УДК 519.1

И. К. Редчук, А. В. Ройтер (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

СИНГУЛЯРНЫЕ ЛОКАЛЬНО-СКАЛЯРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОЛЧАНОВ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И РАЗДЕЛЯЮЩИЕ ФУНКЦИИ

We consider locally scalar representations of extended Dynkin graphs in Hilbert spaces. We establish the connection of these representations with the function $\rho(n) = 1 + (n-1)/(n+1)$ and construct a family of separating functions that generalize the function ρ and play the similar role for a wider class of graphs.

Розглядаються локально-скалярні зображення розширених графів Динкіна у гільбертових просторах. Встановлено зв'язок цих зображень із функцією $\rho(n) = 1 + (n-1)/(n+1)$ та побудовано сім'ю відокремлюючих числових функцій, які узагальнюють функцію ρ та відіграють аналогічну роль для більш широкого класу графів.

В классических работах [1, 2] рассмотрены представления колчанов (в категории конечномерных векторных пространств) и установлена их связь с корневыми системами соответствующих графов, получившая дальнейшее развитие в работах [3 – 6]. Неоднократно делались попытки обобщить представления колчанов на метрические и, в частности, гильбертовы пространства, однако при этом указанная связь терялась. В [7] на представления графов в гильбертовых пространствах было наложено ограничение *локальной скалярности*, после чего удалось естественным образом обобщить результаты [1, 2], построив аналогичные функторам Кокстера функторы четных и нечетных отражений, причем оказалось, что именно такие представления интересны для функционального анализа и в некоторых частных случаях в других терминах фактически уже рассматривались в [8, 9].

В данной работе мы установим связь локально-скалярных представлений расширенных графов Дынкина с функцией ρ, рассмотренной в [10], а также рассмотрим функции ρ_k, играющие аналогичную роль для более широкого класса графов.

1. Стандартные сингулярные представления расширенных графов Дынкина. Мы будем использовать обозначения и определения работы [7]. Все рассматриваемые графы будем предполагать конечными, связными и ациклическими (т. е. деревьями).

Кратность $\mu(g)$ вершины $g \in G_v$ есть $|M_g|$ ($M_g = \{ g_i \in G_v \mid g_i - g \}$ [7]).

Гипотеза 1. *Все неразложимые локально-скалярные представления графа G конечномерны, если и только если G — граф Дынкина или расширенный граф Дынкина.*

В этой статье будем рассматривать только конечномерные представления.

Зафиксируем разбиение множества вершин G_v графа G на четные $\overset{\circ}{G}_v$ и нечетные $\overset{\bullet}{G}_v$ [7] и нумерацию $g_1, \ldots, g_n$, занумеровав (в произвольном порядке) сначала нечетные $g_1, g_2, \ldots, g_p$, а затем четные вершины $g_{p+1}, g_{p+2}, \ldots$ $\ldots, g_n$. Пусть $x \in V_G$ $(x \colon G_v \to \mathbb{C})$, $x_i = x(g_i)$, c — преобразование Кокстера на V_G, $c = \sigma_{g_n}\sigma_{g_{n-1}}\ldots\sigma_{g_1}$, $\left(\sigma_{g_i}(x)\right)_i = -x_i + \sum_{j,\, g_j \in M_{g_i}} x_j$, $\left(\sigma_{g_i}(x)\right)_j = x_j$ при $j \neq i$. Ясно, что $\sigma_i^2 = \mathrm{id}$, $i = \overline{1, n}$. Поэтому $c^{-1} = \sigma_{g_1}\ldots\sigma_{g_n}$.

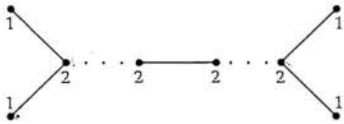
Вектор $x \in V_G^+$ *регулярен*, если $c^t(x) \in V_G^+$ при любом $t \in \mathbb{Z}$, и *сингулярен* — в противном случае (терминология восходит к [11]).

Главную роль у нас будут играть расширенные графы Дынкина ($\tilde{D}_n$, $\tilde{E}_6$,

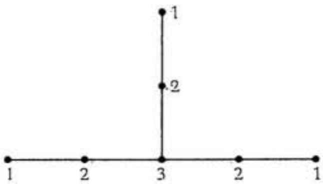
$\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$). Их связь с преобразованиями Кокстера можно охарактеризовать следующим известным утверждением.

Лемма 1.1. *Если* G — *дерево,* $u_G = u \in V_G^+$ *и* $c(u) = u$, *то* G — *расширенный граф Дынкина и (с точностью до общего множителя)* u_G *имеет вид*

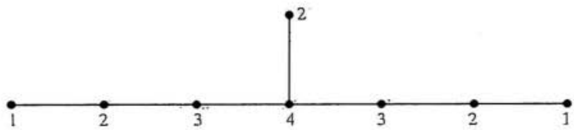
Граф $\tilde{D}_n$



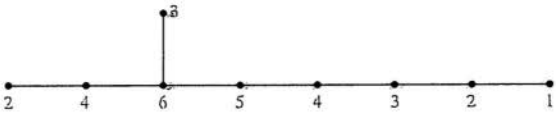
Граф $\tilde{E}_6$



Граф $\tilde{E}_7$



Граф $\tilde{E}_8$



Доказательство. Из $c(u) = u$ следует $\sigma_{g_i}(u) = u$ (а это равносильно тому, что при $i = \overline{1, n}$ $2u(g_i) = \sum_{g \in M_{g_i}} u(g)$) и $u_i > 0$ при $i \in \overline{1, n}$. Вершина g является *точкой ветвления*, если $\mu(g) > 2$, и *точкой слабого ветвления*, если $\mu(g) = 3$ и $|M_g| = \{a, b, c\}$, где $\mu(a) = \mu(b) = 1$.

Из $\sigma_{g_i} = u$ следует:

1) если $a - b$, то $u(a) \geq u(b)/2$, причем $u(a) = u(b)/2$, только если $\mu(a) = 1$;

2) если $\mu(g) > 2$, $g - a$, то $u(a) \leq u(g)$, причем $u(g) = u(a)$, только если $M_g = \{a, b, c\}$ и $\mu(b) = \mu(c) = 1$ (следует из 1));

3) если $a - b - c$ и $u(b) \leq u(a)$, то $u(c) \leq u(b)$, а если $u(b) < u(a)$, то $u(c) < u(b)$.

Если G_v содержит 2 точки ветвления x и y, $x - z_1 - \ldots - z_t - y$ $(t \geq 0)$ и $z_1, \ldots, z_t$ — не точки ветвления, то $u(x) \geq u(z_1) \geq \ldots \geq u(z_t) \geq u(y)$ и $u(y) \geq$ $\geq u(z_1) \geq \ldots \geq u(z_t) \geq u(x)$. Таким образом, из 2) следует, что x и y — точки слабого ветвления и $G = \tilde{D}_n$.

Если в G есть только одна точка ветвления z, то легко видеть, что возможны только случаи $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$ из перечисленных выше u_G, а случай отсутствия точек ветвления невозможен.

Лемма доказана.

Заметим, что вектор u_G для расширенного графа Дынкина G есть его (единственный с точностью до общего множителя) мнимый корень. Разумеется, *и* регулярен.

Известно, что если G — граф Дынкина $(A_n, D_n, E_6, E_7, E_8)$, то все векторы из V_G сингулярны [2]. Верно и обратное: для всех других деревьев существуют и регулярные векторы. Действительно, если G — расширенный граф Дынкина, то u_G регулярен. Из теории корней произвольного графа [12] следует, что любой мнимый корень регулярен (мы получим это также как следствие из предложения 1.2). Однако регулярными могут быть и действительные корни: например, если $G = \tilde{E}_6$, $v \in V_G^+$, $v_i = 1$ для $i = \overline{1, 7}$.

Локально-скалярное представление π графа G *сингулярно,* если π неразложимо и конечномерно и $d(\pi)$ — сингулярный вектор, и *регулярно,* если π неразложимо, конечномерно и не сингулярно.

Гипотеза 2. *Если G — расширенный граф Дынкина, π — его регулярное представление, то $d(\pi) \le u_G$.*

В [7] для (произвольного) графа G рассмотрены: категория $\operatorname{Rep}(G, \mathcal{H})$ представлений G в категории гильбертовых пространств, категория $\operatorname{Rep}(G)$ локально-скалярных представлений, ее (полная) подкатегория $\operatorname{Rep}(G, d, f)$ представлений с фиксированной размерностью d и характером f и, наконец, $\operatorname{Rep}(G, \coprod)$ — объединение категорий $\operatorname{Rep}(G, d, f)$, удовлетворяющих условию $d_i + f_i > 0$, $i \in \overline{1, n}$.

Заметим, что все перечисленные категории, кроме $\operatorname{Rep}(G, \mathcal{H})$, не аддитивны.

Если вектор f такой, что $f_i > 0$ при $i = \overline{p+1, n}$, то в [7] построен функтор $\overset{\circ}{F}_{df} : \operatorname{Rep}(G, d, f) \to \operatorname{Rep}(G, d^+, \overset{\circ}{f}_d)$, являющийся эквивалентностью $(d^+ = \overset{\circ}{c}(d))$. При этом $d_i^+ = d_i$ при $g_i \in \overset{\bullet}{G}$, $d_i^+ = \sigma_i(d)$ при $g_i \in \overset{\circ}{G}$; $\left(\overset{\circ}{f}_d\right)_i = f_i$ при $g_i \in \overset{\circ}{G}$, а если $g_i \in \overset{\bullet}{G}$, то $\left(\overset{\circ}{f}_d\right)_i = \sigma_i(f)$ при $d_i \ne 0$ и $\left(\overset{\circ}{f}_d\right)_i = f_i$ при $d_i = 0$. Аналогично строятся функторы $\overset{\bullet}{F}_{df} : \operatorname{Rep}(G, d, f) \to \operatorname{Rep}(G, d^-, \overset{\bullet}{f}_d)$ $(d^- = \overset{\bullet}{c}(d))$.

Для $d \in V_G^+$ положим $G^d = \{g \in G_v \mid d(g) > 0\}$. Нам понадобится несколько иная конструкция функторов $\overset{\circ}{\Phi}_{df} : \operatorname{Rep}(G, d, f) \to \operatorname{Rep}(G, d^+, \overset{\circ}{f'_d})$ при условии $f(g_i) > 0$ для $g_i \in (G^d \cup M(G^d)) \cap \overset{\circ}{G}$. Эти функторы, как и функторы $\overset{\circ}{F}_{df}$, получаются из функторов $\overset{\circ}{F}_{X,\delta}$ подбором других δ (соответствующих $\overset{\circ}{f'_d}$). Здесь $(\overset{\circ}{f'_d})_i = f_i$ при $g_i \in \overset{\circ}{G}$, а если $g_i \in \overset{\bullet}{G}$, то при $d_i = 0$, $g_i \in M(G^d)$ или $d_i^+ = 0$, $g_i \in M(G^{d^+})$ положим $(\overset{\circ}{f'_d})_i = f_i$, в остальных случаях — $(\overset{\circ}{f'_d})_i = \sigma_i(f)$.

Функториальность $\overset{\circ}{\Phi}_{df}$ следует из рассуждений, аналогичных приведенным в [7] при доказательстве функториальности $\overset{\circ}{F}_{df}$ из $\operatorname{Rep}(G, d, f)$ в $\operatorname{Rep}(G, d^+, \overset{\circ}{f'_d})$.

Аналогично строится функтор $\dot{\Phi}_{df}$.

Положим

$$S' = \left\{(d, f) \in Z_G \times V_G \,\middle|\, f(g) > 0 \text{ при } g \in M(G^d)\right\},$$

$$\mathring{S}' = \left\{(d, f) \in S' \,\middle|\, f(g) > 0 \text{ при } g \in G^d \cap \mathring{G}\right\},$$

$$\dot{S}' = \left\{(d, f) \in S' \,\middle|\, f(g) > 0 \text{ при } g \in G^d \cap \dot{G}\right\}.$$

Построим категорию $\operatorname{Rep}(G, \coprod') = \coprod_{(d,f)\in S'} \operatorname{Rep}(G, d, f)$. Таким образом, объектами $\operatorname{Rep}(G, \coprod')$ являются пары (π, f), где π — локально-скалярное представление, f — его характер (который вполне определяется представлением π, только если π точное; размерность d, разумеется, всегда определяется представлением π). Морфизмы между объектами из $\operatorname{Ob}\operatorname{Rep}(G, d_1, f_1)$ и $\operatorname{Ob}\operatorname{Rep}(G, d_2, f_2)$ совпадают с морфизмами в $\operatorname{Ob}\operatorname{Rep}(G, d_1, f_1)$ при $(d_1, f_1) = (d_2, f_2)$, и отсутствуют на парах объектов таких, что $(d_1, f_1) \neq (d_2, f_2)$.

Категория $\operatorname{Rep}_\circ\left(G, \coprod'\right) \subset \operatorname{Rep}\left(G, \coprod'\right)$ — полная подкатегория f-представлений, для которых (d, f) такие, что $f(g) > 0$ при $g \in \left(M(G^d) \cup G^d\right) \cap \mathring{G}$ $\left(\text{аналогично определяется категория } \operatorname{Rep}_\bullet\left(G, \coprod'\right)\right)$.

Нетрудно проверить, что если $(d, f) \in \mathring{S}'$, то $(d^+, \mathring{f}') \in \mathring{S}'$, и если $(d, f) \in \dot{S}'$, то $(d^+, \dot{f}') \in \dot{S}'$. Поэтому определены функторы $\mathring{\Phi}: \operatorname{Rep}_\circ\left(G, \coprod'\right) \to$ $\to \operatorname{Rep}_\circ\left(G, \coprod'\right)$ — объединение функторов $\mathring{\Phi}_{df}$ и $\dot{\Phi}: \operatorname{Rep}_\bullet\left(G, \coprod'\right) \to$ $\to \operatorname{Rep}_\bullet\left(G, \coprod'\right)$ — объединение функторов $\dot{\Phi}_{df}$ (аналогично $\mathring{F}$ и $\dot{F}$ в [7]).

$\mathring{\Phi}^2 \cong \operatorname{Id}$ и $\dot{\Phi}^2 \cong \operatorname{Id}$. Значит, $\mathring{\Phi}$ $\left(\dot{\Phi}\right)$ — эквивалентность в $\operatorname{Rep}_\circ\left(G, \coprod'\right)$ $\left(\operatorname{Rep}_\bullet\left(G, \coprod'\right)\right)$.

Введем обозначения: $\dot{c} = \sigma_{g_p} \ldots \sigma_{g_1}$, $\mathring{c} = \sigma_{g_n} \ldots \sigma_{g_{p+1}}$. Положим $c_t =$ $= \underbrace{\ldots \dot{c}\mathring{c}\dot{c}}_{t}$ при $t > 0$, $c_t = \underbrace{\ldots \mathring{c}\dot{c}\mathring{c}}_{t}$ при $t < 0$ и $c_0 = \mathrm{id}$.

Операторы c_i порождают в группе обратимых операторов в V_G подгруппу, изоморфную группе диэдра; $c_r c_s = c_t$, где $t = (-1)^s r + s$.

Пусть $\operatorname{Rep}^1\left(G, \coprod'\right) = \operatorname{Rep}_\circ\left(G, \coprod'\right) \cap \operatorname{Rep}_\bullet\left(G, \coprod'\right)$, функторы $\mathring{\Phi}$, $\dot{\Phi}$ определены на $\operatorname{Rep}^1\left(G, \coprod'\right)$ со значениями в $\operatorname{Rep}\left(G, \coprod'\right)$. Построим в $\operatorname{Rep}\left(G, \coprod'\right)$ ряд полных подкатегорий

$$\operatorname{Rep}\left(G, \coprod'\right) \supset \operatorname{Rep}^1\left(G, \coprod'\right) \supset \ldots \supset \operatorname{Rep}^k\left(G, \coprod'\right) \supset \ldots$$

таких, что

$$\operatorname{Ob}\operatorname{Rep}^{i+1}\left(G, \coprod'\right) =$$
$$= \left\{ X \in \operatorname{Ob}\operatorname{Rep}^{i}\left(G, \coprod'\right) \,\middle|\, \mathring{\Phi} \in \operatorname{Rep}^{i}\left(G, \coprod'\right),\ \dot{\Phi} \in \operatorname{Rep}^{i}\left(G, \coprod'\right) \right\}.$$

Таким образом, на $\operatorname{Rep}^{k}\left(G, \coprod'\right)$ определены функторы $\mathring{\Phi}$, $\dot{\Phi}$ со значениями в $\operatorname{Rep}^{k-1}\left(G, \coprod'\right)$. Тогда для каждого $k \in \mathbb{N}$ определены функторы

$$\Phi_k\colon \operatorname{Rep}^{k}\left(G, \coprod'\right) \to \operatorname{Rep}\left(G, \coprod'\right), \quad \Phi_k = \underbrace{\ldots\dot{\Phi}\mathring{\Phi}\dot{\Phi}}_{k},$$

$$\Phi_{-k}\colon \operatorname{Rep}^{k}\left(G, \coprod'\right) \to \operatorname{Rep}\left(G, \coprod'\right), \quad \Phi_{-k} = \underbrace{\ldots\mathring{\Phi}\dot{\Phi}\mathring{\Phi}}_{k}.$$

Из приведенных формул следует, что если $\Phi_t(\pi, f) = (\pi_t, f_t)$, то $d(\pi_t) = = c_t(d(\pi))$.

Пусть G — расширенный граф Дынкина, $u_G = (u_k)$. Построим линейную форму

$$L_G(x) = \sum_{g_i \in \dot{G}} u_i x_i - \sum_{g_j \in \mathring{G}} u_j x_j, \quad x \in V_G.$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма 1.2. *Для любого* $x \in V_G$ $L_G(c_1(x)) = L_G(c_{-1}(x)) = -L_G(x)$.

Доказательство. Обозначим $S(x_i) = \sigma_{g_i}(x) + x_i$. Тогда

$$L_G(c_1(x)) + L_G(x) = \sum_{g_i \in \dot{G}} u_i\left(\sigma_{g_i}(x)\right)_i - \sum_{g_i \in \mathring{G}} u_i x_i + \sum_{g_i \in \dot{G}} u_i x_i - \sum_{g_i \in \mathring{G}} u_i x_i =$$
$$= \sum_{g_i \in \dot{G}} u_i\left(\left(\sigma_{g_i}(x)\right)_i + x_i\right) - 2\sum_{g_i \in \mathring{G}} u_i x_i = \sum_{g_i \in \dot{G}} u_i S(x_i) - 2\sum_{g_i \in \mathring{G}} u_i x_i =$$
$$= \sum_{g_i \in \mathring{G}} x_i(S(u_i) - 2u_i) = \sum_{g_i \in \mathring{G}} x_i\left(\left(\sigma_{g_i}(u_i)\right)_i - u_i\right) = 0.$$

Случай $L_G(c_{-1}(x))$ рассматривается аналогично.

Лемма доказана.

Положим $u = \dot{u} + \mathring{u}$, где $\left(\dot{u}\right)_i = u_i$ при $i \le p$ и $\left(\mathring{u}\right)_i = u_i$ при $i > p$. Положим далее $u_\circ^{|k|} = c_k\left(\mathring{u}\right)$ при $k \ge 0$, $u_\bullet^{|k|} = c_k\left(\dot{u}\right)$ при $k \le 0$ и, наконец, $\tilde{u}^k = \alpha u^k$, где $\min_{i=\overline{1,n}}\left(\tilde{u}^k\right)_i = 1$.

Характер представления π назовем *нечетным* (соответственно *четным стандартным*), если он равен $\tilde{u}_\bullet^k$ (соответственно $\tilde{u}_\circ^k$). Характеры $\tilde{u}_\circ^0$ и $\tilde{u}_\bullet^0$ будем называть *основными стандартными*.

Локально-скалярное f-представление расширенного графа Дынкина G назовем *стандартным*, если f — стандартный характер.

В [10] вводится (возрастающая) функция $\rho : \rho(n) = 1 + (n-1)/(n+1)$, $n \in \mathbb{N}_0$. (Естественно считать $\rho(\infty) = 2$.) Приведем явную формулу для стандартных характеров в терминах ρ и покажем, что каждому сингулярному корню соответствует в точности одно стандартное представление.

Предложение 1.1. *Пусть G — расширенный граф Дынкина. Пусть* $\tilde{u}_\bullet^0 = (w_1, \ldots, w_p, 0, \ldots, 0)$ *и* $\tilde{u}_\circ^0 = (0, \ldots, 0, w_{p+1}, \ldots, w_n)$. *Тогда*

$$\tilde{u}_\bullet^{2m} = (w_1, \ldots, w_p, \rho(2m)w_{p+1}, \ldots, \rho(2m)w_n),$$

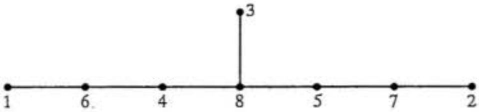
$$\tilde{u}_\bullet^{2m+1} = (w_1, \ldots, w_p, (4-\rho(2m))w_{p+1}, \ldots, (4-\rho(2m))w_n),$$

$$\tilde{u}_\circ^{2m} = (w_1, \ldots, w_p, (4-\rho(2m-1))w_{p+1}, \ldots, (4-\rho(2m-1))w_n),$$

$$\tilde{u}_\circ^{2m+1} = (w_1, \ldots, w_p, \rho(2m+1)w_{p+1}, \ldots, \rho(2m+1)w_n),$$

$$m \in \mathbb{N}_0.$$

Доказательство проводится отдельно для каждого расширенного графа Дынкина. Проиллюстрируем доказательство на примере графа $\tilde{E}_7$ для характера $\tilde{u}_\bullet^0$. (На рисунке числа обозначают номера вершин.)



В этом случае $\tilde{u}_\bullet^0 = (1, 1, 2, 3, 3, 0, 0, 0)$, $\tilde{u}_\circ^0 = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2)$.

Проведем индукцию для $l = 2m$. База индукции очевидна.

Пусть $c_{2m}\left(\tilde{u}_\bullet^0\right) = (1, 1, 2, 3, 3, \rho(2m), \rho(2m), 2\rho(2m))$. Тогда $c_{2m+2}\left(\tilde{u}_\bullet^0\right) = (3-\rho(2m), 3-\rho(2m), 6-2\rho(2m), 9-3\rho(2m), 9-3\rho(2m), 4-\rho(2m), 4-\rho(2m), 8-2\rho(2m))$. Разделив все координаты на $3-\rho(2m)$, получим вектор $(1, 1, 2, 3, 3, \rho(2m+2), \rho(2m+2), 2\rho(2m+2))$. Теперь $\tilde{u}_\bullet^{2m+1} = \mathring{c}\left(\tilde{u}_\bullet^{2m}\right) = (1, 1, 2, 3, 3, (4-\rho(2m)), (4-\rho(2m)), (8-2\rho(2m)))$.

Объект $(\pi, f) \in \operatorname{Rep}\left(G, \coprod'\right)$ *сингулярен*, если сингулярно π. *Простейший объект* в категории $\operatorname{Rep}\left(G, \coprod'\right)$ — это пара $\left(\Pi_g, \bar{f}\right)$ ($d(\Pi_g) = \bar{g}$, $g \in G_v$, тогда $\bar{f}(g) = 0$ и $\bar{f}(x) > 0$ при $x \in M_g$).

Предложение 1.2. *Каждый сингулярный объект категории* $\operatorname{Rep}\left(G, \coprod'\right)$ *представляется в виде* $\Phi_m\left(\Pi_g, \bar{f}\right)$, *где* $\left(\Pi_g, \bar{f}\right)$ *— простейший объект* ($m \geq 0$ *при* $g \in \mathring{G}$ *и* $m \leq 0$ *при* $g \in \overset{\bullet}{G}$). *При этом каждое точное сингулярное представление G соответствует (с точностью до эквивалентности) одному сингулярному объекту* $\operatorname{Rep}\left(G, \coprod'\right)$.

Доказательство проведем индукцией по $|t|$, где $t(d(\pi))$ — наименьшее по модулю число, для которого $c_t(d(\pi)) \notin V_G^+$.

Пусть $|t| = 1$. Для определенности $\mathring{c}(d(\pi)) \notin V_G^+$. Тогда существует $g \in G^\pi \cap \mathring{G}$ такое, что $f(g) = 0$ (в противном случае применим к π функтор $\mathring{F}_{X,\delta}$, где $X = G^\pi$, δ произвольно, и получим $d\left(\mathring{F}_{X,\delta}(\pi)\right) = \mathring{c}(d(\pi)) \in V_G^+$). Тогда из неразложимости π и леммы 3.5 [7] следует, что $G^\pi = \{g\}$, т. е. $\pi = \Pi_g$, (π, f) — простейший объект.

Пусть утверждение выполняется при $|t| < k$. Пусть (π, f) — сингулярный объект $\operatorname{Rep}\left(G, \coprod'\right)$, $c_k(d(\pi)) \notin V_G^+$; поскольку π — не простейшее представление, f положителен на G^{π}. Тогда либо $c_{k-1}\left(d\left(\overset{\circ}{F}_{X,\delta}(\pi)\right)\right) \notin V_G^+$, либо $c_{k-1}\left(d\left(\overset{\bullet}{F}_{X,\delta}(\pi)\right)\right) \notin V_G^+$, и можно воспользоваться индукционным предположением.

Предложение доказано.

***Следствие* 1.1.** *Пусть x — сингулярный корень расширенного графа Дынкина G. Тогда x — действительный корень в G.*

Предложение 1.3. *Пусть G — расширенный граф Дынкина. Для того чтобы корень $x \in V_G$ был сингулярен, необходимо и достаточно, чтобы $L_G(x) \neq 0$.*

Доказательство. *Необходимость.* Если x сингулярен, то согласно предложению 1.2 $x = c_t(\overline{g})$, где $\overline{g}$ — простой корень в G. Поскольку $L(\overline{g}) \neq 0$, используя лемму 1.2, получаем требуемое.

Достаточность. Рассмотрим наряду с $L_G(x)$ линейную форму

$$L_G^+(x) = \sum_{g_i \in \overset{\bullet}{G}} u_i x_i + \sum_{g_j \in \overset{\circ}{G}} u_j x_j .$$

Предположим для определенности, что $L_G(x) > 0$. Поскольку $L_G(c_1(x)) = -L_G(x)$ (лемма 1.2), то

$$\sum_{g_j \in \overset{\bullet}{G}} u_j x_j - \sum_{g_j \in \overset{\bullet}{G}} u_j \left(\sigma(x_j)\right)_j > 0,$$

а значит, $L_G^+(c_1(x)) < L_G^+(x)$. Аналогично $L_G^+(c_2(x)) < L_G^+(c_1(x))$ и т. д. Итак, за конечное число шагов t получим $L_G^+(x) < 0$, что означает сингулярность x.

Предложение доказано.

Предложение 1.4. *Если G — расширенный граф Дынкина, то представление каждого сингулярного объекта категории* $\operatorname{Rep}\left(G, \coprod'\right)$ *в виде* $\Phi_m\left(\Pi_g, \bar{f}\right)$ *единственно.* ($(\Pi_g, \bar{f})$ *— простейший объект,* $m \geq 0$ *при* $g \in \overset{\circ}{G}$ *и* $m \leq 0$ *при* $g \in \overset{\bullet}{G}$).

Это следует из предложений 1.2 и 1.3.

Предложение 1.5. *Если G — расширенный граф Дынкина, d — сингулярный корень в G, то существует единственное стандартное представление π размерности d.*

Доказательство. Из предложения 1.2 следует, что $x = c_t(\overline{g})$. Пусть для определенности $t \geq 0$. Тогда $F_t\left(\Pi_g, \tilde{u}_{\bullet}^0\right) = \left(\pi, \alpha \tilde{u}_{\bullet}^t\right)$. Положим $\pi' = \pi / \sqrt{\alpha}$ (т. е. умножим на $1 / \sqrt{\alpha}$ каждый оператор в представлении π). Тогда $\tilde{u}_{\bullet}^t$ — характер представления π'.

Единственность π следует из предложения 1.4.

2. Обобщение функции ρ. Пусть $\tilde{V}$ — множество бесконечных невозрастающих последовательностей целых неотрицательных чисел $v = (v_1, v_2, \ldots$ $\ldots, v_i, \ldots)$ таких, что $v_s = 0$ начиная с некоторого s. Введем на $\tilde{V}$ частичный порядок, положив $v \leq w$, если $v_i \leq w_i$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

Функцию ρ можно определить на множестве $\tilde{V}$: для $v \in \tilde{V}$

$$\rho(v) = \sum_{i=1}^{m} \rho(v_i), \quad \rho(0) = 0.$$

Отсюда следует, что если $v \leq w$, то $\rho(v) \leq \rho(w)$.

Шириной $w(v)$ вектора $v \in \tilde{V}$ назовем число его ненулевых компонент.

Приведем следующие два списка векторов из $\tilde{V}$:

$$K = \{(1, 1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 1), (5, 2, 1)\},$$

$$\hat{K} = \{(1, 1, 1, 1, 1), (2, 1, 1, 1), (3, 2, 2), (4, 3, 1), (6, 2, 1)\}.$$

(Здесь и далее при записи векторов $\tilde{V}$ будем писать только их ненулевые компоненты.)

В приложениях [10] часто встречаются условия

$$\rho(v) = 4, \tag{1}$$

$$\rho(v) > 4. \tag{2}$$

Предложение 2.1 [10]. *Все решения уравнения* (1) *исчерпываются списком* K, *все минимальные решения неравенства* (2) — *списком* $\hat{K}$.

Предложение 2.2. *Если* $\rho(w) > 4$ *для* $w \in \tilde{V}$, *то* $\exists v \in \tilde{V} \,|\, v < w$ *и* $\rho(v) = 4$.

Доказательство следует из того, что для любого $\hat{v} \in \hat{K}$ $(\hat{v} \leq w)$ найдется такой $v \in K$, что $v < \hat{v}$.

Выясним, что в предложениях 2.1 и 2.2 элементарно, а что связано со спецификой функции ρ.

Пусть $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ — произвольная функция. Будем говорить, что φ *выпуклая*, если $\varphi(n+1) - \varphi(n) < \varphi(m+1) - \varphi(m)$ при $n > m$, и *нормированная*, если $\varphi(1) = 1$ (ρ имеет эти свойства). Положим

$$\varphi(z_1, \ldots, z_t) = \sum_{i=1}^{t} \varphi(z_i), \quad K(\varphi, n) = \left\{ v \in \tilde{V} \,|\, \varphi(v) = n \right\}$$

и $N(\varphi, k)$ состоящим из минимальных решений неравенства $\varphi(v) > k$. Каждому $x \in \tilde{V}$ сопоставим $\hat{x} \in \tilde{V}$, где $\hat{x}_1 = x_1 + 1$ и $\hat{x}_i = x_i$ при $i \neq 1$. Положим $\langle s \rangle^r = \underbrace{s, \ldots, s}_{r}$. Пусть $X \subset \tilde{V}$, $|X| < \infty$, положим $\omega(X) = \max_{x \in X} \omega(x)$ и $\hat{X} = \{\hat{x} \,|\, x \in X\} \cup \left\{ \langle 1 \rangle^{\omega(X)+1} \right\}$.

Элементарно доказывается следующее предложение.

Предложение 2.3. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$. *Если* φ *возрастающая, то* $K(\varphi, n)$ *и* $N(\varphi, n)$ *конечны. Если, кроме этого,* φ *выпуклая и нормированная, то* $\hat{K}(\varphi, n) \subset N(\varphi, n)$, *причем каждый вектор из* $\hat{K}(\varphi, n)$ *больше в точности одного вектора из* $K(\varphi, n)$. *Если* $\hat{K}(\varphi, n) = N(\varphi, n)$ *и* $m < n$, *то* $\hat{K}(\varphi, m) = N(\varphi, m)$.

Возрастающую выпуклую нормированную функцию φ назовем *n-разделяющей* $(n \in \mathbb{N})$, если $N(\varphi, n) = \hat{K}(\varphi, n)$. Это равносильно тому, что если $\varphi(w) > n$, $w \in \tilde{V}$, то найдется $v < w$ такое, что $\varphi(v) = n$.

Таким образом, ρ — 4-разделяющая.

Пусть $v \in \tilde{V}$, $t \in \mathbb{N}$. Положим $v^{\langle t \rangle} = (v^{\langle t \rangle})_i$, где $(v^{\langle t \rangle})_i = v_1$ при $i \le t$ и $(v^{\langle t \rangle})_i = v_{i-t}$ при $i > t$. Для $X \subset \tilde{V}$ положим $X^{\langle t \rangle} = \{x^{\langle t \rangle}\}$ при $x \in X$.

Покажем, что при $n > 4$ ρ не n-разделяющая, и для $n = 4 + i$ построим n-разделяющие функции ρ_i такие, что $K(\rho_i, 4 + i) = K(\rho, 4)^{\langle i \rangle}$ и которые (см. п. 3) также связаны с локально-скалярными представлениями колчанов.

Рассмотрим неравенство

$$\rho(v) \ge 5. \tag{3}$$

Выделим такие случаи:

1. $\omega(v) > 5$. Минимальным вектором, удовлетворяющим этому условию, будет вектор $w = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$, $\rho(w) > 5$. Поскольку при $v < w$ $\rho(v) \le 5$, то $w \in N(\rho, 5)$.

2. $\omega(v) = 5$. При этом условии $\rho(v) \ge 5$ и $\rho(v) = 5$ только при $v = (1, 1, 1, 1, 1)$ (v — наименьший вектор в этом случае), т. е. $(1, 1, 1, 1, 1) \in K(\rho, 5)$. Тогда, очевидно, $(2, 1, 1, 1, 1) \in N(\rho, 5)$.

3. $\omega(v) = 4$. Пусть $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$. Если $v_4 \ge 2$, то $\rho(v) \ge 4\rho(2) = 5\frac{1}{3} > 5$. Тогда $(2, 2, 2, 2) \in N(\rho, 5)$. Если $v_4 = 1$, $v_3 \ge 2$, то $\rho(v) \ge \rho(1) + 3\rho(2) = 5$, в этом случае имеем $(2, 2, 2, 1) \in K(\rho, 5)$, $(3, 2, 2, 1) \in N(\rho, 5)$. Если же $v_3 = v_4 = 1$, то неравенство сведется к $\rho(v_1) + \rho(v_2) \ge 3$. При $v_2 = 2$ получим $(5, 2, 1, 1) \in K(\rho, 5)$ и $(6, 2, 1, 1) \in N(\rho, 5)$. При $v_2 \ge 3$ получим $(3, 3, 1, 1) \in K(\rho, 5)$ и $(4, 3, 1, 1) \in N(\rho, 5)$.

4. $\omega(v) = 3$. Пусть $v = (v_1, v_2, v_3)$. Применяя рассуждения, аналогичные предыдущим, получаем:

a) при $v_3 \ge 5$ $(5, 5, 5) \in K(\rho, 5)$ и $(6, 5, 5) \in N(\rho, 5)$;

b) при $v_3 = 4$ $(9, 4, 4) \in K(\rho, 5)$ и $\{(10, 4, 4), (7, 5, 4)\} \subset N(\rho, 5)$;

c) при $v_3 = 3$ $\{(19, 4, 3), (11, 5, 3)\} \subset K(\rho, 5)$ и $\{(20, 4, 3), (12, 5, 3), (9, 6, 3)\} \subset N(\rho, 5)$;

d) при $v_3 = 2$ $\{(41, 6, 2), (23, 7, 2), (17, 8, 2), (14, 9, 2), (11, 11, 2) \subset K(\rho, 5)\}$; $\{(42, 6, 2), (24, 7, 2), (18, 8, 2), (15, 9, 2), (12, 11, 2), (13, 10, 2) \subset N(\rho, 5)\}$;

e) при $v_3 = 1$ имеем $\rho(v) < \rho(1) + 2\rho(\infty) = 5$.

5. Случай $\omega(v) \le 2$ не дает решений, так как $\rho(v) < 2\rho(\infty) = 4 < 5$.

Итак, имеет место следующее предложение.

Предложение 2.4. $K(\rho, 5) = \{(1, 1, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 1), (3, 3, 1, 1), (5, 2, 1, 1), (41, 6, 2), (23, 7, 2), (17, 8, 2), (14, 9, 2), (11, 11, 2), (19, 4, 3), (11, 5, 3), (7, 7, 3), (9, 4, 4), (5, 5, 5)\}$. $N(\rho, 5) = \hat{K}(\rho, 5) \cup \{(9, 6, 3), (7, 5, 4), (2, 2, 2, 2), (13, 10, 2)\}$.

Зафиксируем $t \in \mathbb{N}$ и зададим рекуррентную последовательность $\{u_i\}$ следующим образом:

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_{i+2} = tu_{i+1} - u_i. \tag{4}$$

Далее, введем функцию $\rho_{t-2}(n)$:

$$\rho_{t-2}(n) = 1 + \frac{u_{n-1}}{u_n + 1} \quad \text{при} \quad n \in \mathbb{N}, \qquad \rho_{t-2}(0) = 0. \tag{5}$$

При $t=2$ из (4) следует $u_n = n$ и $\rho_0(n) = 1 + (n-1)/(n+1) = \rho(n)$, т. е. $\rho_0(n) = \rho(n)$.

Положим далее $k = t-2$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Найдем общую формулу для n-го члена последовательности $\{u_n\}$. Для этого решим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - (k+2)\lambda + 1 = 0.$$

Его корни $\lambda = \left(k+2+\sqrt{k^2+4k}\right)/2$, $\overline{\lambda} = \left(k+2-\sqrt{k^2+4k}\right)/2$. Тогда формула n-го члена при $t \neq 2$ имеет вид

$$u_n = C_1\lambda^n + C_1\overline{\lambda}^n.$$

Из начальных условий имеем $C_1 = 1/\left(\sqrt{k^2+4k}\right)$, $C_2 = -1/\left(\sqrt{k^2+4k}\right)$. Окончательно

$$u_n = \frac{\lambda^n - \overline{\lambda}^n}{\sqrt{k^2+4k}}.$$

После тривиальных преобразований из формулы (5) получим

$$\rho_k(n) = 1 + \frac{\lambda^n - \lambda}{\lambda^{n+1} - 1}, \qquad k \neq 0. \tag{6}$$

Вычислим

$$\rho_k(\infty) = \lim_{n\to\infty} \rho_k(n) = 1 + \overline{\lambda} = 1 + \frac{2}{k+2+\sqrt{k^2+4k}}. \tag{7}$$

Покажем также, что функция $\rho_k(n)$ — возрастающая на $\mathbb{N}$. С применением формулы (6) неравенство $\rho_k(n) < \rho_k(n+1)$ сводится к равносильному $\lambda^3 + 1 > \lambda^2 + \lambda$, которое выполняется ввиду $\lambda > 1$.

Определим при $k > 0$ функцию $\rho_k(n)$ на $\tilde{V}$ аналогично функции ρ: для $v \in \tilde{V}$ положим

$$\rho_k(v) = \rho_k(v_1, \ldots, v_s) = \sum_{i=1}^{s} \rho_k(v_i).$$

Ввиду того что ρ_k является возрастающей на $\mathbb{N}_0$, она будет возрастающей и на $\tilde{V}$.

Рассмотрим неравенство

$$\rho_k(v) \geq k + 4. \tag{8}$$

Покажем, что результаты будут аналогичны результатам, полученным для функции ρ.

Лемма 2.1. *При любых $k, n \in \mathbb{N}_0$ выполняется неравенство*

$$\rho_k(n) + k\rho_k(\infty) < (k+1)\rho_k(n+1). \tag{9}$$

Доказательство. При $k=0$ неравенство сводится к очевидному $\rho(n) < \rho(n+1)$. Пусть $k > 0$. Используя формулы (6) и (7), после преобразований получаем, что неравенство (9) равносильно неравенству

$$(\lambda^2-1)(\lambda^{n+2}-(k+1)\lambda^{n+1}+k) > 0,$$

которое выполняется, так как $\lambda=\left(k+2+\sqrt{k^2+4k}\right)/2>k+1$ при $k>0$.

Лемма доказана.

Предложение 2.5. *Функция* ρ_k $(k+4)$*-разделяющая,* $K(\rho_k,\,4+k)=K^{\langle k\rangle}$ $(K=K(\rho,4))$, $K(\rho_k,4+k)=\left\{\left(\langle 1\rangle^{k+4}\right);\left(\langle 2\rangle^{k+3}\right);\left(\langle 3\rangle^{k+2},1\right);\left(\langle 5\rangle^{k+1},2,1\right)\right\}$.

Доказательство. На основании формулы (5) последовательно найдем $\rho_k(1)=1$, $\rho_k(2)=1+1/(k+3)$, $\rho_k(3)=1+1/(k+2)$, $\rho_k(4)=1+(k+3)/(k^2+$ $+5k+3)$, $\rho_k(5)=1+(k+2)/(k^2+4k+3)$.

Рассмотрим неравенство (8).

1. Пусть $\omega(v)>k+4$. Тогда $\rho_k(v)\geq\rho_k\left(\langle 1\rangle^{k+5}\right)$. Из векторов с этой шириной минимальным вектором будет $w=\left(\langle 1\rangle^{k+5}\right)$. Очевидно, что для любого $v<$ $<w$ выполняется (8), поэтому $w\in N(\rho_k,\,k+4)$.

2. $\omega(v)=k+4$. $\rho_k(v)\geq\rho_k\left(\langle 1\rangle^{k+4}\right)=k+4$, причем равенство здесь будет только при $v=\left(\langle 1\rangle^{k+4}\right)$. Поэтому $\left(\langle 1\rangle^{k+4}\right)\in K(\rho_k,\,k+4)$. Минимальным вектором в этом случае будет $w=\left(2,\langle 1\rangle^{k+3}\right)$. Как и в предыдущем случае, для любого $v<w$ будет $\rho_k(v)\leq k+4$, поэтому $w\in N(\rho_k,k+4)$.

3. $\omega(v)=k+3$. Пусть $v=(v_1,\ldots,v_{k+3})$.

a) Предположим, что $v_{k+3}\geq 2$. Тогда $\rho_k(v)\geq(k+3)\rho_k(2)\geq k+4$ и равенство выполняется только при $v=\left(\langle 2\rangle^{t+1}\right)\in K(\rho_k,\,k+4)$, минимальным же вектором будет вектор $w=\left(3,\langle 2\rangle^{t}\right)\in N(\rho_k,k+4)$.

b) Пусть $v_{k+3}=1$ и $v_{k+2}\geq 2$. Если $v_{k+2}\geq 3$, то $\rho_k(v)\geq\rho_k(1)+(k+$ $+2)\rho_k(3)=k+4$. Имеем $(\langle 3\rangle^{k+2},\,1\in K(\rho_k,\,k+4))$, $(4,\,\langle 3\rangle^{k+1},\,1\in N(\rho_k,\,k+$ $+4))$. Теперь рассмотрим $v_{k+2}=2$. Исходное неравенство сведется к следующему: $\rho_k(v_1)+\ldots+\rho_k(v_{k+1}+1/(k+3))\geq k+2$. Равенство здесь выполняется, если все $v_j=5$, $j=\overline{1,k+1}$. Покажем, что для всех остальных векторов $v=$ $=(v_1,\ldots,v_{k+1},2,1)$ в случае $v_{k+1}<5$ будет $\rho_k(v)<\rho_k\left(\langle 5\rangle^{k+1},2,1\right)$. Действительно, согласно лемме 2.1 $\rho_k(v)<\rho_k(1)+\rho_k(2)+\rho_k(4)+k\rho_k(\infty)<\rho_k(1)+$ $+\rho_k(2)+(k+1)\rho_k(5)=\rho_k\left(\langle 5\rangle^{k+1},2,1\right)$. Если же $v_{k+1}\geq 5$, то вектор $\left(\langle 5\rangle^{k+1},2,1\right)$, очевидно, минимален. Итак, в этом случае имеем $\left(\langle 5\rangle^{k+1},2,1\right)\in K(\rho_k,k+4)$ и $\left(6,\langle 5\rangle^{k},2,1\right)\in N(\rho_k,k+4)$.

c) $v_{k+3}=v_{k+2}=1$. $\rho_k(v)<\rho_k\left(\langle\infty\rangle^{k+1},1,1\right)=2+(n-1)\rho_k(\infty)$. Тогда по формуле (7) $\rho_k(v)<k+3+(k+1)/\lambda<k+4$.

4. $\omega(v)\leq k+2$. $\rho_k(v)<(k+2)\rho_k(\infty)\leq k+4$, так как $\rho_k(\infty)=1+1/\lambda\leq 1+$ $+2/(k+2)$. В этом случае решений нет.

Рассмотрев все возможные случаи, мы, таким образом, получили

$$K(\rho_k,k+4) = \left\{\left(\langle 1\rangle^{k+4}\right),\left(\langle 2\rangle^{k+3}\right),\left(\langle 3\rangle^{k+2},1\right),\left(\langle 5\rangle^{k+1},2,1\right)\right\},$$

$$N(\rho_k,k+4) = \left\{\left(\langle 1\rangle^{k+4}\right),\left(2,\langle 1\rangle^{k+3}\right),\left(3,\langle 2\rangle^{k+2}\right),\left(4,\langle 3\rangle^{k+1},1\right),\left(6,\langle 5\rangle^{k},2,1\right)\right\},$$

что и требовалось доказать.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Рассмотрим функции $\rho_\alpha(v)$, $v \in \tilde{V}$, при этом предположении, задавая их согласно формулам (4) и (5) $(\alpha + 2 = t)$. Зафиксируем теперь $v = (v_1, \ldots, v_s)$, $v \in \tilde{V}$, и рассмотрим уравнение

$$\rho_\alpha(v) = \alpha + 4 \tag{10}$$

относительно α.

Предложение 2.6. *Уравнение* (10) *не имеет рациональных не целых решений.*

Доказательство. Из формулы (4) по индукции очевидным образом следует, что u_n имеет вид $u_n = t^{n-1} + a_{n-2}t^{n-1} + \ldots + a_0$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $i \in \mathbb{N}_0$. Пусть $v = (v_1, \ldots, v_s)$. Тогда уравнение (10) (с учетом (5)) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{s}\left(1 + \frac{u_{v_i - 1}}{u_{v_i} + 1}\right) = t + 2,$$

$$\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{t^{n-2} + b^{(i)}_{n-3}t^{n-3} + \ldots + b^{(i)}_0}{t^{n-1} + a^{(i)}_{n-2}t^{n-1} + \ldots + a^{(i)}_0 + 1}\right) = t + 2 - s, \qquad a^{(i)}_j,\ b^{(i)}_j \in \mathbb{Z}.$$

После приведения к общему знаменателю получим уравнение $P(t) = 0$, где $P(t)$ — многочлен с коэффициентами из $\mathbb{Z}$, старший коэффициент которого равен 1. Следовательно, $P(t)$ над полем $\mathbb{R}$ имеет либо целые, либо иррациональные корни. Предложение доказано.

***Замечание* 1.** Предложение 2.6 перестает быть верным, если допустить $v_i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Например, $\rho_{0,5}(1, 1, 1, \infty) = 4,5$.

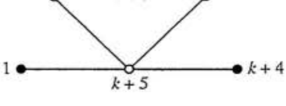
Итак, при $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ равенство $\rho_\alpha(v) = \alpha + 4$ возможно только при целых α (предложение 2.6); для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0$ имеется список векторов, удовлетворяющих этому равенству (предложение 2.5).

3. Стандартные представления звездочных графов. Граф G назовем *звездочным* или *графом типа* $(n_1, \ldots, n_s)$ $(n_i \in N,\ i = \overline{1, s},\ s > 1)$, если G — дерево и имеет ровно одну вершину кратности s (*узловую*), s вершин кратности 1 (*крайние*), а остальные вершины имеют кратность 2, причем число ребер между узловой вершиной и крайними равно $n_1, \ldots, n_s$. Множество таких графов обозначим S.

Пусть теперь $S_0 \subset S$ — множество графов типа $(n_1, \ldots, n_s)$ такое, что $\rho_k(n_1, \ldots, n_s) = k + 4$, $k \in \mathbb{N}_0$. Состав множества S_0 определяется предложением 2.5. Заметим, что в S_0 содержатся расширенные графы Дынкина $\tilde{D}_n$, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$ (им соответствуют $k = 0$).

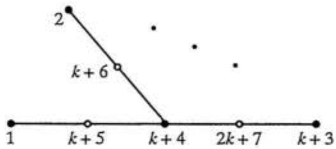
Рассмотрим локально-скалярные представления графов из S_0. Ниже мы получим результат, аналогичный предложению 1.1. Укажем для каждого семейства графов из S_0 четный и нечетный стандартный характеры. (На рисунках числа обозначают номера вершин.)

1. $G = \left(\langle 1 \rangle^{k+4}\right)$.



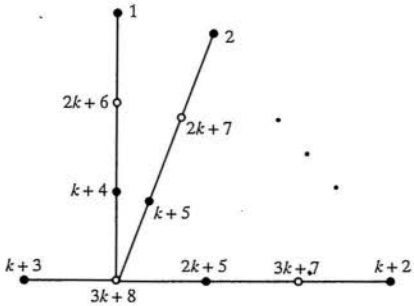
$\tilde{u}_{\bullet}^{0}(k) = \left(\langle 1 \rangle^{k+4}, 0\right);\ \tilde{u}_{\circ}^{0}(k) = \left(\langle 0 \rangle^{k+4}, 1\right).$

2. $G = \left(\langle 2 \rangle^{k+3}\right).$



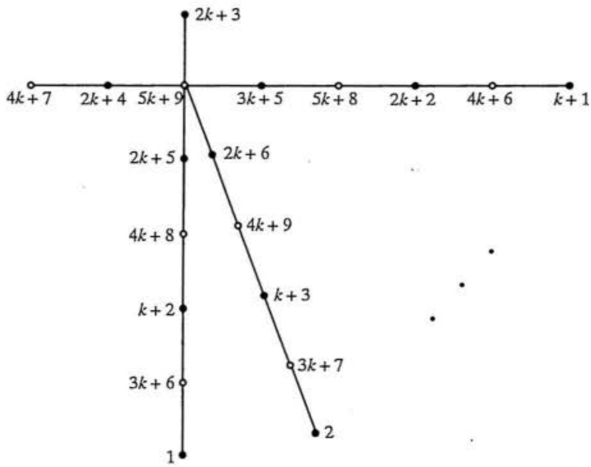
$\tilde{u}_{\bullet}^{0}(k) = \left(\langle 1 \rangle^{k+3}, (k+3), \langle 0 \rangle^{k+3}\right);\ \tilde{u}_{\circ}^{0}(k) = \left(\langle 0 \rangle^{k+4}, \langle 1 \rangle^{k+3}\right).$

3. $G = \left(\langle 3 \rangle^{k+2}, 1\right).$



$\tilde{u}_{\bullet}^{0}(k) = \left(\langle 1 \rangle^{k+2}, k+2, \langle k+3 \rangle^{k+2}, \langle 0 \rangle^{k+3}\right);\ \tilde{u}_{\circ}^{0}(k) = \left(\langle 0 \rangle^{k+2}, \langle 1 \rangle^{k+3}, k+2\right).$

4. $G = \left(\langle 5 \rangle^{k+1}, 2, 1\right).$



$\tilde{u}_{\bullet}^{0}(k) = \left(\langle 1 \rangle^{k+1}, \langle k+3 \rangle^{k+1}, (k^2+4k+3), (k^2+5k+4), \left\langle k^2+5k+5 \right\rangle^{k+1}, \langle 0 \rangle^{2k+2}\right);$
$\tilde{u}_{\circ}^{0}(k) = \left(\langle 0 \rangle^{3k+2}, \langle 1 \rangle^{k+1}, (k+1), \langle k+2 \rangle^{k+1}, (k^2+4k+3)\right).$

Тогда имеет место предложение, аналогичное предложению 1.1.

Предложение 3.1. *Пусть* $G \in S_0$, $\tilde{u}_{\bullet}^{0}(t) = (w_1, \ldots, w_p, 0, \ldots, 0)$ *и* $\tilde{u}_{\circ}^{0}(t) = (0, \ldots, 0, w_{p+1}, \ldots, w_n)$. *Тогда*

$$\tilde{u}_{\bullet}^{2m}(t) = (w_1, \ldots, w_p, \rho_t(2m) w_{p+1}, \ldots, \rho_t(2m) w_n),$$

$$\tilde{u}_{\bullet}^{2m+1}(t) = (w_1, \ldots, w_p, (t+2-\rho_t(2m))w_{p+1}, \ldots, (t+2-\rho_t(2m))w_n),$$
$$\tilde{u}_{\circ}^{2m}(t) = (w_1, \ldots, w_p, (t+2-\rho_t(2m-1))w_{p+1}, \ldots, (t+2-\rho_t(2m-1))w_n),$$
$$\tilde{u}_{\circ}^{2m+1}(t) = (w_1, \ldots, w_p, \rho_t(2m+1)w_{p+1}, \ldots, \rho_t(2m+1)w_n),$$
$$m \in \mathbb{N}_0.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству предложения 1.1 индукцией по $l = 2m$ отдельно для каждого семейства графов из S_0.

Из формул для стандартных характеров непосредственно следует такое утверждение.

Предложение 3.2. *Если f — стандартный характер, то $\overset{\circ}{f}$ и $\overset{\bullet}{f}$ — также стандартные характеры. Если (π, f) — стандартный объект категории $\operatorname{Rep}\left(G, \coprod'\right)$, то $\overset{\circ}{F}(\pi, f)$ — стандартный объект, если только $\pi \neq \Pi_g$, где $g \in \overset{\circ}{G}$, и $\overset{\bullet}{F}(\pi, f)$ — стандартный объект, если только $\pi \neq \Pi_g$, где $g \in \overset{\bullet}{G}$.*

Предложение 3.3. *Если G — звездочный граф и $\rho_k(n_1, \ldots, n_s) = k + 4$, d — сингулярный корень в G, то существует единственное сингулярное f-представление π размерности d, где f — стандартный характер.*

Доказательство существования аналогично доказательству предложения 1.5. Единственность следует из предложения 3.2.

1. *Gabriel P.* Unzerlegbare Darstellungen. I // Manuscr. Math. – 1972. – **6**. – S. 71–103.
2. *Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Пономарев В. А.* Функторы Кокстера и теорема Габриеля // Изв. мат. наук. – 1973. – **28**, вып. 2. – С. 19–33.
3. *Назарова Л. А.* Представления колчанов бесконечного типа // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1973. – **37**. – С. 752–791.
4. *Donovan P., Freislich M. R.* The representation theory of finite graphs and associated algebras // Carleton Math. Lect. Notes. – 1973. – **5**. – P. 1–119.
5. *Kac V. G.* Some remarks on representations of quivers and infinite root systems. // Lect. Notes Math. – 1980. – **832**. – P. 311–332.
6. *Gabriel P., Roiter A. V.* Representations of finite-dimensional algebras. – New York: Springer, 1997. – 177 p.
7. *Кругляк С. А., Ройтер А. В.* Локально-скалярные представления графов в категории гильбертовых пространств. – Киев, 2003. – 34 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики, № 2).
8. *Ostrovskii V., Samoilenko Yu.* Introduction to the theory of representations of finitely presented *-algebras. I. Representations by bounded operators // Rev. Math. and Math. Phys. – 1999. – **11**. – P. 1–261.
9. *Кругляк С. А., Рабанович В. И., Самойленко Ю. С.* О суммах проекторов // Функцион. анализ и прил. – 2002. – **36**, вып. 3. – С. 20–35.
10. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Норма отношения, разделяющие функции и представления маркированных колчанов // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 6. – С. 18–54.
11. *Gelfand I. M., Ponomarev V. A.* Problems of linear algebra and classification of quadruples of subspaces in a finite-dimensional vector space // Coll. Math. Soc. J. Bolyai, 5. Hilbert Space Operators. – Tihany (Nungary), 1970.
12. *Kac V. G.* Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory. II // J. Algebra. – 1982. – **78**. – P. 141–162.

Получено 21.07.2003