{\mathrm{kol}} := \inf_{M^n \in \mathcal{M}^n} \sup_{x \in \Delta_+^s B_p} \inf_{y \in M^n \cap \Delta_+^s L_q} \|x - y\|_{L_q},$$

де $\mathcal{M}^n$ — сукупність усіх афінно лінійних многовидів M^n з L_q таких, що $\dim M^n \le n$ і $M^n \cap \Delta_+^s L_q \ne \varnothing$.

1. Введение и формулировка основных результатов. Пусть X — вещественное линейное пространство векторов x с нормой $\|x\|_X$, а W и V — не пустые подмножества из X. Пусть $n \in \mathbb{N}_0$ и $\mathcal{M}^n := \{M^n\}$ — совокупность всех аффинно линейных многообразий $M^n \subseteq X$ таких, что $\dim M^n \le n$. Величина

$$d_n(W)_X^{\mathrm{kol}} := \inf_{M^n \in \mathcal{M}^n} \sup_{x \in W} \inf_{y \in M^n} \|x - y\|_X$$

называется n-поперечником по Колмогорову множества W в пространстве X. Этот поперечник введен А. Н. Колмогоровым в [1]. Если $\mathcal{M}^n := \{M^n\}$ — совокупность всех аффинно линейных многообразий $M^n \subseteq X$ таких, что $\dim M^n \le n$ и $M^n \cap V \ne \emptyset$, то величина

$$d_n(W, V)_X^{\mathrm{kol}} := \inf_{M^n \in \mathcal{M}^n} \sup_{x \in W} \inf_{y \in M^n \cap V} \|x - y\|_X$$

называется относительным n-поперечником типа Колмогорова множества W в пространстве X с ограничением V. Такой поперечник введен в [2]. Очевидно, что если $V = X$, то $d_n(W, X)_X^{\mathrm{kol}} = d_n(W)_X^{\mathrm{kol}}$. Также ясно, что $d_n(W, V)_X^{\mathrm{kol}} \ge d_n(W)_X^{\mathrm{kol}}$ для любого $V \subset X$.

При $s \in \mathbb{N}_0$ функция x называется s-монотонной на интервале I, если для всех наборов из $s+1$ попарно различных точек $t_0, \ldots, t_s \in I$ соответствующие разделенные разности $[x; t_0, \ldots, t_s]$ являются неотрицательными. Очевидно, что

s-монотонные функции при $s = 0, 1, 2$ — это соответственно неотрицательные, неубывающие и выпуклые функции на I. Таким образом, параметр s определяет форму функций. Отметим также, что если функция x имеет непрерывную на I производную $x^{(s)}$ порядка s, то она является s-монотонной тогда и только тогда, когда $x^{(s)}(t) \geq 0$ для всех $t \in I$.

Известно (см. [3–5]), что s-монотонные функции имеют при $s \geq 1$ ряд хороших свойств. Например, 1-монотонная функция x имеет в каждой точке $t \in I$ конечные пределы $x_-(t)$ и $x_+(t)$ соответственно слева и справа. Если же $s \geq 2$ и функция x является s-монотонной на интервале I, то при всех $k \leq s-2$ существуют производные $x^{(k)}$ порядка k в каждой точке $t \in I$, являющиеся $(s-k)$-монотонными функциями. В частности, производная $x^{(s-2)}$ существует и является выпуклой на I, а следовательно, удовлетворяет условию Липшица на любом замкнутом отрезке из I. Односторонние производные $x_-^{(s-1)}(t)$ и $x_+^{(s-1)}(t)$ соответственно слева и справа существуют в каждой точке $t \in I$ и являются неубывающими функциями. Обычная производная $x^{(s-1)}$ существует почти всюду на I, за исключением не более чем счетного множества точек.

Множество всех s-монотонных на I функций будем обозначать через $\Delta_+^s(I)$. Кроме того, если на I определен некоторый класс функций $W(I)$, то полагаем $\Delta_+^s W(I) := \Delta_+^s(I) \cap W(I)$. Для $I = (-1, 1)$ обозначение интервала I будем, как правило, опускать. Например, полагаем $W := W(I)$, если $I = (-1, 1)$.

Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — конечный промежуток (интервал, полуинтервал или отрезок). Через $L_p(I)$, $1 \leq p \leq \infty$, обозначаем, как обычно, пространство всех измеримых по Лебегу функций $x : I \to \mathbb{R}$ с конечной нормой $\|x(\cdot)\|_{L_p(I)}$. Единичный шар пространства $L_p(I)$ обозначаем через $B_p(I)$. Относительные n-поперечники вида $d_n\left(\Delta_+^s W, \Delta_+^s L_q\right)_{L_q}^{\mathrm{kol}}$ классов $\Delta_+^s W(I) \subset L_q(I)$ называются формосохраняющими n-поперечниками типа Колмогорова в L_q, так как они характеризуют наилучшие приближения s-монотонных функций из этих классов элементами n-мерных аффинно линейных многообразий с сохранением s-монотонности.

В работах [6, 7] (см. также [8]) исследовался вопрос о порядковой асимптотике формосохраняющих поперечников $d_n\left(\Delta_+^s W_p^r, \Delta_+^s L_q\right)_{L_q}^{\mathrm{kol}}$ для s-монотонных функций из классов Соболева W_p^r. Было изучено поведение этих поперечников в случае $r \in \mathbb{N}$, $s = 0, 1, \ldots, r+1$ и $1 \leq p, q \leq \infty$, при условии $r - 1/p + 1/q > 0$.

В работах [9] найдены точные порядки поперечников $d_n\left(\Delta_+^s B_p, \Delta_+^s L_q\right)_{L_q}^{\mathrm{kol}}$ для случая $s = 0, 1, 2$ и $1 \leq q \leq p \leq \infty$. Для $s \geq 3$ вопрос о поведении формосохраняющих поперечников $d_n\left(\Delta_+^s B_p, \Delta_+^s L_q\right)_{L_q}^{\mathrm{kol}}$ оставался открытым. Этому вопросу и посвящена данная работа.

Отметим, что если $q > p$, то $\Delta_+^s B_p \not\subset L_q$. Следует также отметить, что, несмотря на наличие у функций $x \in \Delta_+^s B_p$, $s > 1$, определенных дифференциальных свойств, нельзя, вообще говоря, гарантировать при $1 \leq p < \infty$ ограниченность норм $\left\|x^{(k)}\right\|_{L_{p_*}}$ производных порядка $k \geq 1$ в каком-либо из пространств L_{p_*}, $1 \leq p_* \leq \infty$. Можно утверждать, что лишь при $p = \infty$ для функций $x \in \Delta_+^s B_\infty$ $\|x'\|_{L_1} < \infty$.

Прежде чем привести результаты из [9] и сформулировать основные результаты данной статьи, условимся о некоторых дополнительных обозначениях, которые потребуются далее. Для чисел $p : 1 \leq p \leq \infty$ через p' будем обозначать сопряженные числа, т. е. такие, что $1/p + 1/p' = 1$. Через $c := c(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)$ обозначим различные положительные „постоянные", зависящие от параметров $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$. Если заданы последовательности a_n, $n \geq 1$, и b_n, $n \geq 1$, положительных чисел a_n и b_n, то эти последовательности удовлетворяют соотношению $a_n \asymp b_n$, $n \geq 1$, тогда и только тогда, когда существуют не зависящие от n числа $0 < c_1 \leq c_2$ такие, что $c_1 \leq a_n/b_n \leq c_2$ для всех $n \geq 1$.

Следующие три теоремы установлены в [9]. Они характеризуют поведение формосохраняющих поперечников $d_n\left(\Delta_+^s B_p, \Delta_+^s L_q\right)_{L_q}^{\mathrm{kol}}$ для $s = 0, 1, 2$.

Теорема A. *Если* $1 \leq q \leq p \leq \infty$, *то*

$$d_n\left(\Delta_+^0 B_p, \Delta_+^0 L_q\right)_{L_q}^{\mathrm{kol}} \asymp 1, \quad n \geq 1.$$

Теорема B. *Если* $1 \leq q < p \leq \infty$, *то*

$$d_n\left(\Delta_+^1 B_p, \Delta_+^1 L_q\right)_{L_q}^{\mathrm{kol}} \asymp n^{-1+1/q'}, \quad n \geq 1.$$

Если $1 \leq q = p \leq \infty$, *то*

$$d_n\left(\Delta_+^1 B_p, \Delta_+^1 L_p\right)_{L_p}^{\mathrm{kol}} \asymp 1, \quad n \geq 1.$$

Теорема C. *Если* $1 \leq q < p \leq \infty$, *то*

$$d_n\left(\Delta_+^2 B_p, \Delta_+^2 L_q\right)_{L_q}^{\mathrm{kol}} \asymp n^{-2+1/q'}, \quad n \geq 1.$$

Если $1 \leq q = p \leq \infty$, *то*

$$d_n\left(\Delta_+^2 B_p, \Delta_+^2 L_p\right)_{L_p}^{\mathrm{kol}} \asymp 1, \quad n \geq 1.$$

Теперь сформулируем основной результат данной работы, описывающий поведение формосохраняющих поперечников $d_n\left(\Delta_+^s B_p, \Delta_+^s L_q\right)_{L_q}^{\mathrm{kol}}$ для $s \geq 3$.

Теорема. *Пусть* $s \in \mathbb{N}$ *и* $s \geq 3$. *Если* $1 \leq q < p \leq \infty$, *то*

$$d_n\left(\Delta_+^s B_p, \Delta_+^s L_q\right)_{L_q}^{\mathrm{kol}} \asymp n^{-2}, \quad n \geq 1. \tag{1.1}$$

Если $1 \leq q = p \leq \infty$, *то*

$$d_n\left(\Delta_+^s B_p, \Delta_+^s L_p\right)_{L_p}^{\mathrm{kol}} \asymp 1, \quad n \geq 1. \tag{1.2}$$

2. Вспомогательные утверждения. При $n \in \mathbb{N}$ и $1 \leq p \leq \infty$ через l_p^n обозначим, как обычно, линейное вещественное пространство векторов $x :=$ $:= (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|x\|_{l_p^n} := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p},$$

где $\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^\infty\right)^{1/\infty} := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, через B_p^n — единичный p-шар пространства l_p^n, а через ρB_p^n — p-шары радиуса $\rho > 0$. Если $\rho = 1$, то $1B_p^n = B_p^n$.

В [10] (см. также [11]) доказано следующее утверждение.

Лемма 1. *Если $n, N \in \mathbb{N}$ и $n < \log N$, то*

$$d_n \left(B_1^N\right)_{l_\infty^N}^{\text{kol}} \geq c_0,$$

где $c_0 > 0$ — абсолютная постоянная.

В следующей лемме и далее длину ограниченного промежутка $J \subset \mathbb{R}$ будем обозначать через $|J|$.

Лемма 2. *Пусть J — ограниченный интервал, $r \in \mathbb{N}$ и $A_r > 0$. Если функция $x : J \to \mathbb{R}$ имеет производную $x^{(r-1)} \in AC_{\text{loc}}(J)$, и при этом $x^{(r)}(t) > A_r$ или $x^{(r)}(t) < -A_r$ для почти всех $t \in J$, то существует интервал $J_r \subset J$ длины $|J_r| = 2^{-2r}|J|$ такой, что $|x(t)| > 2^{-r(r+1)}|J|^r A_r$ для всех $t \in J_r$.*

Эта лемма, фактически, доказана в [7] (см. лемму 1). В утверждении леммы 1 из [7] лишь предполагалось, что $x^{(r)} \in C(J)$. Но ход доказательства не изменится, если вместо этого предполагать, что $x^{(r-1)} \in AC_{\text{loc}}(J)$.

В следующей лемме и далее для функций $x \in \Delta_+^s(I)$, $s \geq 1$, полагаем

$$x^{(s-1)}(t) := \frac{1}{2}\left(x_-^{(s-1)}(t) + x_+^{(s-1)}(t)\right), \quad t \in I.$$

Ясно, что если в точке $t \in I$ существует обычная производная порядка $s-1$, то она совпадает с так определяемой обобщенной производной.

Лемма 3. *Пусть $x \in \Delta_+^s L_p(I)$, $s \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, где I — конечный интервал. Пусть $\bar{t}$ — середина интервала I и*

$$\pi_s(t; x) := \sum_{k=0}^{s-1} \frac{x^{(k)}(\bar{t})}{k!}(t-\bar{t})^k, \quad t \in I.$$

Тогда для функции

$$\tilde{x}(t) := x(t) - \pi_s(t; x; \bar{t}), \quad t \in I,$$

выполняется неравенство

$$\|\tilde{x}\|_{L_p(I)} \leq \tilde{c}\,\|x\|_{L_p(I)},$$

где $\tilde{c} = \tilde{c}(s, p)$.

Доказательство. Пусть $I := (-1, 1)$ и $\bar{t} := 0$. Положив

$$\tilde{x}_{s-1}(t) := x(t) - x^{(s-1)}(0)t^{s-1}/((s-1)!), \quad t \in I,$$

определим на интервале I также следующие функции:

$$\tilde{x}_{s-1-k}(t) := \tilde{x}_{s-k}(t) - x^{(s-1-k)}(0)t^{s-1-k}/((s-1-k)!), \quad k = 1, \ldots, s-1,$$

и докажем, что

$$\|\tilde{x}_0\|_{L_p(I)} \leq \left(\prod_{k=0}^{s-1} \tilde{c}_{p,s-1-k}\right) \|x\|_{L_p(I)}, \tag{2.1}$$

где $\tilde{c}_{p,s-1-k} := 1 + ((s-1-k)!(s-1-k)p+1)^{1/p})^{-1}2^{(s-1-k)(s-k+3+2/p)+3/p+1}$, $k = 0, \ldots, s-1$.

Допустим от противного, что

$$\left|x^{(s-1)}(0)\right| > 2^{(s-1)s+2(s-1)/p}\,\|x(\cdot)\|_{L_p(I)}.$$

А так как $x^{(s-1)}$ не убывает на интервале I, то тогда, по крайней мере, на одном из интервалов $J := (-1,0) \vee (0,1)$ функция $x^{(s-1)}$ не меняет знак и при этом выполняется неравенство

$$\left|x^{(s-1)}(t)\right| > 2^{(s-1)s+2(s-1)/p} \|x(\cdot)\|_{L_p(I)}, \quad t \in J.$$

Но в таком случае из леммы 2 при $r = s-1$ следует, что существует интервал $J_{s-1} \subset J$ длины $|J_{s-1}| = 2^{-2(s-1)}|J| = 2^{-2(s-1)}$ такой, что

$$|x(t)| > 2^{2(s-1)/p} \|x(\cdot)\|_{L_p(I)}, \quad t \in J_{s-1}.$$

Тогда

$$\|x\|_{L_p(J_{s-1})} > \|x\|_{L_p(I)},$$

что невозможно. Полученное противоречие доказывает выполнение неравенства

$$\left|x^{(s-1)}(0)\right| \leq 2^{(s-1)s+2(s-1)/p} \|x\|_{L_p(I)},$$

из которого следует

$$\|\tilde{x}_{s-1}\|_{L_p(I)} \leq \tilde{c}_{p,s-1} \|x\|_{L_p(I)}.$$

Предположив, что при некотором $l : 0 \leq l < s-1$ доказано неравенство

$$\|\tilde{x}_{s-1-l}\|_{L_p(I)} \leq \left(\prod_{k=0}^{l} \tilde{c}_{p,s-1-k}\right) \|x\|_{L_p(I)}, \tag{2.2}$$

докажем по индукции, что тогда будет выполняться и неравенство

$$\left\|\tilde{x}_{s-1-(l+1)}\right\|_{L_p(I)} \leq \left(\prod_{k=0}^{l+1} \tilde{c}_{p,s-1-k}\right) \|x\|_{L_p(I)}. \tag{2.3}$$

Допустим от противного, что

$$\left|x^{(s-1-(l+1))}(0)\right| > 2^{(s-1-(l+1))(s-(l+1)+3+2/p)+2/p+1} \|\tilde{x}_{s-1-l}\|_{L_p(I)}.$$

Если $l+1$ — нечетное число, то $\tilde{x}_{s-1-l}^{(s-1-(l+1))}$ — выпуклая на I функция и такая, что $\tilde{x}_{s-1-l}^{(s-1-l)}(0) = 0$. Очевидно, что в случае $x^{(s-1-(l+1))}(0) > 0$ будет выполняться неравенство

$$\tilde{x}_{s-1-l}^{(s-1-(l+1))}(t) > 2^{(s-1-(l+1))(s-(l+1)+3+2/p)+2/p+1} \|\tilde{x}_{s-1-l}\|_{L_p(I)}, \quad t \in J.$$

В случае же $x^{(s-1-(l+1))}(0) < 0$ график функции $x_{s-1-l}^{(s-1-(l+1))}$ должен либо проходить на интервале $(0,1/2)$ не выше графика прямой $y := 2\left|x^{(s-1-(l+1))}(0)\right|(t - -1/2)$, либо располагаться на интервале $(1/2,1)$ не ниже графика этой прямой. Поэтому в рассматриваемом случае будет выполняться, по крайней мере, одно из неравенств

$$-\tilde{x}_{s-1-l}^{(s-1-(l+1))}(t) > 2^{(s-1-(l+1))(s-(l+1)+3+2/p)+2/p} \|\tilde{x}_{s-1-l}\|_{L_p(I)}, \quad t \in (0,1/4),$$

или

$$\tilde{x}_{s-1-l}^{(s-1-(l+1))}(t) > 2^{(s-1-(l+1))(s-(l+1)+3+2/p)+2/p} \|\tilde{x}_{s-1-l}\|_{L_p(I)}, \quad t \in (3/4,1).$$

Следовательно, в силу выпуклости $\tilde{x}_{s-1-l}^{(s-1-(l+1))}$ и того обстоятельства, что $\tilde{x}_{s-1-l}^{(s-1-l)}(0)=0$, по крайней мере, на одном из интервалов $J:=(0,1/4)\vee(3/4,1)$ длины $|J|=2^{-2}$ должно выполняться неравенство

$$\pm\,\tilde{x}_{s-1-l}^{(s-1-(l+1))}(t)>2^{(s-1-(l+1))(s-(l+1)+3+2/p)+2/p}\left\|\tilde{x}_{s-1-l}(\cdot)\right\|_{L_p(I)},\quad t\in J. \tag{2.4}$$

Тогда из леммы 2 при $r=s-1-(l+1)$ следует, что существует интервал $J_{s-1-(l+1)}\subset J$ длины $\left|I_{s-1-(l+1)}\right|=2^{-2(s-1-(l+1))-2}$ такой, что

$$|\tilde{x}_{s-1-l}(t)|>2^{2(s-1-(l+1))/p+2/p}\left\|\tilde{x}_{s-1-l}(\cdot)\right\|_{L_p(I)},\quad t\in J_{s-1-(l+1)},$$

а из этого неравенства следует

$$\left\|\tilde{x}_{s-1-l}(\cdot)\right\|_{L_p(J_{s-1-(l+1)})}>\left\|\tilde{x}_{s-1-l}(\cdot)\right\|_{L_p(I)},$$

что невозможно. Тем самым, для нечетных чисел $l+1$ доказано неравенство

$$\left|x^{(s-1-(l+1))}(0)\right|\le 2^{(s-1-(l+1))(s-(l+1)+3+2/p)+2/p+1}\left\|\tilde{x}_{s-1-l}(\cdot)\right\|_{L_p(I)},\quad t\in J,$$

которое, в свою очередь, влечет неравенство

$$\left\|\tilde{x}_{s-1-(l+1)}(\cdot)\right\|_{L_p(I)}\le\tilde{c}_{p,s-1-(l+1)}\left\|\tilde{x}_{s-1-l}(\cdot)\right\|_{L_p(I)}.$$

Тогда из последнего неравенства и (2.2) следует (2.3). Таким образом, неравенство (2.3) доказано при условии, что $l+1$ — нечетное число.

Если же $l+1$ — четное число, то в силу монотонности функции $\tilde{x}_{s-1-l}^{(s-1-(l+1))}$ неравенство (2.4) должно выполняться, по крайней мере, на одном из интервалов $J:=(-1,0)\vee(0,1)$. Остается лишь повторить предыдущие рассуждения, чтобы и в этом случае доказать неравенство (2.3).

Полагая в (2.3) $l=s-2$, получаем неравенство (2.1). А так как $\tilde{x}_0(t)=\tilde{x}(t)$ при $t\in I$, то из (2.1) следует утверждение леммы 3.

Лемма 3 доказана.

Условимся еще об одном обозначении, которое используется в следующей лемме и далее. Для $s\in\mathbb{N}$ и $k\in\mathbb{Z}$ полагаем

$$\nu_s(k):=\begin{cases}\dbinom{k+s-2}{s-1}, & k\ge 1;\\ 0, & k<1.\end{cases}$$

Лемма 4. *Пусть* $s,m\in\mathbb{N}$, $1\le p\le\infty$ *и* $a:=(a_1,\ldots,a_m)$ *— вектор из* $\mathbb{R}^m$ *с неотрицательными координатами, а* $b:=(b_1,\ldots,b_m)$ *— вектор из* $\mathbb{R}^m$ *с положительными координатами. Пусть, кроме того, заданы линейная функция*

$$f_m(\omega;a):=\sum_{i=1}^m a_i\omega_i,\quad \omega:=(\omega_1,\ldots,\omega_m)\in\mathbb{R}^m,$$

и множество

$$\Omega_{s,p}^m(b):=\left\{\omega\mid\omega_i\ge 0,i=1,\ldots,m,\left(\sum_{i=1}^m\left(b_i\sum_{j=1}^i\nu_s(i-j+1)\omega_j\right)^p\right)^{1/p}\le 1\right\}.$$

Тогда

$$\max_{\omega\in\Omega^m_{s,p}(b)} f_m(\omega;a) \le \left(\sum_{i=1}^m \left(\left|\sum_{k=0}^s (-1)^k \binom{s}{k} a_{i+k}\right| b_i^{-1}\right)^{p'}\right)^{1/p'},$$

где $a_i := 0$, $i = m+1,\ldots,m+s$.

Доказательство. Выполним замену переменных, положив

$$\tilde\omega_i := b_i \sum_{j=1}^i \nu_s(i-j+1)\omega_j, \quad i = 1,\ldots,m.$$

Выразим переменные ω_i через переменные $\tilde\omega_i$. Для этого рассмотрим следу представления:

$$\sum_{k=0}^{\min\{s,i-1\}} (-1)^k \binom{s}{k} b_{i-k}^{-1}\tilde\omega_{i-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\min\{s,i-1\}} \sum_{j=1}^{i-k} (-1)^k \binom{s}{k} \nu_s(i-k-j+1)\omega_j, \quad i = 1,\ldots,m.$$

Поскольку $\nu_s(l) = 0$ при $l < 1$, то

$$\sum_{k=0}^{\min\{s,i-1\}} \sum_{j=1}^{i-k} (-1)^k \binom{s}{k} \nu_s(i-k-j+1)\omega_j =$$

$$= \sum_{k=0}^{\min\{s,i-1\}} \sum_{j=1}^{i} (-1)^k \binom{s}{k} \nu_s(i-k-j+1)\omega_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{i} \left(\sum_{k=0}^{\min\{s,i-1\}} (-1)^k \binom{s}{k} \nu_s(i-k-j+1)\right)\omega_j.$$

Очевидно, что при $i = 1$ справедливо равенство

$$\sum_{j=1}^{1} \left(\sum_{k=0}^{\min\{s,0\}} (-1)^k \binom{s}{k} \nu_s(1-k-j+1)\right)\omega_j = \nu_s(1)\omega_1.$$

Если же $i > 1$, то

$$\sum_{j=1}^{i} \left(\sum_{k=0}^{\min\{s,i-1\}} (-1)^k \binom{s}{k} \nu_s(i-k-j+1)\right)\omega_j =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\min\{s,i-1\}} (-1)^k \binom{s}{k} \nu_s(i-k-i+1)\right)\omega_i +$$

$$+\sum_{j=1}^{i-1}\left(\sum_{k=0}^{\min\{s,i-1\}}(-1)^k\binom{s}{k}\nu_s(i-k-j+1)\right)\omega_j. \tag{2.8}$$

Ясно, что

$$\left(\sum_{k=0}^{\min\{s,i-1\}}(-1)^k\binom{s}{k}\nu_s(-k+1)\right)\omega_i=\nu_s(1)\omega_i. \tag{2.9}$$

Кроме того, из определения величин $\nu_s(l)$ для $l\le 0$ следует

$$\sum_{j=1}^{i-1}\left(\sum_{k=0}^{\min\{s,i-1\}}(-1)^k\binom{s}{k}\nu_s(i-k-j+1)\right)\omega_j=$$

$$=\sum_{j=1}^{i-1}\left(\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}\nu_s(i-k-j+1)\right)\omega_j. \tag{2.10}$$

Нетрудно заметить, что в (2.10) величины $\nu_s(i-k-j+1)$ совпадают со значениями многочлена

$$\pi_{s-1}(t):=((s-1)!)^{-1}\prod_{l=1}^{s-1}(t+l-1),\quad t\in\mathbb{R},$$

степени $s-1$ в соответствующих точках $t=i-k-j+1$. Поэтому

$$\sum_{j=1}^{i-1}\left(\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}\nu_s(i-k-j+1)\right)\omega_j=$$

$$=\sum_{j=1}^{i-1}\left(\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}\pi_{s-1}(i-k-j+1)\right)\omega_j=$$

$$=\sum_{j=1}^{i-1}\Delta_{-1}^{s}\pi_{s-1}(i-j+1)\omega_j, \tag{2.11}$$

где $\Delta_{-1}^{s}\pi_{s-1}(i-j+1)$ — обычная разность порядка относительно точки $i-j+1$ с шагом $h=-1$ для многочлена π_{s-1}. А так как

$$\Delta_{-1}^{s}\pi_{s-1}(i-j+1)=0,\quad j=1,\ldots,i-1,\quad i>1,$$

то

$$\sum_{j=1}^{i-1}\Delta_{-1}^{s}\pi_{s-1}(i-j+1)\omega_j=0,\quad i>1. \tag{2.12}$$

Но тогда из (2.5)–(2.12) следует

$$\sum_{k=0}^{\min\{s,i-1\}}(-1)^k\binom{s}{k}b_{i-k}^{-1}\bar{\omega}_{i-k}=\nu_s(1)\omega_i,\quad i=1,\ldots,m.$$

А поскольку $\nu_s(1) = 1$, то получаем представления

$$\omega_i = \sum_{k=0}^{\min\{s,i-1\}} (-1)^k \binom{s}{k} b_{i-k}^{-1} \tilde{\omega}_{i-k}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

переменных ω_i через переменные $\tilde{\omega}_i$.

Теперь ясно, что образом множества $\Omega_{s,p}^m(b)$ будет множество

$$\tilde{\Omega}_{s,p}^m(b) := B_p^m \cap \tilde{K}^m(b),$$

где

$$\tilde{K}_s^m(b) := \left\{ \tilde{\omega} \mid \sum_{k=0}^{\min\{s,i-1\}} (-1)^k \binom{s}{k} b_{i-k}^{-1} \tilde{\omega}_{i-k} \geq 0, i = 1, \ldots, m \right\}$$

— выпуклый конус в пространстве l_p^m точек $\tilde{\omega} := (\tilde{\omega}_1, \ldots, \tilde{\omega}_m)$, а B_p^m — единичный p-шар в этом пространстве.

В результате замены переменных функция $f_m(\cdot; a)$ примет вид

$$f_{m,s}(\tilde{\omega}; a; b) := \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=0}^{\min\{s,i-1\}} (-1)^k \binom{s}{k} a_{i+k} \right) b_i^{-1} \tilde{\omega}_i, \quad \tilde{\omega} \in \mathbb{R}^m.$$

При этом очевидно, что

$$\max_{\omega \in \Omega_{s,p}^m(b)} f_m(\omega; a) = \max_{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}_{s,p}^m(b)} f_{m,s}(\tilde{\omega}; a; b) \leq \max_{\tilde{\omega} \in B_p^m} f_{m,s}(\tilde{\omega}; a; b).$$

Таким образом, задача свелась к вычислению нормы линейного функционала $f_{m,s}(\cdot; a; b)$, заданного на пространстве l_p^m. Тогда

$$\max_{\tilde{\omega} \in B_p^m} f_{m,s}(\tilde{\omega}; a; b) = \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\left| \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} a_{i+k} \right| b_i^{-1} \right)^{p'} \right)^{1/p'},$$

где $a_i := 0$, $i = m+1, \ldots, m+s$.

Лемма 4 доказана.

Прежде чем сформулировать следующую лемму, необходимо условиться еще о некоторых обозначениях. Пусть X — линейное вещественное пространство, $n \in \mathbb{N}$ и $1 \leq p \leq \infty$. Если задана система $E^n := \{e^i\}_{i=1}^n$ векторов $e^i \in X$, то множество

$$S_p^+(E^n) := \left\{ e \mid e := \sum_{i=1}^{n} a_i e^i, a_i \geq 0, i = 1, \ldots, n, \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{1/p} \leq 1 \right\}$$

будем называть (единичным) положительным p-сектором по системе E^n, а множество

$$B_p(E^n) := \left\{ e \mid e := \sum_{i=1}^{n} a_i e^i, \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{1/p} \leq 1 \right\}$$

— (единичным) p-шаром по системе E^n. Для $\rho > 0$ полагаем

$$\rho S_p^+(E^n) := \left\{ e \mid e := \sum_{i=1}^n a_i e^i, a_i \ge 0, i = 1, \ldots, n, \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \le \rho \right\}$$

и

$$\rho B_p(E^n) := \left\{ e \mid e := \sum_{i=1}^n a_i e^i, \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p} \le \rho \right\}.$$

Очевидно, что $1S_p^+(E^n) = S_p^+(E^n)$ и $1B_p(E^n) = B_p(E^n)$. Ясно, что если $E_0^n := := \left\{e_0^i\right\}_{i=1}^n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$ из векторов e_0^i, то $B_p(E_0^m) = B_p^m$. Кроме того, для $a \in \mathbb{R}$ полагаем $a_+ := \max\{0, a\}$.

Лемма 5. *Пусть $I := (-1, 1)$, $s \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$ и $t_i := 1 - 2^{-i}$, $i = 0, 1, 2 \ldots$. Пусть, далее, $\Xi_{s,p}^N := \{\xi_{s,p,i}\}_{i=1}^N$ — система функций*

$$\xi_{s,p,i}(t) := ((s-1)p+1)^{1/p} 2^{(s-1/p')(i-1)} (t - t_{i-1})_+^{s-1}, \qquad t \in I, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Тогда

$$d_n\left(S_1^+\left(\Xi_{s,p}^N\right)\right)_{L_p}^{\mathrm{kol}} \ge c d_{n+1}\left(B_1^N\right)_{l_\infty^N}^{\mathrm{kol}}, \quad N > n \ge 1,$$

где $c = c(s, p)$.

Доказательство. Положив

$$I_{s,i} := \left[t_{i-1}, t_{i-1} + s^{-1} 2^{-i}\right), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

определим оператор дискретизации $A_{s,p}^N : L_p(I) \ni x \to A_{s,p}^N x \in l_p^N$ так, что

$$A_{s,p}^N x := 2^{-s} \left\{ |I_{s,1}|^{-1/p'} \int_{I_{s,1}} \Delta_{|I_{s,1}|}^{s-1} x(t) dt, \ldots, |I_{s,N}|^{-1/p'} \int_{I_{s,N}} \Delta_{|I_{s,N}|}^{s-1} x(t) dt \right\},$$

где $\Delta_h^{s-1} x$ — обыкновенная разность порядка $s - 1$ с шагом h для функции x. С помощью неравенства Гельдера нетрудно проверить выполнение неравенства

$$\left\|A_{s,p}^N x\right\|_{l_p^N} \le \|x\|_{L_p(I)}, \quad x \in L_p(I).$$

Но тогда очевидно, что

$$d_n\left(S_1^+\left(\Xi_{s,p}^N\right)\right)_{L_p}^{\mathrm{kol}} \ge d_n\left(S_1^+\left(A_{s,p}^N \Xi_{s,p}^N\right)\right)_{l_p^N}^{\mathrm{kol}}, \tag{2.13}$$

где $A_{s,p}^N \Xi_{s,p}^N := \left\{A_{s,p}^N \xi_{s,p,i}\right\}_{i=1}^N$ — образ системы $\Xi_{s,p}^N$, а $S_1^+\left(A_{s,p}^N \Xi_{s,p}^N\right)$ — положительный 1-сектор по системе $A_{s,p}^N \Xi_{s,p}^N$. Поскольку для любых $x \in \mathbb{R}^N$ и $1 \le p \le \infty$ выполняется неравенство $\|x\|_{l_p^N} \ge \|x\|_{l_\infty^N}$, очевидно, что

$$d_n\left(S_1^+\left(A_{s,p}^N \Xi_{s,p}^N\right)\right)_{l_p^N}^{\mathrm{kol}} \ge d_n\left(S_1^+\left(A_{s,p}^N \Xi_{s,p}^N\right)\right)_{l_\infty^N}^{\mathrm{kol}}. \tag{2.14}$$

Вычислим теперь координаты векторов $A_{s,p}^N \xi_{s,p,i}$, $i = 1, \ldots, N$. Очевидно, что при всех $s \in \mathbb{N}$ и $j < i$ справедливы равенства

$$\int_{I_{s,j}} \Delta_{|I_{s,1}|}^{s-1} \xi_{s,p,i} dt = 0.$$

Если же $j \geq i$ и $s > 1$, то

$$\int\limits_{I_{s,j}} \Delta^{s-1}_{|I_{s,j}|} \xi_{s,p,i} dt =$$

$$= \int\limits_{I_{s,j}} \int\limits_{0}^{|I_{s,j}|} \ldots \int\limits_{0}^{|I_{s,j}|} \xi^{(s-1)}_{s,p,i}(t + \tau_1 + \ldots + \tau_{s-1}) d\tau_1 \ldots d\tau_{s-1} dt =$$

$$= \int\limits_{I_{s,j}} \int\limits_{0}^{|I_{s,j}|} \ldots \int\limits_{0}^{|I_{s,j}|} (s-1)! 2^{(s-1/p')(i-1)} d\tau_1 \ldots d\tau_{s-1} dt =$$

$$= (s-1)! 2^{(s-1/p')(i-1)} |I_{s,j}|^s ,$$

а если $s = 1$ и $j \geq i$, то

$$\int\limits_{I_{1,j}} \Delta^{0}_{|I_{1,j}|} \xi_{1,p,i} dt = 2^{(1-1/p')(i-1)} |I_{1,j}| .$$

Поэтому, обозначая через $e^i_{s,p} := \left(e^i_{s,p,1}, \ldots, e^i_{s,p,N}\right)$, $i = 1, \ldots, N$, векторы из $\mathbb{R}^N$ такие, что

$$e^i_{s,p,j} := \begin{cases} 0, & j < i; \\ 2^{-(s-1/p')(j-i)}, & j \geq i, \end{cases}$$

получаем

$$A^N_{s,p} \xi_{s,p,i} = ((s-1)p + 1)^{1/p} (s-1)! s^{-s+1/p'} 2^{-s+1/p'} e^i_{s,p}, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Тогда, полагая $E^N_{s,p} := \left\{e^i_{s,p}\right\}^N_{i=1}$ и обозначая через $S^+_1\left(E^N_{s,p}\right)$ положительный 1-сектор по этой системе, имеем

$$d_n \left(S^+_1 \left(A^N_{s,p} \Xi^N_{s,p}\right)\right)^{\mathrm{kol}}_{l^N_\infty} =$$

$$= ((s-1)p + 1)^{1/p} (s-1)! s^{-s+1/p'} 2^{-s+1/p'} d_n \left(S^+_1 \left(E^N_{s,p}\right)\right)^{\mathrm{kol}}_{l^N_\infty} . \tag{2.15}$$

Оценим снизу поперечник $d_n \left(S^+_1 \left(E^N_{s,p}\right)\right)^{\mathrm{kol}}_{l^N_\infty}$. Для этого рассмотрим линейный оператор

$$T^N_{s,p} : \mathbb{R}^N \ni y = (y_1, \ldots, y_N) \to x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N,$$

который определяется следующим образом:

$$x_1 := y_1, \quad x_i := y_i - 2^{-s+1/p'} y_{i-1}, \quad i = 2, \ldots, N.$$

Ясно, что обратный к нему оператор $\left(T^N_{s,p}\right)^{-1}$ определяется равенствами

$$y_i = \sum_{j=1}^{i} 2^{-(s-1/p')(i-j)} x_i, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Пусть $E_0^N := \left\{e_0^i\right\}_{i=1}^N$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^N$ из векторов $e_0^i := \left(e_{0,1}^i, \ldots, e_{0,N}^i\right)$ таких, что

$$e_{0,j}^i := \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Легко проверить, что $T_{s,p}^N e_{s,p}^i = e_0^i$, $i = 1, \ldots, N$. Поэтому

$$T_{s,p}^N S_1^+ \left(E_{s,p}^N\right) = S_1^+ \left(E_0^N\right),$$

где $E_0^N := \{e_0^i\}_{i=1}^N$.

Рассмотрим пространство $T_{s,p}^N l_\infty^N$ векторов $x = (x_1, \ldots, x_N)$, оснащенное нормой

$$\|x\|_{T_{s,p}^N l_\infty^N} := \max_{1 \le i \le N} \left| \sum_{j=1}^{i} 2^{-(s-1/p')(i-j)} x_i \right|.$$

Учитывая, что единичный шар из $T_{s,p}^N l_\infty^N$ содержится в кубе $\left(1 + 2^{-s+1/p'}\right) B_\infty^N$, получаем

$$d_n \left(S_1^+ \left(E_{s,p}^N\right)\right)_{l_\infty^N}^{\text{kol}} = d_n \left(S_1^+ \left(E_0^N\right)\right)_{T_{s,p}^N l_\infty^N}^{\text{kol}} \ge$$

$$\ge \left(1 + 2^{-s+1/p'}\right)^{-1} d_n \left(S_1^+ \left(E_0^N\right)\right)_{l_\infty^N}^{\text{kol}}. \tag{2.16}$$

Ясно, что множество $S_1^+ \left(E_0^N\right)$ — это симплекс с вершинами $e_0^0 := (0, \ldots, 0)$ и e_0^i, $i = 1, \ldots, N$. Тогда очевидно, что

$$d_n \left(S_1^+ \left(E_0^N\right)\right)_{l_\infty^N}^{\text{kol}} \ge d_{n+1} \left(B_1^N\right)_{l_\infty^N}^{\text{kol}}. \tag{2.17}$$

Объединяя соотношения (2.13)–(2.17), получаем

$$d_n \left(S_p^+ \left(\Xi_{s,p}^N\right)\right)_{L_p}^{\text{kol}} \ge c d_{n+1} \left(B_1^N\right)_{l_\infty^N}^{\text{kol}},$$

где $c = ((s-1)p+1)^{1/p}(s-1)! s^{-s+1/p'} 2^{-s+1/p'} \left(1 + 2^{-s+1/p'}\right)^{-1}$.

Таким образом, лемма 5 доказана.

3. Доказательство теоремы. Сначала докажем оценки сверху в (1.1). Пусть $x \in \Delta_+^s B_p(I)$, $s \ge 3$ и $1 \le q < p \le \infty$. Если $n = 1, \ldots, 3s+1$, то полагаем

$$\sigma_{s,n}(t; x; I) \equiv 0, \quad t \in I.$$

Очевидно, что $\sigma_{s,n}(\cdot; x; I) \in \Delta_+^s B_p(I)$. Кроме того, из неравенства Гельдера следует оценка

$$\|x(\cdot) - \sigma_{s,n}(\cdot; x; I)\|_{L_q(I)} \le 2^{1/q-1/p}, \qquad 1 \le n \le 3s+1, \quad 1 \le q < p \le \infty.$$

Тогда ясно, что

$$d_n \left(\Delta_+^s B_p, \Delta_+^s L_q\right)_{L_q} \le 2^{1/q-1/p}, \qquad 1 \le n \le 3s+1, \quad 1 \le q < p \le \infty. \tag{3.1}$$

Теперь рассмотрим случай $n > 3s+1$. В этом случае доказательство оценки сверху в (1.1) уже не является тривиальным. Основная идея доказательства состоит в том, чтобы свести вопрос об оценке приближения к некоторой экстремальной задаче в пространстве $\mathbb{R}^m$, а затем применить лемму 4 для оценки решения этой задачи. Приближение функций $x \in \Delta_+^s B_p(I)$ будем осуществлять полиномиальными сплайнами $\sigma_{s,n}(\cdot; x) \in \Delta_+^s L_q(I)$ порядка s с $2n-1$ фиксированными узлами, где $n \geq 3s+2$.

Зафиксировав число

$$\beta := \beta(s,p,q) \geq 1 + (s+3)(1/q - 1/p)^{-1}, \tag{3.2}$$

положим

$$t_{n,i}^{(\beta)} := \begin{cases} 1 - ((n-i)/n)^\beta, & i = 0, 1, \ldots, n; \\ -1 + ((n+i)/n)^\beta, & i = -1, \ldots, -n. \end{cases}$$

Точки $t_{n,i}^{(\beta)}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, задают разбиение промежутка $I_+ := [0,1)$ на n промежутков $I_{n,i}^{(\beta)} := \left[t_{n,i-1}^{(\beta)}, t_{n,i}^{(\beta)}\right)$, $i = 1, \ldots, n$, а точки $t_{n,i}^{(\beta)}$, $i = 0, -1, \ldots, -n$, разбивают промежуток $I_- := (-1, 0]$ на n промежутков $I_{n,i}^{(\beta)} := \left(t_{n,i}^{(\beta)}, t_{n,i+1}^{(\beta)}\right]$, $i = -1, \ldots, -n$.

Вначале вместо функций $x \in \Delta_+^s B_p(I)$ будем рассматривать функции

$$\tilde{x}(t) := x(t) - \pi_{s-1}(t; x), \quad t \in I,$$

где

$$\pi_{s-1}(t; x) := \sum_{k=0}^{s-1} x^{(k)}(0) t^k / (k!), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

Отметим, что $\tilde{x} \in \Delta_+^s L_p(I)$. При этом из леммы 3 следует

$$\|\tilde{x}(\cdot)\|_{L_p(I)} \leq \tilde{c} \|x(\cdot)\|_{L_p(I)}, \tag{3.4}$$

где $\tilde{c} = \tilde{c}(s,p)$. Кроме того, для функции $\tilde{x}$ справедливы равенства

$$\tilde{x}^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, s-1. \tag{3.5}$$

Ясно также, что $\tilde{x}^{(k)}(t) \geq 0$, $k = 0, 1, \ldots, s-1$, для $t \in I_+$, а если $t \in I_-$, то $(-1)^{s-k} \tilde{x}^{(k)}(t) \geq 0$, $k = 0, 1, \ldots, s-1$. Очевидно, что производная $\tilde{x}^{(s-1)}$ является неубывающей функцией на интервале I.

На каждом из промежутков $I_{n,i}^{(\beta)}$, $-n+1 \leq i \leq n-1$, определим линейные функции, положив

$$\sigma_2\left(t; \tilde{x}^{(s-2)}; I_{n,i}^{(\beta)}\right) :=$$

$$:= \left(\tilde{x}^{(s-2)}\left(t_{n,i-1}^{(\beta)}\right)\left(t_{n,i}^{(\beta)} - t\right) + \tilde{x}^{(s-2)}\left(t_{n,i}^{(\beta)}\right)\left(t - t_{n,i-1}^{(\beta)}\right)\right)\left|I_{n,i}^{(\beta)}\right|^{-1}$$

при $i = 1, \ldots, n-1$ и

$$\sigma_2\left(t;\tilde{x}^{(s-2)};I_{n,i}^{(\beta)}\right):=$$

$$:=\left(\tilde{x}^{(s-2)}\left(t_{n,i}^{(\beta)}\right)\left(t_{n,i+1}^{(\beta)}-t\right)+\tilde{x}^{(s-2)}\left(t_{n,i+1}^{(\beta)}\right)\left(t-t_{n,i}^{(\beta)}\right)\right)\left|I_{n,i}^{(\beta)}\right|^{-1}$$

при $i=-1,\ldots,-n+1$. Если же $i=\pm n$, то полагаем

$$\sigma_2\left(t;\tilde{x}^{(s-2)};I_{n,\pm n}^{(\beta)}\right):=\sigma_2\left(t;\tilde{x}^{(s-2)};I_{n,\pm(n-1)}^{(\beta)}\right),\quad t\in I_{\pm n}.$$

Полагая

$$\sigma_{2,\beta,n}\left(t;\tilde{x}^{(s-2)};I\right):=\sigma_2\left(t;\tilde{x}^{(s-2)};I_{n,i}^{(\beta)}\right),\qquad t\in I_{n,i}^{(\beta)},\quad i=\pm1,\ldots,\pm n,$$

определяем на всем интервале I кусочно-линейную функцию, которая интерполирует производную $\tilde{x}^{(s-2)}$ в точках $t_{n,i}^{(\beta)}$, $i=0,\pm1,\ldots,\pm(n-1)$. А так как производная $\tilde{x}^{(s-2)}$ выпукла на I, то и функция $\sigma_{2,\beta,n}\left(\cdot;\tilde{x}^{(s-2)};I\right)$ также является выпуклой на всем интервале I.

Теперь можем определить на I полиномиальный сплайн

$$\sigma_{s,\beta,n}(t;\tilde{x};I):=\frac{1}{(s-3)!}\int\limits_0^t\sigma_{2,\beta,n}\left(\tau;\tilde{x}^{(s-2)};I\right)(t-\tau)^{s-3}d\tau,\quad t\in I,$$

порядка s с узлами $t_{n,i}^{(\beta)}$, $i=0,\pm1,\ldots,\pm(n-1)$. При этом ясно, что $\sigma_{s,\beta,n}(\cdot;\tilde{x};I)\in$ $\in\Delta_+^sL_q(I)$.

Будем оценивать уклонение сплайна $\sigma_{s,\beta,n}(\cdot;\tilde{x};I)$ от функции $\tilde{x}(\cdot)$ по норме пространства $L_q(I)$. При этом ограничимся промежутком I_+, так как для промежутка I_- рассуждения аналогичны. Для упрощения записей далее будем писать t_i и I_i вместо соответственно $t_{n,i}^{(\beta)}$ и $I_{n,i}^{(\beta)}$, а также $\sigma_{s,n}(\cdot;\tilde{x};I)$ вместо $\sigma_{s,\beta,n}(\cdot;\tilde{x};I)$.

Из формулы Тейлора и способа определения сплайна $\sigma_{s,n}(\cdot;\tilde{x};I)$ следует

$$\tilde{x}(t)-\sigma_{s,n}(t;\tilde{x};I)=\frac{1}{(s-3)!}\int\limits_0^t\left(\tilde{x}^{(s-2)}(\tau)-\sigma_{s,n}^{(s-2)}(\tau;\tilde{x};I)\right)(t-\tau)^{s-3}d\tau=$$

$$=\frac{1}{(s-3)!}\int\limits_0^t\left(\tilde{x}^{(s-2)}(\tau)-\sigma_{2,n}\left(\tau;\tilde{x}^{(s-2)};I\right)\right)(t-\tau)^{s-3}d\tau.$$

Тогда

$$\|\tilde{x}(\cdot)-\sigma_{s,n}(\cdot;\tilde{x};I)\|_{L_q(I_+)}\le$$

$$\le\frac{1}{(s-3)!}\left(\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^t\left|\tilde{x}^{(s-2)}(\tau)-\sigma_{2,n}\left(\tau;\tilde{x}^{(s-2)};I\right)\right|(t-\tau)^{s-3}d\tau\right)^q dt\right)^{1/q}. \tag{3.6}$$

С учетом того, что

$$\int_0^1 \left(\int_0^t \left| \tilde{x}^{(s-2)}(\tau) - \sigma_{2,n}\left(\tau; \tilde{x}^{(s-2)}; I\right) \right| (t-\tau)^{s-3} d\tau \right)^q dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{I_i} \left(\int_0^t \left| \tilde{x}^{(s-2)}(\tau) - \sigma_{2,n}\left(\tau; \tilde{x}^{(s-2)}; I\right) \right| (t-\tau)^{s-3} d\tau \right)^q dt, \qquad (3.7)$$

оценим интегралы, стоящие под знаком суммы в правой части последнего равенства. В случае $1 \le i \le n-1$ имеем

$$\int_{I_i} \left(\int_0^t \left| \tilde{x}^{(s-2)}(\tau) - \sigma_{2,n}\left(\tau; \tilde{x}^{(s-2)}; I\right) \right| (t-\tau)^{s-3} d\tau \right)^q dt \le$$

$$\le \int_{I_i} \left(\int_0^{t_i} \left| \tilde{x}^{(s-2)}(\tau) - \sigma_{2,n}\left(\tau; \tilde{x}^{(s-2)}; I\right) \right| (t_i-\tau)^{s-3} d\tau \right)^q dt =$$

$$= |I_i| \left(\int_0^{t_i} \left| \tilde{x}^{(s-2)}(\tau) - \sigma_{2,n}\left(\tau; \tilde{x}^{(s-2)}; I\right) \right| (t_i-\tau)^{s-3} d\tau \right)^q. \qquad (3.8)$$

Если же $t \in I_n$, то, учитывая очевидное равенство

$$\int_0^t \left| \tilde{x}^{(s-2)}(\tau) - \sigma_{2,n}\left(\tau; \tilde{x}^{(s-2)}; I\right) \right| (t-\tau)^{s-3} d\tau =$$

$$= \int_0^{t_{n-1}} \left| \tilde{x}^{(s-2)}(\tau) - \sigma_{2,n}\left(\tau; \tilde{x}^{(s-2)}; I\right) \right| (t-\tau)^{s-3} d\tau +$$

$$+ \int_{t_{n-1}}^t \left| \tilde{x}^{(s-2)}(\tau) - \sigma_{2,n}\left(\tau; \tilde{x}^{(s-2)}; I\right) \right| (t-\tau)^{s-3} d\tau \qquad (3.9)$$

и известное числовое неравенство $|a| + |b| \le 2^{1-1/q}(|a|^q + |b|^q)^{1/q}$, получаем

$$\int_{I_n} \left(\int_0^t \left| \tilde{x}^{(s-2)}(\tau) - \sigma_{2,n}\left(\tau; \tilde{x}^{(s-2)}; I\right) \right| (t-\tau)^{s-3} d\tau \right)^q dt \le$$

$$\le 2^{q-1} |I_n| \left(\int_0^{t_{n-1}} \left| \tilde{x}^{(s-2)}(\tau) - \sigma_{2,n}\left(\tau; \tilde{x}^{(s-2)}; I\right) \right| (t_{n-1}-\tau)^{s-3} d\tau \right)^q +$$

$$+ 2^{q-1} \int\limits_{I_n} \left(\int\limits_{t_{n-1}}^{t} \left| \tilde{x}^{(s-2)}(\tau) - \sigma_{2,n}\left(\tau; \tilde{x}^{(s-2)}; I\right) \right| (t-\tau)^{s-3} d\tau \right)^q dt. \qquad (3.10)$$

Ясно, что если $1 \le i \le n-1$, то

$$\int\limits_{0}^{t_i} \left| \tilde{x}^{(s-2)}(\tau) - \sigma_{2,n}(\tau; \tilde{x}^{(s-2)}; I) \right| (t_i - \tau)^{s-3} d\tau =$$

$$= \sum_{j=1}^{i} \int\limits_{I_j} \left| \tilde{x}^{(s-2)}(\tau) - \sigma_{2,n}\left(\tau; \tilde{x}^{(s-2)}; I\right) \right| (t_i - \tau)^{s-3} d\tau =$$

$$= \sum_{j=1}^{i} \int\limits_{I_j} \left| \tilde{x}^{(s-2)}(\tau) - \sigma_{2}\left(\tau; \tilde{x}^{(s-2)}; I_j\right) \right| (t_i - \tau)^{s-3} d\tau. \qquad (3.11)$$

Кроме того, если $1 \le j \le i \le n-1$, то ясно, что

$$\int\limits_{I_j} \left| \tilde{x}^{(s-2)}(\tau) - \sigma_{2}\left(\tau; \tilde{x}^{(s-2)}; I_j\right) \right| (t_i - \tau)^{s-3} d\tau \le$$

$$\le \int\limits_{I_j} \left| \tilde{x}^{(s-2)}(\tau) - \sigma_{2}\left(\tau; \tilde{x}^{(s-2)}; I_j\right) \right| (t_i - t_{j-1})^{s-3} d\tau \le$$

$$\le |I_j| \left(\sum_{k=j}^{i} |I_k| \right)^{s-3} \left\| \tilde{x}^{(s-2)}(\cdot) - \sigma_2\left(\cdot; \tilde{x}^{(s-2)}; I_j\right) \right\|_{L_\infty(I_j)}. \qquad (3.12)$$

Теперь надо оценить уклонения линейных функций $\sigma_2\left(\cdot; \tilde{x}^{(s-2)}; I_j\right)$ от $\tilde{x}^{(s-2)}(\cdot)$ на соответствующих промежутках I_j. Если $t \in I_j$ и $1 \le j \le i \le n-1$, то

$$\tilde{x}^{(s-2)}(t) - \sigma_{2,n}\left(t; \tilde{x}^{(s-2)}; I_j\right) = \left(\tilde{x}^{(s-2)}(t) - \tilde{x}^{(s-2)}(t_{j-1}) \right) (t_j - t) \left|I_j\right|^{-1} +$$

$$+ \left(\tilde{x}^{(s-2)}(t) - \tilde{x}^{(s-2)}(t_j) \right) (t - t_{j-1}) \left|I_j\right|^{-1} =$$

$$= \int\limits_{t_{j-1}}^{t} \tilde{x}^{(s-1)}(\tau) d\tau (t_j - t) \left|I_j\right|^{-1} + \int\limits_{t_j}^{t} \tilde{x}^{(s-1)}(\tau) d\tau (t - t_{j-1}) \left|I_j\right|^{-1}. \qquad (3.13)$$

При этом очевидно, что

$$\int\limits_{t_{j-1}}^{t} \tilde{x}^{(s-1)}(\tau)\, d\tau = \int\limits_{t_{j-1}}^{t} \left(\tilde{x}^{(s-1)}(\tau) - \tilde{x}^{(s-1)}(t_{j-1}) \right) d\tau + \tilde{x}^{(s-1)}(t_{j-1})(t - t_{j-1})$$

и

$$\int_{t_j}^{t} \tilde{x}^{(s-1)}(\tau)\,d\tau = \int_{t_j}^{t} \left(\tilde{x}^{(s-1)}(\tau) - \tilde{x}^{(s-1)}(t_{j-1})\right) d\tau - \tilde{x}^{(s-1)}(t_{j-1})(t_j - t).$$

Тогда

$$\int_{t_{j-1}}^{t} \tilde{x}^{(s-1)}(\tau)d\tau(t_j - t) + \int_{t_j}^{t} \tilde{x}^{(s-1)}(\tau)d\tau(t - t_{j-1}) =$$

$$= \int_{t_{j-1}}^{t} \left(\tilde{x}^{(s-1)}(\tau) - \tilde{x}^{(s-1)}(t_{j-1})\right) d\tau(t_j - t) +$$

$$+ \int_{t_j}^{t} \left(\tilde{x}^{(s-1)}(\tau) - \tilde{x}^{(s-1)}(t_{j-1})\right) d\tau(t - t_{j-1}). \tag{3.14}$$

Из (3.13) и (3.14) следует, что при $1 \leq j \leq i \leq n-1$ справедливы оценки

$$\left\|\tilde{x}^{(s-2)}(\cdot) - \sigma_2\left(\cdot; \tilde{x}^{(s-2)}; I_j\right)\right\|_{L_\infty(I_j)} \leq |I_j|\,\omega\left(\tilde{x}^{(s-1)}; I_j\right), \tag{3.15}$$

где

$$\omega\left(\tilde{x}^{(s-1)}; I_j\right) := \tilde{x}^{(s-1)}(t_j) - \tilde{x}^{(s-1)}(t_{j-1}), \quad j = 1, \ldots, n-1. \tag{3.16}$$

Если же $j = n$, то при всех $t \in I_n$ имеем

$$\left|\tilde{x}^{(s-2)}(t) - \sigma_{2,n}\left(t; \tilde{x}^{(s-2)}; I\right)\right| \leq \tilde{x}^{(s-2)}(t).$$

Эта оценка следует из того, что на промежутке I_n график функции $\sigma_2(\cdot; \tilde{x}^{(s-2)}; I_n)$ расположен не выше графика функции $\tilde{x}^{(s-2)}(\cdot)$. Тогда из этой оценки, а также из формулы Тейлора и неравенства Гельдера следует

$$\int_{I_n} \left(\int_{t_{n-1}}^{t} \left|\tilde{x}^{(s-2)}(\tau) - \sigma_{2,n}\left(\tau; \tilde{x}^{(s-2)}; I\right)\right| (t-\tau)^{s-3} d\tau\right)^q dt \leq$$

$$\leq \int_{I_n} \left(\int_0^t \tilde{x}^{(s-2)}(\tau)(t-\tau)^{s-3} d\tau\right)^q dt =$$

$$= \int_{I_n} (\tilde{x}(t))^q\,dt \leq |I_n|^{1-q/p}\,\|\tilde{x}(\cdot)\|^q_{L_p(I_+)}.$$

Отметим, что здесь использовано и неравенство $\tilde{x}^{(s-2)}(t) \geq 0$, $t \in I_+$. Воспользовавшись соотношениями (3.8), (3.11), (3.12) и (3.15), получим

$$\sum_{i=1}^{n-1}\int_{I_i}\left(\int_0^t\left|\tilde{x}^{(s-2)}(\tau)-\sigma_{2,n}\left(\tau;\tilde{x}^{(s-2)};I\right)\right|(t-\tau)^{s-3}d\tau\right)^q dt\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{n-1}|I_i|\left(\sum_{j=1}^{i}|I_j|^2\left(\sum_{k=j}^{i}|I_k|\right)^{s-3}\omega\left(\tilde{x}^{(s-1)};I_j\right)\right)^q, \tag{3.17}$$

где $\omega\left(\tilde{x}^{(s-1)};I_j\right)$ определены согласно (3.16). Кроме того, используя соотношения (3.9)–(3.12) и (3.15), имеем

$$\int_{I_n}\left(\int_0^t\left|\tilde{x}^{(s-2)}(\tau)-\sigma_{2,n}\left(\tau;\tilde{x}^{(s-2)};I\right)\right|(t-\tau)^{s-3}d\tau\right)^q dt\le$$

$$\le 2^{q-1}|I_n|\left(\sum_{j=1}^{n-1}|I_j|^2\left(\sum_{k=j}^{n-1}|I_k|\right)^{s-3}\omega\left(\tilde{x}^{(s-1)};I_j\right)\right)^q+$$

$$+2^{q-1}|I_n|^{1-q/p}\|x(\cdot)\|^q_{L_p(I_+)}\le$$

$$\le 2^{q-1}|I_{n-1}|\left(\sum_{j=1}^{n-1}|I_j|^2\left(\sum_{k=j}^{n-1}|I_k|\right)^{s-3}\omega\left(\tilde{x}^{(s-1)};I_j\right)\right)^q+$$

$$+2^{q-1}|I_n|^{1-q/p}\|\tilde{x}(\cdot)\|^q_{L_p(I_+)}. \tag{3.18}$$

Здесь использовано также очевидное неравенство $|I_n|<|I_{n-1}|$. Тогда из (3.6), (3.7), (3.17) и (3.18) следует оценка

$$\|\tilde{x}(\cdot)-\sigma_{s,n}(\cdot;\tilde{x};I)\|_{L_q(I_+)}\le$$

$$\le\hat{c}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(|I_i|^{1/q}\sum_{j=1}^{i}|I_j|^2\left(\sum_{k=j}^{i}|I_k|\right)^{s-3}\omega\left(\tilde{x}^{(s-1)};I_j\right)\right)^q\right)^{1/q}+$$

$$+\hat{c}|I_n|^{1/q-1/p}\|\tilde{x}(\cdot)\|_{L_p(I_+)}, \tag{3.19}$$

где $\hat{c}:=((s-3)!)^{-1}(1+2^{q-1})^{1/q}$.

Ясно, что если $\|\tilde{x}(\cdot)\|_{L_p(I_+)}=0$, то из полученной оценки следует равенство

$$\|\tilde{x}(\cdot)-\sigma_{s,n}(\cdot;\tilde{x};I)\|_{L_q(I_+)}=0. \tag{3.20}$$

Поэтому далее будем рассматривать лишь случай, когда $\|\tilde{x}(\cdot)\|_{L_p(I_+)}>0$.

В этом случае оценим $\|\tilde{x}(\cdot)\|_{L_p(I_+)}$ снизу. Очевидно, что

$$\|\tilde{x}(\cdot)\|_{L_p(I_+)} \geq \left(\sum_{i=2}^{n} \|\tilde{x}(\cdot)\|^p_{L_p(I_i)}\right)^{1/p}. \tag{3.21}$$

Обозначим теперь через

$$\pi_{s-1}(t; \tilde{x}; I_i) := \sum_{k=0}^{s-1} \tilde{x}^{(k)}(t_{i-1})(t - t_{i-1})^k/(k!), \qquad i = 1, \ldots, n, \quad t \in I,$$

многочлены Тейлора степени $s-1$ для функции $\tilde{x}$, построенные относительно точек t_{i-1}, $i = 1, \ldots, n$. Учитывая, что из (3.5) следует тождество $\pi_{s-1}(t; \tilde{x}; I_1) \equiv 0$, $t \in I_+$, представим функцию $\tilde{x}$ на каждом из интервалов I_i, $i = 2, \ldots, n$, в виде

$$\tilde{x}(t) = (\tilde{x}(t) - \pi_{s-1}(t; \tilde{x}; I_i)) + \sum_{j=2}^{i} (\pi_{s-1}(t; \tilde{x}; I_j) - \pi_{s-1}(t; \tilde{x}; I_{j-1})).$$

Используя формулу Тейлора, имеем

$$\tilde{x}(t) - \pi_{s-1}(t; \tilde{x}; I_i)) = \frac{1}{(s-2)!} \int\limits_{t_{i-1}}^{t} \left(\tilde{x}^{(s-1)}(\tau) - \tilde{x}^{(s-1)}(t_{i-1})\right)(t-\tau)^{s-2} d\tau.$$

Тогда из монотонности производной $\tilde{x}^{(s-1)}$ следует

$$\tilde{x}(t) - \pi_{s-1}(t; \tilde{x}; I_i)) \geq 0, \qquad t \in I_i, \quad i = 2, \ldots, n.$$

Поэтому

$$\tilde{x}(t) \geq \sum_{j=2}^{i} (\pi_{s-1}(t; \tilde{x}; I_j) - \pi_{s-1}(t; \tilde{x}; I_{j-1})), \qquad t \in I_i, \quad i = 2, \ldots, n. \tag{3.22}$$

Очевидно, что

$$\pi_{s-1}(t; \tilde{x}; I_j) - \pi_{s-1}(t; \tilde{x}; I_{j-1}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{s-1} \left(\tilde{x}^{(k)}(t_{j-1}) - \pi_{s-1-k}\left(t_{j-1}; \tilde{x}^{(k)}; I_{j-1}\right)\right) \frac{(t - t_{j-1})^k}{k!}.$$

Если $k \leq s-2$, то, вновь используя формулу Тейлора, имеем

$$\tilde{x}^{(k)}(t_{j-1}) - \pi_{s-1-k}\left(t_{j-1}; \tilde{x}^{(k)}; I_{j-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{(s-2-k)!} \int\limits_{t_{j-2}}^{t_{j-1}} \left(x^{(s-1)}(\tau) - x^{(s-1)}(t_{j-2})\right)(t-\tau)^{s-2-k} d\tau.$$

Тогда из монотонности производной $x^{(s-1)}$ следует

$$\left(\tilde{x}^{(k)}(t_{j-1}) - \pi_{s-1-k}\left(t_{j-1}; \tilde{x}^{(k)}; I_{j-1}\right)\right) \frac{(t-t_{j-1})^k}{k!} \geq 0, \quad t \in I_i.$$

Поэтому при $2 \leq j \leq i \leq n$ будут выполняться неравенства

$$\pi_{s-1}(t; \tilde{x}; I_j) - \pi_{s-1}(t; \tilde{x}; I_{j-1}) \geq \frac{(t-t_{j-1})^{s-1}}{(s-1)!} \omega\left(\tilde{x}^{(s-1)}; I_{j-1}\right), \quad t \in I_i, \quad (3.23)$$

где величины $\omega\left(\tilde{x}^{(s-1)}; I_{j-1}\right)$ определены согласно (3.16).

Положив $\bar{t}_i := (t_{i-1} + t_i)/2$, отметим, что при $2 \leq j \leq i \leq n$ будут выполняться и неравенства

$$t - t_{j-1} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=j}^{i} |I_k|, \quad t \in [\bar{t}_i, t_i).$$

Поэтому из (3.22) и (3.23) следует, что при всех $i = 2, \ldots, n$ имеют место неравенства

$$\tilde{x}(t) \geq \frac{1}{2^{s-1}(s-1)!} \sum_{j=2}^{i} \left(\sum_{k=j}^{i} |I_k|\right)^{s-1} \omega\left(\tilde{x}^{(s-1)}; I_{j-1}\right), \quad t \in [\bar{t}_i, t_i). \quad (3.24)$$

А так как $\|\tilde{x}(\cdot)\|_{L_p(I_i)} \geq \|\tilde{x}(\cdot)\|_{L_p([\bar{t}_i, t_i))}$, то из (3.21) и (3.24) следует

$$\|\tilde{x}(\cdot)\|_{L_p(I_+)} \geq \check{c} \left(\sum_{i=2}^{n} \left(|I_i|^{1/p} \sum_{j=2}^{i} \left(\sum_{k=j}^{i} |I_k|\right)^{s-1} \omega\left(\tilde{x}^{(s-1)}; I_{j-1}\right)\right)^p\right)^{1/p},$$

где $\check{c} := 2^{-s+1}((s-1)!)^{-1}$. Учитывая, что $\|\tilde{x}(\cdot)\|_{L_p(I_+)} > 0$, имеем

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} \left(\check{c} \|\tilde{x}(\cdot)\|_{L_p(I_+)}^{-1} |I_{i+1}|^{1/p} \sum_{j=1}^{i} \left(\sum_{k=j}^{i} |I_{k+1}|\right)^{s-1} \omega\left(\tilde{x}^{(s-1)}; I_j\right)\right)^p\right)^{1/p} \leq 1. \tag{3.25}$$

Благодаря оценкам (3.19) и (3.25), задача о формосохраняющем приближении функций $\tilde{x}(\cdot)$ сплайнами $\sigma_{s,n}(\cdot; \tilde{x}; I)$ на промежутке I_+ сведена к экстремальной задаче в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$. Теперь достаточно оценить правую часть неравенства (3.19) при наличии ограничений вида (3.25). Но прежде чем применить лемму 4, несколько упростим эту задачу.

Учитывая, что $|I_1| \geq |I_2| \geq \ldots \geq |I_n|$, получаем

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} \left(|I_i|^{1/q} \sum_{j=1}^{i} |I_j|^2 \left(\sum_{k=j}^{i} |I_k|\right)^{s-3} \omega\left(\tilde{x}^{(s-1)}; I_j\right)\right)^q\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{i} |I_j|^{2+1/q} \left(\sum_{k=j}^{i} |I_k| \right)^{s-3} \omega\left(\tilde{x}^{(s-1)}; I_j\right) \right)^q \right)^{1/q} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{n-1} |I_j|^{2+1/q} \left(\sum_{k=j}^{n} |I_k| \right)^{s-3} \omega\left(\tilde{x}^{(s-1)}; I_j\right) \right)^q \right)^{1/q} =$$

$$= (n-1)^{1/q} \sum_{i=1}^{n-1} |I_i|^{2+1/q} \left(\sum_{j=i}^{n} |I_j| \right)^{s-3} \omega\left(\tilde{x}^{(s-1)}; I_i\right). \tag{3.26}$$

Очевидно, что

$$\left(\sum_{k=j}^{i} |I_{k+1}| \right)^{s-1} \geq (i-j+1)^{s-1} |I_{i+1}|^{s-1}, \quad 1 \leq j \leq i \leq n-1. \tag{3.27}$$

Ясно, что существуют $\acute{c} = \acute{c}(s) > 0$ и $\grave{c} = \grave{c}(s) > 0$ такие, что

$$\acute{c}\nu_s(k) \leq k^{s-1} \leq \grave{c}\nu_s(k), \quad k \geq 1. \tag{3.28}$$

Поэтому из (3.27) и (3.28) следует неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} \left(\breve{c} \, \|\tilde{x}(\cdot)\|_{L_p(I_+)}^{-1} |I_{i+1}|^{1/p} \sum_{j=1}^{i} \left(\sum_{k=j}^{i} |I_{k+1}| \right)^{s-1} \omega\left(\tilde{x}^{(s-1)}; I_j\right) \right)^p \right)^{1/p} \geq$$

$$\geq \left(\sum_{i=1}^{n-1} \left(\bar{c} \, \|\tilde{x}(\cdot)\|_{L_p(I_+)}^{-1} |I_{i+1}|^{s-1/p'} \sum_{j=1}^{i} \nu_s(i-j+1) \omega\left(\tilde{x}^{(s-1)}; I_j\right) \right)^p \right)^{1/p}, \tag{3.29}$$

где $\bar{c} = \bar{c}(s)$.

Нетрудно также проверить, что существуют $c_1 = c_1(\beta)$ и $c_2 = c_2(\beta)$ такие, что

$$c_1 n^{-\beta}(n-i+1)^{\beta-1} \leq |I_{n,i}| \leq c_2 n^{-\beta}(n-i+1)^{\beta-1}, \quad i = 1, \ldots n.$$

Тогда существуют $c^* = c^*(\beta, s, q)$ и $c_* = c_*(\beta, s, p)$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{n-1} |I_i|^{2+1/q} \left(\sum_{j=i}^{n} |I_j| \right)^{s-3} \omega\left(\tilde{x}^{(s-1)}; I_i\right) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n-1} c^* \left((n-i)^{\beta-1}/n^\beta \right)^{2+1/q} \left((n-i)^\beta/n^\beta \right)^{s-3} \omega\left(\tilde{x}^{(s-1)}; I_i\right), \tag{3.30}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(\bar c\,\|\tilde x(\cdot)\|_{L_p(I_+)}^{-1}\,|I_{i+1}|^{s-1/p'}\sum_{j=1}^{i}\nu_s(i-j+1)\omega\left(\tilde x^{(s-1)};I_j\right)\right)^p\right)^{1/p}\ge$$

$$\ge\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(c_*\,\|\tilde x(\cdot)\|_{L_p(I_+)}^{-1}\left((n-i)^{\beta-1}/n^{\beta}\right)^{s-1/p'}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\sum_{j=1}^{i}\nu_s(i-j+1)\omega\left(\tilde x^{(s-1)};I_j\right)\right)^p\right)^{1/p}. \qquad (3.31)$$

Положив $a:=(a_1,\ldots,a_{n-1})$, $b:=(b_1,\ldots,b_{n-1})$ и $\omega:=(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1})$, где

$$a_i:=c^*n^{-\beta(s-1/q')}(n-i)^{\beta(s-1/q')-2-1/q},\quad i=1,\ldots,n-1, \qquad (3.32)$$

$$b_i:=c_*\,\|\tilde x(\cdot)\|_{L_p(I_+)}^{-1}\,n^{-\beta(s-1/p')}(n-i)^{(\beta-1)(s-1/p')},\quad i=1,\ldots,n-1, \qquad (3.33)$$

$$\omega_i:=\omega\left(\tilde x^{(s-1)};I_i\right),\quad i=1,\ldots,n-1, \qquad (3.34)$$

оценим сверху максимум линейной функции

$$f_{n-1}(\omega;a):=\sum_{i=1}^{n-1}a_i\omega_i,\quad \omega\in\mathbb{R}^{n-1},$$

на множестве

$$\Omega_{s,p}^{n-1}(b):=\left\{\omega_i\ge 0, i=1,\ldots,n-1,\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(b_i\sum_{j=1}^{i}\nu_s(i-j+1)\omega_j\right)^p\right)^{1/p}\le 1\right\},$$

где a_i, b_i и ω_i определены согласно (3.32), (3.33) и (3.34). Полагая $a_i:=0$, $i=n,\ldots,n-1+s$, и применяя лемму 4 при $m=n-1$, получаем

$$\max_{\omega\in\Omega_{s,p}^{n-1}(b)}f_{n-1}(\omega;a)\le\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(\left|\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}a_{i+k}\right|b_i^{-1}\right)^{p'}\right)^{1/p'}\le$$

$$\le\left(\sum_{i=1}^{n-1-s}\left(\left|\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}a_{i+k}\right|b_i^{-1}\right)^{p'}\right)^{1/p'}+$$

$$+\left(\sum_{i=n-s}^{n-1}\left(\left|\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}a_{i+k}\right|b_i^{-1}\right)^{p'}\right)^{1/p'}. \qquad (3.35)$$

Обозначая через Δ_{-1}^{s} оператор s-й разности с шагом $h = -1$, а также учитывая определения величин a_i и b_i, имеем

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1-s}\left(\left|\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}a_{i+k}\right|b_i^{-1}\right)^{p'}\right)^{1/p'} =$$

$$= c^*(c_*)^{-1}\,\|\tilde{x}(\cdot)\|_{L_p(I_+)}\,n^{\beta/p-\beta/q}\times$$

$$\times\left(\sum_{i=1}^{n-1-s}\left(\left|\Delta_{-1}^{s}(n-i)^{\beta s-\beta/q'-2-1/q}\right|(n-i)^{\beta/p'-\beta s+s-1/p'}\right)^{p'}\right)^{1/p'} \tag{3.36}$$

и

$$\left(\sum_{i=n-s}^{n-1}\left(\left|\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}a_{i+k}\right|b_i^{-1}\right)^{p'}\right)^{1/p'} =$$

$$= c^*(c_*)^{-1}\,\|\tilde{x}(\cdot)\|_{L_p(I_+)}\,n^{\beta/p-\beta/q}\times$$

$$\times\left(\sum_{i=1}^{n-1-s}\left(\left|\Delta_{-1}^{s}(n-i)_{+}^{\beta s-\beta/q'-2-1/q}\right|(n-i)^{\beta/p'-\beta s+s-1/p'}\right)^{p'}\right)^{1/p'}. \tag{3.37}$$

Оценим теперь суммы в правых частях равенств (3.36) и (3.37) с учетом условия (3.2) для параметра $\beta = \beta(s,p,q)$. Если $i = 1,\ldots,n-1-s$, то очевидно, что

$$\left|\Delta_{-1}^{s}(n-i)^{\beta s-\beta/q'-2-1/q}\right| =$$

$$= \dot{c}\int_0^1\ldots\int_0^1(n-i-\tau_1-\ldots-\tau_s)^{\beta s-\beta/q'-2-1/q-s}d\tau_1\ldots d\tau_s \leq$$

$$\leq \dot{c}(n-i)^{\beta s-\beta/q'-2-1/q-s},$$

где $\dot{c} := \prod_{k=0}^{s-1}(\beta s-\beta/q'-2-1/q-k)$. Тогда

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1-s}\left(\left|\Delta_{-1}^{s}(n-i)^{\beta s-\beta/q'-2-1/q}\right|(n-i)^{\beta/p'-\beta s+s-1/p'}\right)^{p'}\right)^{1/p'} \leq$$

$$\leq \dot{c}\left(\sum_{i=1}^{n-1-s}(n-i)^{(\beta s-\beta/q'-2-1/q-s+\beta/p'-\beta s+s-1/p')p'}\right)^{1/p'} =$$

$$= \dot{c}\left(\sum_{i=1}^{n-1-s}(n-i)^{(\beta/q-\beta/p-2-1/q-1/p')p'}\right)^{1/p'} \leq$$

$$\leq c' n^{\beta/q-\beta/p-2-1/q-1/p'+1/p'} = c' n^{\beta/q-\beta/p-2-1/q}, \tag{3.38}$$

где $c' = c'(\beta, s, p, q)$. Если же $i = n-s, \dots, n-1$, то

$$\left| \Delta_{-1}^s (n-i)_+^{\beta s - \beta/q' - 2 - 1/q} \right| \leq 2^s (n-i)^{\beta s - \beta/q' - 2 - 1/q},$$

и тогда

$$\left(\sum_{i=n-s}^{n-1} \left(\left| \Delta_{-1}^s (n-i)_+^{\beta s - \beta/q' - 2 - 1/q} \right| (n-i)^{\beta/p' - \beta s + s - 1/p'} \right)^{p'} \right)^{1/p'} \leq$$

$$\leq 2^s \left(\sum_{i=n-s}^{n-1} (n-i)^{(\beta s - \beta/q' - 2 - 1/q + \beta/p' - \beta s + s - 1/p')p'} \right)^{1/p'} =$$

$$= 2^s \left(\sum_{i=n-s}^{n-1} (n-i)^{(\beta/q - \beta/p - 2 + s - 1/p')p'} \right)^{1/p'} \leq 2^s s^{\beta/q - \beta/p - 2 - 1/q + s}. \tag{3.39}$$

Объединяя оценки (3.35) – (3.39), получаем

$$\max_{\omega \in \Omega_{s,p}^{n-1}(b)} f_{n-1}(\omega; a) \leq c^* (c_*)^{-1} \|\tilde{x}(\cdot)\|_{L_p(I_+)} \left(c' n^{-2-1/q} + c'' n^{\beta/p - \beta/q} \right), \tag{3.40}$$

где $c'' := 2^s s^{\beta/q - \beta/p - 2 - 1/q + s}$. А так как $|I_n| = n^{-\beta}$, то из неравенств (3.19), (3.25), (3.26), (3.29) – (3.31) и (3.40) следует оценка

$$\|\tilde{x}(\cdot) - \sigma_{s,n}(\cdot; \tilde{x}; I_+)\|_{L_q(I_+)} \leq c \|\tilde{x}(\cdot)\|_{L_p(I_+)} \left(n^{-2} + n^{\beta/p - \beta/q + 1/q} + n^{\beta/p - \beta/q} \right),$$

где $c = c(s, p, q)$. Учитывая, что в силу (3.2) выполняются неравенства

$$n^{\beta/p - \beta/q + 1/q} \leq n^{-2} \quad \text{и} \quad n^{\beta/p - \beta/q} \leq n^{-2},$$

имеем

$$\|\tilde{x}(\cdot) - \sigma_{s,n}(\cdot; \tilde{x}; I_+)\|_{L_q(I_+)} \leq c \|\tilde{x}(\cdot)\|_{L_p(I_+)} n^{-2},$$

где $c = c(s, p, q)$. Отметим, что эта оценка доказана в предположении, что $\|\tilde{x}(\cdot)\|_{L_p(I_+)} > 0$. Но при $\|\tilde{x}(\cdot)\|_{L_p(I_+)} = 0$ выполнено (3.20). Поэтому оценка верна для $\|\tilde{x}(\cdot)\|_{L_p(I_+)} \geq 0$ и $n \geq 3s + 2$. Аналогично устанавливается и неравенство

$$\|\tilde{x}(\cdot) - \sigma_{s,n}(\cdot; \tilde{x}; I_-)\|_{L_q(I_-)} \leq c \|\tilde{x}(\cdot)\|_{L_p(I_-)} n^{-2}.$$

Таким образом, доказана следующая оценка сверху:

$$\|\tilde{x}(\cdot) - \sigma_{s,n}(\cdot; \tilde{x}; I)\|_{L_q(I)} \leq c \|\tilde{x}(\cdot)\|_{L_p(I)} n^{-2}, \quad n \geq 3s + 2,$$

где $c = c(s, p, q)$. А так как в силу (3.4) $\|\tilde{x}(\cdot)\|_{L_p(I)} \leq \tilde{c} \|x(\cdot)\|_{L_p(I)}$, то

$$\|\tilde{x}(\cdot) - \sigma_{s,n}(\cdot; \tilde{x}; I)\|_{L_q(I)} \leq c \|x(\cdot)\|_{L_p(I)} n^{-2}, \quad n \geq 3s + 2,$$

где $c = c(s, p, q)$. Положив

$$\sigma_{s,n}(t; x; I) := \sigma_{s,n}(t; \tilde{x}; I) + \pi_{s-1}(t; x), \quad t \in I,$$

где многочлен $\pi_{s-1}(\cdot;x)$ определен согласно (3.3), отметим, что

$$x(t)-\sigma_{s,n}(t;x;I)=\tilde{x}(t)-\sigma_{s,n}(t;\tilde{x};I), \quad t\in I.$$

Поэтому

$$\|x(\cdot)-\sigma_{s,n}(\cdot;x;I)\|_{L_q(I)}\le c\,\|x(\cdot)\|_{L_p(I)}\,n^{-2}, \quad n\ge 3s+2. \tag{3.41}$$

где $c=c(s,p,q)$.

При этом ясно, что $\sigma_{s,n}(\cdot;x;I)\in\Delta_+^s L_q(I)$. Кроме того, эти сплайны принадлежат пространству $\Sigma_{s,n}:=\Sigma_{s,n}(I)$ полиномиальных сплайнов $\sigma_{s,n}$ порядка s, с узлами $t_{n,i}^{(\beta)}$, имеющих на I непрерывную производную $\sigma_{s,n}^{(s-2)}$. Нетрудно проверить, что $\dim\Sigma_{s,n}\le 2(n-1)+s$. Поэтому из (3.41) следует

$$d_n\left(\Delta_+^s B_p,\Delta_+^s L_q\right)_{L_q}\le cn^{-2}, \qquad n\ge 3s+2, \quad 1\le q<p\le\infty, \tag{3.42}$$

где $c=c(s,p,q)$. Очевидно, что из (3.1) и (3.42) следует оценка сверху в (1.1) для $n\ge 1$.

Перейдем к доказательству оценки снизу в соотношении (1.1). В [7] (см. теорему на с. 241) для классов Соболева

$$W_p^r(I):=\left\{x\mid x^{(r-1)}\in AC_{\mathrm{loc}}(I),\left\|x^{(r)}\right\|_{L_p(I)}\le 1\right\}, \quad 1\le p\le\infty,$$

было доказано, что при $r\ge 2$ справедливо соотношение

$$d_n\left(\Delta_+^{r+1}W_p^r,\Delta_+^{r+1}L_q\right)_{L_q}^{\mathrm{kol}}\asymp n^{-2}, \qquad n\ge r, \quad 1\le p,q\le\infty. \tag{3.43}$$

Полагаем

$$\dot{W}_p^r(I):=\left\{x\mid x\in W_p^r(I), x^{(k)}(0)=0, k=0,1,\ldots,r-1\right\}, \quad 1\le p\le\infty.$$

Тогда из (3.43) следует

$$d_n\left(\Delta_+^{r+1}\dot{W}_\infty^r,\Delta_+^{r+1}L_q\right)_{L_q}^{\mathrm{kol}}\ge cn^{-2}, \qquad r\ge 2, \quad 1\le q<\infty, \tag{3.44}$$

где $c=c(r,q)$. Очевидно, что $\Delta_+^{r+1}\dot{W}_\infty^r(I)\subset\Delta_+^{r+1}B_\infty(I)$, и

$$d_n\left(\Delta_+^{r+1}B_\infty,\Delta_+^{r+1}L_q\right)_{L_q}^{\mathrm{kol}}\ge d_n\left(\Delta_+^{r+1}\dot{W}_\infty^r,\Delta_+^{r+1}L_q\right)_{L_q}^{\mathrm{kol}}, \qquad r\ge 2, \quad 1\le q<\infty. \tag{3.45}$$

Полагая $r=s-1$ для $s\ge 3$, из (3.44) и (3.45) получаем

$$d_n\left(\Delta_+^s B_p,\Delta_+^s L_q\right)_{L_q}^{\mathrm{kol}}\ge cn^{-2}, \qquad n\ge 1, \quad 1\le q<p\le\infty,$$

где $c=c(s,p,q)$. Итак, оценка снизу в (1.1), а вместе с ней и соотношение (1.1), доказаны.

Остается доказать соотношение (1.2). Доказательство оценки сверху в (1.2) тривиально. Действительно, полагая

$$\sigma_{s,n}(t;x;I)\equiv 0, \qquad t\in I, \quad n\ge 1, \quad x\in\Delta_+^s B_p(I),$$

имеем

$$\|x(\cdot) - \sigma_{s,n}(\cdot; x; I)\|_{L_p(I)} \le 1, \qquad n \ge 1, \quad 1 \le p \le \infty.$$

Следовательно,

$$d_n \left(\Delta_+^s B_p, \Delta_+^s L_p\right)_{L_p}^{\mathrm{kol}} \le 1, \qquad n \ge 1, \quad 1 \le p \le \infty,$$

и оценка сверху в (1.2) доказана.

Доказательство оценки снизу легко получить с помощью лемм 1 и 5. Пусть $S_1^+ \left(\Xi_{s,p}^N\right)$ — положительный 1-сектор по системе $\Xi_{s,p}^N := \{\xi_{s,p,i}\}_{i=1}^N$ функций $\xi_{s,p,i}$, которые определены в лемме 5. Учитывая, что $\|\xi_{s,p,i}(\cdot)\|_{L_p(I)} = 1$, нетрудно проверить, что $S_1^+ \left(\Xi_{s,p}^N\right) \subset \Delta_+^s B_p$ для любых $s \ge 3$ и $N \in \mathbb{N}$. Тогда

$$d_n \left(\Delta_+^s B_p, \Delta_+^s L_p\right)_{L_p}^{\mathrm{kol}} \ge d_n \left(S_1^+ \left(\Xi_{s,p}^N\right), \Delta_+^s L_p\right)_{L_p}^{\mathrm{kol}}. \tag{3.46}$$

Кроме того, очевидно, что

$$d_n \left(S_1^+ \left(\Xi_{s,p}^N\right), \Delta_+^s L_p\right)_{L_p}^{\mathrm{kol}} \ge d_n \left(S_1^+ \left(\Xi_{s,p}^N\right)\right)_{L_p}^{\mathrm{kol}}. \tag{3.47}$$

Используя лемму 5, имеем

$$d_n \left(S_1^+ \left(\Xi_{s,p}^N\right)\right)_{L_p}^{\mathrm{kol}} \ge c d_{n+1} \left(B_1^N\right)_{l_\infty^N}^{\mathrm{kol}}, \quad N > n \ge 1, \tag{3.48}$$

где $c = c(s,p)$. Полагая $N(n) = 10^{n+1} + 1$ и применяя лемму 1, получаем

$$d_{n+1} \left(B_1^{N(n)}\right)_{l_\infty^{N(n)}}^{\mathrm{kol}} \ge c_0, \tag{3.49}$$

где $c_0 > 0$ — абсолютная постоянная. Тогда из (3.46) – (3.49) следует

$$d_n \left(\Delta_+^s B_p, \Delta_+^s L_p\right)_{L_p}^{\mathrm{kol}} \ge c, \qquad n \ge 1, \quad 1 \le p \le \infty,$$

где $c = c(s,p)$. Таким образом, оценка снизу в (1.2), а вместе с ней и соотношение (1.2) доказаны.

Теорема доказана.

Отметим, что для всех $s \ge 3$ попутно доказано и соотношение

$$d_n \left(\Delta_+^s B_p\right)_{L_p}^{\mathrm{kol}} \asymp 1, \qquad n \ge 1, \quad 1 \le p \le \infty.$$

1. *Kolmogoroff A. N.* Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse // Math. Ann. – 1936. – **37**. – S. 107 – 110.
2. *Коновалов В. Н.* Оценки поперечников типа Колмогорова для классов дифференцируемых периодических функций // Мат. заметки. – 1984. – **35**, № 3. – С. 369 – 380.
3. *Bullen P. S.* A criterion for n-convexity // Pacif. J. Math. – 1971. – **36**. – P. 81 – 98.
4. *Roberts A. W., Varberg D. E.* Convex functions. – New York: Acad. Press, 1973. – 300 p.
5. *Pečarić J. E., Proschan F., Tong Y. L.* Convex functions, partial orderings, and statistical applications // Math. Sci. and Eng. – Boston: Acad. Press, 1992. – **187**.
6. *Konovalov V. N., Leviatan D.* Shape-preserving widths of weighted Sobolev-type classes of positive, monotone and convex functions on a finite interval // Constr. Approxim. – 2003. – **19**. – P. 23 – 58.
7. *Konovalov V. N., Leviatan D.* Shape preserving widths of Sobolev-type classes of s-monotone functions on a finite interval // Isr. J. Math. – 2003. – **133**. – P. 239 – 268.
8. *Konovalov V. N., Leviatan D.* Estimates on the approximation of 3-monotone functions by 3-monotone quadratic splines // East J. Approxim. – 2001. – **7**. – P. 333 – 349.
9. *Konovalov V. N.* Shape preserving widths of Kolmogorov-type of the classes of positive, monotone, and convex integrable functions // Ibid. – 2004. – **10**, № 1–2. – P. 93 – 117.
10. *Глускин Е. Д.* Октаэдр плохо приближается случайными подпространствами // Функцион. анализ и его прил. – 1986. – **20**, № 1. – С. 14 – 20.
11. *Гарнаев А. Ю., Глускин Е. Д.* О поперечниках евклидова шара // Докл. АН СССР. – 1984. – **277**, № 5. – С. 1048 – 1052.

Получено 21.10.2003