УДК 517.5

В. Ф. Бабенко
(Днепропетр. нац. ун-т, Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк),
В. А. Кофанов (Днепропетр. нац. ун-т),
С. А. Пичугов (Днепропетр. агр. ун-т)

ПРИБЛИЖЕНИЕ СИНУСОПОДОБНЫХ ФУНКЦИЙ КОНСТАНТАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ L_p, $p < 1$

We investigate the best approximations of sine-shaped functions by constants in spaces L_p, $p < 1$. In particular, we obtain the best approximations of the perfect Euler splines by constants in spaces L_p for some $p \in (0, 1)$.

Досліджено найкращі наближення синусоподібних функцій константами в L_p-просторах при $p < 1$. Зокрема, знайдено найкраще наближення ідеальних сплайнів Ейлера константами у просторах L_p при деяких $p \in (0, 1)$.

0. Введение. Пусть G — вещественная ось $\mathbf{R}$, единичная окружность $\mathbf{T}$, реализованная как отрезок $[0, 2\pi]$ с отождествленными концами или конечный отрезок. Символом $L_p = L_p(G)$, $0 \le p \le \infty$, обозначим пространство измеримых функций $x\colon G \to \mathbf{R}$ таких, что $\|x\|_p = \|x\|_{L_p(G)} < \infty$, где

$$\|x\|_{L_p(G)} := \begin{cases} \left(\int\limits_G |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}, & \text{если} \quad 0 < p < \infty; \\ \exp\left(\int\limits_G \ln|x(t)|\,dt\right), & \text{если} \quad p = 0; \\ \operatorname*{vrai\,sup}\limits_{t\in G} |x(t)|, & \text{если} \quad p = \infty. \end{cases}$$

В дальнейшем для 2π-периодических функций будем использовать обозначение $\|\cdot\|_p$ вместо $\|\cdot\|_{L_p(\mathbf{T})}$. Заметим, что $\|x\|_0 = \lim_{p\to 0+0}\|x\|_p$ (см., например, [1]).

Для $s \in (0, \infty]$ и $r \in \mathbf{N}$ через $L_s^r(G)$ обозначим множество функций $x\colon G \to \mathbf{R}$ таких, что $x^{(r-1)}$ $(x^{(0)} = x)$ локально абсолютно непрерывна, $x^{(r)} \in L_s(G)$, и положим $L_{p,s}^r(G) = L_p(G) \cap L_s^r(G)$.

Исследования многих математиков были посвящены нахождению точных констант в неравенствах типа Колмогорова, т. е. величин

$$K = K(G) = K_{k,r}(G; q, p, s; \alpha) := \sup_{\substack{x\in L_{p,s}^r(G) \\ x^{(r)}\neq 0}} \frac{\left\|x^{(k)}\right\|_{L_q(G)}}{\|x\|_{L_p(G)}^{\alpha}\left\|x^{(r)}\right\|_{L_s(G)}^{1-\alpha}} \tag{0.1}$$

при различных значениях параметров $q, p, s \in (0, \infty]$; $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$; $\alpha \in (0, 1)$. Обзоры известных результатов для $G = \mathbf{R}$, $\mathbf{T}$ см., например, в работах [2 – 8].

Во многих случаях точную верхнюю грань в (0.1) реализуют идеальные эйлеровы сплайны φ_r — периодические интегралы r-го порядка с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_0(t) := \operatorname{sgn}\sin t$. При этом константы $K_{k,r}(G; q, p, s; \alpha)$ часто выражаются через величину $E_0(\varphi_r)_p$, где для $x \in L_p$ положено

$$E_0(x)_p := \inf_{c\in\mathbf{R}}\|x - c\|_p. \tag{0.2}$$

Приведем лишь некоторые примеры. В работе [9] доказано, что $K_{k,r}(\mathbf{R}; q, p, \infty; \alpha) = \|\varphi_{r-k}\|_q / E_0^{\alpha}(\varphi_r)_p$ в следующих случаях: a) $r = 2$, $k = 1$, $q = 2p$, $p \ge 1/2$; b) $r = 3$, $k = 1$, $q = 3p/2$, $p \ge 2/3$; c) $r = 3$, $k = 2$, $q = 3p$, $p \ge 1/3$. В работе [10] доказано соотношение $K_{k,r}(\mathbf{T}; q, p, \infty; \alpha) = \|\varphi_{r-k}\|_q / E_0^{\alpha}(\varphi_r)_p$ для произвольного $q \in [1, \infty]$ в следующих случаях: 1) $k = 1$, $r = 2, 3$, $p \in (0, \infty]$; 2) $k = 2$, $r = 3$, $p \in [1/3, \infty]$. Другие примеры можно найти в [2 – 8].

Отметим, что и во многих других экстремальных задачах анализа также возникает необходимость вычисления величины $E_0(\varphi_r)_p$. Из критерия элемента наилучшего приближения в пространствах L_p, $p \ge 1$, легко следует равенство

$$E_0(\varphi_r)_p = \|\varphi_r\|_p \tag{0.3}$$

для любого $r \in \mathbf{N}$. Однако задача вычисления величины $E_0(\varphi_r)_p$ в случае $p < 1$ весьма нетривиальна. Вообще, задача приближения функций $x \in L_p$ подпространством пространства L_p при $p < 1$ является гораздо более сложной, чем в нормированном случае $p \ge 1$. Во многом это связано с тем, что элемент наилучшего приближения функции x в пространствах L_p, $p < 1$, перестает наследовать свойства приближаемой функции. Например, известно, что в пространствах L_p при $p < 1$ полином наилучшего приближения четной функции не обязательно должен быть четным, более того, он может оказаться нечетным (см., например, [11]).

Другим примером, иллюстрирующим существенное отличие задачи приближения в L_p при $p \ge 1$ и $p < 1$, может служить следующее. Пусть $E_n(x)_p$ — наилучшее L_p-приближение функции x множеством $\mathcal{T}_n$ тригонометрических полиномов порядка не выше n, т.е. $E_n(x)_p := \inf_{t \in \mathcal{T}_n} \|x - t\|_p$. Известно и доказывается весьма просто с помощью критерия элемента наилучшего приближения в пространстве L_p (см., например, §3.3 [12]), что при $p \ge 1$

$$E_{n-1}(\sin n(\cdot))_p = \|\sin n(\cdot)\|_p. \tag{0.4}$$

Известное авторам статьи доказательство этого факта при $p \in (0, 1)$ сообщено в 1993 г. одному из авторов С. В. Конягиным в беседе. В нем используется глубокий результат В. В. Арестова [13] о точном неравенстве типа Бернштейна ,

$$\left\|\tau^{(k)}\right\|_p \le n^k \|\tau\|_p, \quad n, k \in \mathbf{N}, \tag{0.5}$$

для тригонометрических полиномов τ порядка не выше n в L_p при $p \in (0, 1)$. Для полноты изложения приведем это доказательство С. В. Конягина.

Пусть τ_{n-1} — произвольный тригонометрический полином порядка не выше $n - 1$. Применяя (0.5), получаем

$$\|\sin n(\cdot) - \tau_{n-1}\|_p^p \ge \frac{1}{n^{rp}} \left\|(\sin n(\cdot) - \tau_{n-1})^{(r)}\right\|_p^p = \frac{1}{n^{rp}} \left\| n^r \sin\left(n(\cdot) + \frac{\pi}{2} r\right) - \tau_{n-1}^{(r)} \right\|_p^p =$$

$$= \left\| \sin\left(n(\cdot) + \frac{\pi}{2} r\right) - \frac{1}{n^r} \tau_{n-1}^{(r)} \right\|_p^p.$$

Применяя далее неравенство треугольника и еще раз неравенство (0.5), продолжаем эту оценку следующим образом:

$$\|\sin n(\cdot) - \tau_{n-1}\|_p^p \ge \|\sin n(\cdot)\|_p^p - \frac{1}{n^{rp}} \left\|\tau_{n-1}^{(r)}\right\|_p^p \ge \|\sin n(\cdot)\|_p^p - \frac{(n-1)^{rp}}{n^{rp}} \|\tau_{n-1}\|_p^p.$$

Устремляя r к ∞ и учитывая, что $(n-1)/n < 1$, имеем

$$\left\|\sin n(\cdot) - \tau_{n-1}\right\|_p \ge \left\|\sin n(\cdot)\right\|_p.$$

Ввиду произвольности τ_{n-1} отсюда следует (0.4) при $p \in (0, 1)$.

В настоящей работе установлены новые свойства идеальных сплайнов Эйлера, с помощью которых удалось вычислить величину $E_0(\varphi_r)_p$ для некоторых $p \in (0, 1)$. Наши исследования привели к довольно неожиданным результатам. Например, оказалось, что существует $p_0 \in (0, 1/2]$ такое, что при $p < p_0$ для идеальных сплайнов Эйлера четного порядка равенство (0.3) не имеет места. Более того, в пространстве L_0 справедливо равенство

$$E_0\left(\frac{\varphi_{2r}}{\|\varphi_{2r}\|_\infty}\right)_0 = \left\|\frac{\varphi_{2r}}{\|\varphi_{2r}\|_\infty} \pm 1\right\|_0.$$

В то же время для идеальных сплайнов Эйлера нечетного порядка равенство (0.3) остается справедливым для всех $p \in [0, 1)$. Причина этого парадоксального на первый взгляд факта заложена в различном расположении графиков $\varphi_{2r+1} / / \|\varphi_{2r+1}\|_\infty$ и $\varphi_{2r} / \|\varphi_{2r}\|_\infty$ по отношению к графику функции $y = \sin x$. Точнее, график подходящего сдвига $|\varphi_{2r+1}| / \|\varphi_{2r+1}\|_\infty$ находится под графиком $|\sin x|$, в то время как график подходящего сдвига $|\varphi_{2r}| / \|\varphi_{2r}\|_\infty$ находится над графиком $|\sin x|$. Отсюда следует, что график $|\varphi_{2r}| / \|\varphi_{2r}\|_\infty$ „плотнее" прилегает к своим касательным $y = \pm 1$ в точках экстремума, чем график $|\varphi_{2r+1}| / \|\varphi_{2r+1}\|_\infty$. Это и есть главная причина различий в свойствах наилучших приближений константой сплайнов φ_{2r} и φ_{2r+1} в пространствах L_p, $p < 1$.

Новые свойства идеальных сплайнов Эйлера, установленные в настоящей работе, были положены в основу определения классов „синусоподобных" функций $\underline{S}$ и $\overline{S}$. Изучены свойства наилучших приближений константой в пространствах L_p, $p < 1$, функций этих классов. В частности, отмеченные выше свойства наилучших приближений идеальных эйлеровых сплайнов константой в пространствах L_p, $p < 1$, остаются справедливыми и для функций классов $\underline{S}$ и $\overline{S}$. Важную роль при доказательстве этих свойств играет теорема сравнения перестановок функций вида $\varphi + a$, где $\varphi \in \underline{S}$ или $\varphi \in \overline{S}$.

В п. 1 установлены новые свойства идеальных сплайнов Эйлера. В пп. 2 и 3 введены классы „синусоподобных" функций $\underline{S}$ и $\overline{S}$ и изучены свойства наилучших приближений константой в пространствах L_p, $p < 1$, функций этих классов. В п. 4 рассмотрен класс W „синусоподобных" функций $\varphi \in \underline{S}$ или $\varphi \in \overline{S}$, удовлетворяющих дополнительным условиям выпуклости, и доказана теорема сравнения перестановок функций вида $\varphi + a$, где $\varphi \in W$. В п. 5 изучены свойства наилучших приближений константой в пространствах L_p, $p < 1$, функций класса W.

1. Некоторые новые свойства идеальных сплайнов Эйлера. Пусть $\varphi_0(x) := \operatorname{sgn} \sin x$. Идеальным сплайном Эйлера $\varphi_r(x)$ называется r-й периодический интеграл, имеющий нулевое среднее значение на периоде от функции $\varphi_0(x)$. Свойства идеальных сплайнов Эйлера хорошо изучены (см., например, §3.1 в [14]). Тем не менее в следующей теореме представлены некоторые, по мнению авторов, новые свойства этих функций. В частности, в этой теореме выявлено существенное отличие свойств идеальных сплайнов Эйлера четного и нечетного порядков. Это отличие очень важно для дальнейшего. Для $r \in \mathbf{N}$ положим $K_r := \|\varphi_r\|_\infty$. Это хорошо известные константы Фавара (см., например, §3.1 в [14]).

Теорема 1. *Для любых* $r \in \mathbf{N}$ *и* $x \in \mathbf{R}$ *имеют место неравенства*

$$\frac{|\varphi_{2r-1}(x)|}{K_{2r-1}} \leq \frac{|\varphi_{2r+1}(x)|}{K_{2r+1}} \leq |\cos x| \tag{1.1}$$

и

$$\frac{|\varphi_{2r-2}(x)|}{K_{2r-2}} \geq \frac{|\varphi_{2r}(x)|}{K_{2r}} \geq |\sin x|, \tag{1.2}$$

причем все неравенства строгие для $x \neq k\pi$ *и* $x \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. *Кроме того, каждая из функций*

$$\frac{|\varphi_{2r-1}(x)|}{\cos x} \quad \text{и} \quad \frac{|\varphi_{2r}(x)|}{\sin x}$$

строго убывает на $(0, \pi/2)$.

Доказательство. Докажем неравенства (1.1). Для доказательства первого из неравенств (1.1) заметим, что разность

$$\Delta_r(x) := \frac{\varphi_{2r-1}(x)}{K_{2r-1}} - \frac{\varphi_{2r+1}(x)}{K_{2r+1}} \tag{1.3}$$

имеет на периоде $(-\pi, \pi]$ не менее 6 нулей с учетом их кратностей (простые нули в точках $\pm\pi/2$ и кратные нули в точках 0 и π). С другой стороны, очевидно, что $(2r-1)$-я производная $\Delta_r^{(2r-1)}(x)$ имеет не более 6 перемен знака на периоде. Поэтому в силу теоремы Ролля разность $\Delta_r(x)$ имеет ровно 6 нулей с учетом их кратностей и других нулей, кроме 0, π, $\pm\pi/2$, на периоде не имеет. Поэтому для доказательства первого из неравенств (1.1) достаточно установить выполнение неравенства

$$\frac{|\varphi'_{2r-1}(\pi/2)|}{K_{2r-1}} < \frac{|\varphi'_{2r+1}(\pi/2)|}{K_{2r+1}}. \tag{1.4}$$

Ясно, что неравенство (1.4) эквивалентно неравенству $K_{2r-2}K_{2r-1}^{-1} < K_{2r}K_{2r+1}^{-1}$. Последнее неравенство вытекает из следующих хорошо известных соотношений между константами Фавара (см., например, [14, с. 105]):

$$1 = K_0 < K_2 < \ldots < \frac{4}{\pi} < \ldots < K_{2r+1} < K_{2r-1} < \ldots < K_1 = \frac{\pi}{2}. \tag{1.5}$$

Таким образом, первое неравенство в (1.1) доказано. При этом из доказательства ясно, что это неравенство строгое в точках x, отличных от точек $k\pi$ и $\pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Для доказательства второго из неравенств (1.1) используем уже доказанное неравенство

$$\frac{|\varphi_{2r+1}(x)|}{K_{2r+1}} \leq \frac{|\varphi_{2\nu+1}(x)|}{K_{2\nu+1}}, \quad r, \nu \in \mathbf{N}, \quad r < \nu. \tag{1.6}$$

Устремим в этом неравенстве $\nu \to \infty$ и учтем, что при этом

$$|\varphi_{2\nu+1}(x)| \to \frac{4}{\pi}|\cos x|, \qquad K_{2\nu+1} \to \frac{4}{\pi}. \tag{1.7}$$

Теперь из (1.6) следует второе неравенство в (1.1). При этом, учитывая, что для любого фиксированного x, отличного от $k\pi$ и $\pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, функция $f(\nu) := |\varphi_{2\nu+1}(x)|K_{2\nu+1}^{-1}$ строго возрастает с ростом ν в силу того, что для x, отличных от $k\pi$ и $\pi/2+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, первое из неравенств (1.1) строгое, заключаем, что для таких x и второе неравенство в (1.1) строгое.

Неравенства (1.2) доказываются аналогично. Для доказательства первого из них сначала устанавливается, что разность

$$\frac{\varphi_{2r-2}(x)}{K_{2r-2}}-\frac{\varphi_{2r}(x)}{K_{2r}}$$

имеет на периоде $(-\pi,\pi]$ ровно 6 нулей с учетом их кратностей (простые нули в точках 0 и π и кратные нули в точках $\pm\pi/2$), а затем доказывается неравенство

$$\frac{|\varphi'_{2r-2}(0)|}{K_{2r-2}}>\frac{|\varphi'_{2r}(0)|}{K_{2r}}.$$

Второе из неравенств (1.2) получается предельным переходом при $\nu\to\infty$ из неравенства

$$\frac{|\varphi_{2r}(x)|}{K_{2r}}\geq\frac{|\varphi_{2\nu}(x)|}{K_{2\nu}},\qquad r,\ \nu\in\mathbf{N},\quad r<\nu.$$

Докажем теперь, что функция $|\varphi_{2r-1}(x)|(\cos x)^{-1}$ строго убывает на $(0,\pi/2)$. Из уже доказанного следует, что

$$\frac{\varphi_{2r-1}(0)}{1}=\frac{K_{2r-1}}{1}>\frac{\varphi_{2r-1}(t)}{\cos t}$$

при $t\in(0,\pi/2)$. Поэтому для доказательства убывания функции $|\varphi_{2r-1}(x)|\times$ $\times(\cos x)^{-1}$ достаточно установить, что при любом фиксированном $t\in(0,\pi/2)$ уравнение

$$\frac{\varphi_{2r-1}(x)}{\cos x}=\frac{\varphi_{2r-1}(t)}{\cos t}\tag{1.8}$$

имеет единственное решение $x=t$ в $(0,\pi/2)$. Для этого, в свою очередь, достаточно доказать, что функция

$$F(x)\ :=\ \varphi_{2r-1}(x)\cos t-\varphi_{2r-1}(t)\cos x$$

не имеет на периоде $(-\pi,\pi]$ нулей, отличных от точек множества $\{\pm\pi/2,\pm t,$ $\pm(\pi-t)\}$. Для доказательства этого факта заметим, что $(2r-1)$-я производная

$$F^{(2r-1)}(x)\ :=\ \varphi_0(x)\cos t-\varphi_{2r-1}(t)\cos\left(x+\frac{\pi}{2}(2r-1)\right)$$

имеет на периоде не более 6 перемен знака. Таким образом, в силу теоремы Ролля функция $F(x)$ имеет на периоде ровно 6 нулей. Тем самым единственность решения уравнения (1.8) доказана и строгое убывание функции $|\varphi_{2r-1}(x)|(\cos x)^{-1}$ установлено.

Аналогично доказывается строгое убывание функции $|\varphi_{2r}(x)|(\sin x)^{-1}$ в $(0,$ $\pi/2)$. Теорема доказана.

2. Определение и свойства функций классов $\underline{S_0}$ и $\overline{S_0}$. Свойства идеальных сплайнов Эйлера, установленные в теореме 1, положены в основу приводимого ниже определения классов $\underline{S_0}$ и $\overline{S_0}$.

Определение. *Символом* $\underline{S_0}$ *обозначим класс* 2π-*периодических функций* $\varphi(x)$, *удовлетворяющих следующим условиям:*

1) $\varphi(x)$ — *дифференцируема во всех точках* $x\in\mathbf{R}\setminus\{k\pi:k\in\mathbf{Z}\}$;

2) $\varphi(x)$ *интерполирует* $\cos x$ *в нулях и точках экстремума функции* $\cos x$;

3) $\varphi(x)$ *строго возрастает* (*строго убывает*) *на промежутках возрастания* (*убывания*) *функции* $\cos x$;

4) *график* $\varphi(x)$ *симметричен относительно прямых* $x = k\pi$ *и относительно точек* $(\pi/2 + k\pi, 0)$, $k \in \mathbf{Z}$;

5) *функции* $\varphi(x)(\cos x)^{-1}$ *и* $|\varphi'(x)|(\sin x)^{-1}$ *строго убывают на* $(0, \pi/2)$ *и имеют конечные пределы в точках* 0 *и* $\pi/2$.

Символом $\overline{S_0}$ *обозначим класс* 2π-*периодических функций* $\psi(x)$, *удовлетворяющих следующим условиям:*

1) $\psi(x)$ — *дифференцируема во всех точках* $x \in \mathbf{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$;

2) $\psi(x)$ *интерполирует* $\sin x$ *в нулях и точках экстремума функции* $\sin x$;

3) $\psi(x)$ *строго возрастает* (*строго убывает*) *на промежутках возрастания* (*убывания*) *функции* $\sin x$;

4) *график* $\psi(x)$ *симметричен относительно прямых* $x = \pi/2 + k\pi$ *и относительно точек* $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbf{Z}$;

5) *функции* $\psi(x)(\sin x)^{-1}$ *и* $\psi'(x)(\cos x)^{-1}$ *строго убывают на* $(0, \pi/2)$ *и имеют конечные пределы в точках* 0 *и* $\pi/2$.

***Замечание* 1.** Как следует из теоремы 1, $\varphi(x) = \varphi_{2r-1}(x) K_{2r-1}^{-1} \in \underline{S_0}$, а $\psi(x) = \varphi_{2r}(x) K_{2r}^{-1} \in \overline{S_0}$.

***Замечание* 2.** Нетрудно видеть, что для функций $\varphi \in \underline{S_0}$ и $\psi \in \overline{S_0}$ во всех точках $x \in \mathbf{R}$ выполнены неравенства

$$|\varphi(x)| \le |\cos x|, \qquad |\psi(x)| \ge |\sin x|, \tag{2.1}$$

причем оба неравенства строгие для $x \ne k\pi$ и $x \ne \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Неравенства (2.1) следуют из строгого убывания на $(0, \pi/2)$ функций $\varphi(x)(\cos x)^{-1}$ и $\psi(x)(\sin x)^{-1}$ соответственно; при этом учтено, что $|\varphi(0)| = |\psi(\pi/2)| = 1$.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi \in \underline{S_0}$, $\psi \in \overline{S_0}$. *Для любого фиксированного* $t \in [0, \pi/2]$ *каждая из функций*

$$F_\varphi(x) = \frac{\varphi^2(x) - \varphi^2(t)}{\cos^2 x - \cos^2 t} \quad \text{и} \quad F_\psi(x) = \frac{\psi^2(x) - \psi^2(t)}{\sin^2 x - \sin^2 t}$$

строго убывает в $[0, \pi/2] \setminus \{t\}$, *т. е. если* $x_1, x_2 \in [0, \pi/2] \setminus \{t\}$ *и* $x_1 < x_2$, *то* $F_\varphi(x_1) > F_\varphi(x_2)$ *и* $F_\psi(x_1) > F_\psi(x_2)$.

Доказательство. Покажем, что $F_\varphi'(x) < 0$ для $x \in (0, \pi/2)$, $x \ne t$. Для любого $x \in (0, \pi/2)$, $x \ne t$, имеем

$$F_\varphi'(x) = 2\frac{\varphi(x)\varphi'(x)(\cos^2 x - \cos^2 t) + \cos x \sin x\,(\varphi^2(x) - \varphi^2(t))}{(\cos^2 x - \cos^2 t)^2}. \tag{2.2}$$

Рассмотрим два случая: $x \in (0, t)$ и $x \in (t, \pi/2)$. Пусть сначала $x \in (0, t)$. Поскольку функции $\varphi(x)$ и $\cos x$ убывают на $(0, \pi/2)$, то доказываемое неравенство $F_\varphi'(x) < 0$, ввиду (2.2), можно переписать в виде

$$\frac{\varphi(x)}{\cos x}\,\frac{|\varphi'(x)|}{\sin x} > \frac{\varphi^2(x) - \varphi^2(t)}{\cos^2 x - \cos^2 t}. \tag{2.3}$$

В силу теоремы Коши найдется $\xi \in (x, t)$ такое, что

$$\frac{\varphi^2(x) - \varphi^2(t)}{\cos^2 x - \cos^2 t} = -\frac{\varphi(\xi)\,\varphi'(\xi)}{\cos\xi \sin\xi}. \tag{2.4}$$

Теперь неравенство (2.3) примет вид

$$\frac{\varphi(x)}{\cos x}\frac{|\varphi'(x)|}{\sin x} > \frac{\varphi(\xi)}{\cos\xi}\frac{|\varphi'(\xi)|}{\sin\xi}.$$

Последнее неравенство следует из п. 5 определения класса $\underline{S_0}$. Тем самым неравенство $F_\varphi'(x) < 0$ для $x \in (0, t)$ доказано.

Пусть теперь $x \in (t, \pi/2)$. Тогда, учитывая убывание $\varphi(x)$ и $\cos x$ на $(0, \pi/2)$, с помощью (2.2) записываем доказываемое неравенство $F_\varphi'(x) < 0$ в виде

$$\frac{\varphi(x)}{\cos x}\frac{|\varphi'(x)|}{\sin x} < \frac{\varphi^2(x) - \varphi^2(t)}{\cos^2 x - \cos^2 t}. \tag{2.5}$$

Снова согласно теореме Коши найдется $\eta \in (t, x)$ такое, что

$$\frac{\varphi^2(x) - \varphi^2(t)}{\cos^2 x - \cos^2 t} = -\frac{\varphi(\eta)\,\varphi'(\eta)}{\cos\eta \sin\eta}. \tag{2.6}$$

Представим неравенство (2.5) в виде

$$\frac{\varphi(x)}{\cos x}\frac{|\varphi'(x)|}{\sin x} < \frac{\varphi(\eta)}{\cos\eta}\frac{|\varphi'(\eta)|}{\sin\eta}.$$

Последнее неравенство следует из п. 5 определения класса $\underline{S_0}$. Тем самым доказано, что $F_\varphi'(x) < 0$ и в случае $x \in (t, \pi/2)$.

Осталось доказать, что $F_\varphi(x_1) > F_\varphi(x_2)$ в случае $x_1 \in (0, t)$, $x_2 \in (t, \pi/2)$. Но это непосредственно следует из (2.4) и (2.6) в силу п. 5 определения класса $\underline{S_0}$.

Таким образом, строгое убывание функции $F_\varphi(x)$ на $[0, \pi/2]\setminus\{t\}$ установлено. Аналогично доказывается строгое убывание на $[0, \pi/2]\setminus\{t\}$ функции $F_\psi(x)$.

Теорема доказана.

***Замечание* 3.** Из доказательства теоремы видно, что функции $F_\varphi(x)$ и $F_\psi(x)$ можно доопределить в точке $x = t$ так, что они будут строго убывать на $[0, \pi/2]$.

***Замечание* 4.** Поскольку значения функций $F_\varphi(x)$ и $F_\psi(x)$ не изменяются при замене t на $t + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, или на $-t$, доопределенные функции $F_\varphi(x)$ и $F_\psi(x)$ строго убывают на $[0, \pi/2]$ при любом фиксированном $t \in \mathbf{R}$.

3. Классы $\underline{S}$ и $\overline{S}$. Приближение константами функций этих классов в пространстве L_0. Поскольку для любого $\tau \in \mathbf{R}$ и для любой функции $f \in L_p$ справедливо равенство $E_0(f(\cdot + \tau))_p = E_0(f)_p$, изучая приближение константами функций классов $\underline{S_0}$ и $\overline{S_0}$, естественно расширить определения этих классов, добавив в эти классы всевозможные сдвиги $f(\cdot + \tau)$ функций f из $\underline{S_0}$ и $\overline{S_0}$. Соответствующие расширенные классы будем обозначать символами $\underline{S}$ и $\overline{S}$. Таким образом,

$$\underline{S} := \{f : \exists \tau \in R \;\; f(\cdot + \tau) \in \underline{S_0}\}, \qquad \overline{S} := \{f : \exists \tau \in R \;\; f(\cdot + \tau) \in \overline{S_0}\}.$$

Существенное отличие свойств функций $\varphi \in \underline{S}$ и $\psi \in \overline{S}$ заключается в том, что график подходящего сдвига $|\varphi(x)|$ находится ниже графика $|\sin x|$ во всех точках x, кроме $x = k\pi$ и $x = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, а график подходящего сдвига $|\psi(x)|$ — выше графика $|\sin x|$ во всех этих точках (см. замечание к определению классов $\underline{S_0}$ и $\overline{S_0}$). Но именно этим обстоятельством (точнее различием в п. 5) определений классов $\underline{S_0}$ и $\overline{S_0}$, влекущим за собой отмеченное отличие в свойствах графиков функций $\varphi \in \underline{S_0}$ и $\psi \in \overline{S_0}$, вызвано существенное отличие в свойствах наилучших приближений константами в пространствах L_p, $p < 1$, функций классов $\underline{S}$ и $\overline{S}$. Особенно резко выражено отличие этих свойств в пространстве L_0. Это видно из следующей теоремы.

Теорема 3. *Для любого* $a \in [-1, 1]$

$$\|\sin(\cdot) + a\|_0 = \|\sin(\cdot)\|_0. \tag{3.1}$$

Вместе с тем для любых $\varphi \in \underline{S}$, $\psi \in \overline{S}$ *функция* $N_\varphi(a) := \|\varphi + a\|_0$ *строго возрастает на* $[0, 1]$, *а функция* $N_\psi(a) := \|\psi + a\|_0$ *строго убывает на* $[0, 1]$. *В частности, для любого* $a \in [-1, 1]$

$$E_0(\sin(\cdot))_0 = \|\sin(\cdot) + a\|_0, \tag{3.2}$$

$$E_0(\varphi)_0 = \|\varphi\|_0, \qquad E_0(\psi)_0 = \|\psi \pm 1\|_0. \tag{3.3}$$

Доказательство. Докажем равенство (3.1). Зафиксируем $a \in [-1, 1]$ и пусть $\alpha = \arcsin a$. Тогда

$$\int_0^{2\pi} \ln|a + \sin x|dx = \int_0^{2\pi} \ln|\sin\alpha + \sin x|dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \ln 2\,dx + \int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{\alpha + x}{2}\right|dx + \int_0^{2\pi} \ln\left|\cos\frac{\alpha - x}{2}\right|dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \ln 2\,dx + \int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|dx + \int_0^{2\pi} \ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|dx = \int_0^{2\pi} \ln|\sin x|dx.$$

Отсюда в силу определения $\|\cdot\|_0$ следует равенство (3.1).

Докажем строгое возрастание функции $N_\varphi(a) := \|\varphi + a\|_0$. Зафиксируем произвольные $a_1, a_2 \in [0, 1]$, $a_1 < a_2$. Переходя, если нужно, к подходящему сдвигу функции φ, можно считать, что $\varphi \in \underline{S_0}$. Тогда в силу п. 3 определения класса $\underline{S_0}$ функция $\varphi^2(t)$ строго убывает на $[0, \pi/2]$. Поэтому существуют точки $t_1, t_2 \in [0, \pi/2]$, $t_1 > t_2$, такие, что $\varphi^2(t_1) = a_1^2$, $\varphi^2(t_2) = a_2^2$. Из теоремы 2 и замечаний к ней следует, что при любом фиксированном $x \in \mathbf{R}$ имеет место неравенство

$$\frac{\varphi^2(x) - \varphi^2(t_1)}{\cos^2 x - \cos^2 t_1} < \frac{\varphi^2(x) - \varphi^2(t_2)}{\cos^2 x - \cos^2 t_2}. \tag{3.4}$$

При этом в силу п. 3 определения класса $\underline{S_0}$ и левая, и правая части неравенства (3.4) положительны. Поэтому из (3.4) получаем

$$\int_0^{2\pi} \ln\left|\frac{\varphi^2(x) - \varphi^2(t_1)}{\varphi^2(x) - \varphi^2(t_2)}\right| dx < \int_0^{2\pi} \ln\left|\frac{\cos^2 x - \cos^2 t_1}{\cos^2 x - \cos^2 t_2}\right| dx. \tag{3.5}$$

Учитывая очевидные равенства $\|\varphi - a\|_0 = \|\varphi + a\|_0$, $\|\cos(\cdot) - a\|_0 = \|\cos(\cdot) + a\|_0$, можно записать неравенство (3.5) в виде

$$\int_0^{2\pi} \ln \frac{|\varphi(x) + a_1|}{|\varphi(x) + a_2|}\, dx < \int_0^{2\pi} \ln \frac{|\cos x + \cos t_1|}{|\cos x + \cos t_2|}\, dx. \tag{3.6}$$

В силу (3.1) правая часть (3.6) равна нулю. Таким образом,

$$\int_0^{2\pi} \ln|\varphi(x) + a_1|\, dx < \int_0^{2\pi} \ln|\varphi(x) + a_2|\, dx. \tag{3.7}$$

Тем самым строгое возрастание функции $N_\varphi(a)$ на $[0, 1]$ доказано.

Докажем строгое убывание на $[0, 1]$ функции $N_\psi(a)$. Зафиксируем произвольные $a_1, a_2 \in [0, 1]$, $a_1 < a_2$. Переходя, если нужно, к подходящему сдвигу функции ψ, можем считать, что $\psi \in \overline{S_0}$. Тогда в силу п. 3 определения класса $\overline{S_0}$ функция $\psi^2(t)$ строго возрастает на $[0, \pi/2]$. Поэтому существуют точки $t_1, t_2 \in [0, \pi/2]$, $t_1 < t_2$, такие, что $\psi^2(t_1) = a_1^2$, $\psi^2(t_2) = a_2^2$. Из теоремы 2 и замечаний к ней следует, что при любом фиксированном $x \in \mathbf{R}$ имеет место неравенство

$$\frac{\psi^2(x) - \psi^2(t_1)}{\sin^2 x - \sin^2 t_1} > \frac{\psi^2(x) - \psi^2(t_2)}{\sin^2 x - \sin^2 t_2}. \tag{3.8}$$

Проведя рассуждения, аналогичные тем, с помощью которых из неравенства (3.4) было получено неравенство (3.7), из неравенства (3.8) получим следующее неравенство:

$$\int_0^{2\pi} \ln|\psi(x) + a_1|\, dx > \int_0^{2\pi} \ln|\psi(x) + a_2|\, dx.$$

Тем самым строгое убывание функции $N_\psi(a)$ на $[0, 1]$ доказано.

Теорема доказана.

4. Класс W. Теорема сравнения перестановок $r(|\varphi + a|, \cdot)$, $\varphi \in W$. С целью распространить некоторые утверждения теоремы 3 на пространства L_p, $p \in (0, 1)$, докажем в этом пункте теорему сравнения перестановок функций вида $\varphi + a$, где $\varphi \in \underline{S}$ или $\varphi \in \overline{S}$. Для этого нам необходимо будет наложить дополнительные требования выпуклости на функции этих классов и их производные. В связи с этим введем соответствующий класс функций W.

Сначала определим класс W_0. Будем говорить, что непрерывная 2π-периодическая функция φ принадлежит классу W_0, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $\varphi(x)$ — дважды дифференцируема во всех точках $x \in \mathbf{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$;

2) $\varphi(x)$ строго возрастает (строго убывает) на промежутках возрастания (убывания) функции $\sin x$;

3) график $\varphi(x)$ симметричен относительно прямых $x = \pi/2 + k\pi$ и точек $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbf{Z}$;

4) $\varphi(x)$ строго выпукла вверх (вниз) на промежутках выпуклости вверх (вниз) функции $\sin x$, а $\varphi'(x)$ выпукла вверх (вниз) на промежутках выпуклости вверх (вниз) функции $\cos x$.

Для удобства будем считать, что функции $\varphi \in W_0$ нормированы условием

$$\|\varphi\|_\infty = 1. \tag{4.1}$$

Символом W будем обозначать класс функций φ, для которых существует $\tau \in \mathbf{R}$ такое, что $\varphi(\cdot+\tau) \in W_0$. Ясно, что $\varphi_r / K_r \in W$ при $r \in \mathbf{N}$, $r > 1$.

Заметим, что в силу п. 2 определения класса W_0 для функции $\varphi \in W_0$ на интервале $(-1, 1)$ определена обратная функция со значениями в $(-\pi/2, \pi/2)$. Положим $g(y) := \varphi^{-1}(y)$, $s(y) := \pi/2 - g(y)$, $y \in (-1, 1)$. Ясно, что функция $g(y)$ строго возрастает, а функция $s(y)$ строго убывает на $(-1, 1)$.

Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $\varphi \in W_0$. *Тогда* $g'(y)$ *строго возрастает, а* $s'(y)$ *строго убывает на* $(0, 1)$. *При этом* $g'(y)$ *выпукла вниз на* $(-1, 1)$, *а* $s'(y)$ *выпукла вверх на* $(-1, 1)$.

Доказательство. Согласно теореме о производной обратной функции имеем

$$g'(y) = \frac{1}{\varphi'(x)}, \tag{4.2}$$

где $x = g(y)$, $y = \varphi(x)$. Отсюда

$$g''(y) = -\frac{\varphi''(x)}{[\varphi'(x)]^2}\, g'(y). \tag{4.3}$$

В силу п. 4 определения класса W функция φ строго выпукла вверх на $(0, \pi/2)$, а φ' — выпукла вверх на $(0, \pi/2)$. Поэтому из (4.2) следует, что $g'(y)$ строго возрастает на $(0, 1)$, а $s'(y)$ строго убывает на $(0, 1)$.

Поскольку в силу п. 3 определения класса W функция φ нечетная, из (4.2) следует, что g' — четная. Поэтому достаточно доказать строгую выпуклость вниз g' на $(0, 1)$. Снова принимая во внимание выпуклость вверх на $(0, \pi/2)$ функций φ и φ', заключаем, что функция $-(\varphi''(x))/[\varphi'(x)]^2$ неотрицательна и возрастает на $(0, \pi/2)$. Поэтому из (4.3) вытекает, что $g''(y)$ возрастает на $(0, 1)$, т. е. $g'(y)$ выпукла вниз на $(0, 1)$. Тогда $s'(y)$ — выпукла вверх на $(0, 1)$. Лемма доказана.

Для 2π-периодической функции f символом $r(|f|, t)$ будем обозначать перестановку сужения функции $|f|$ на отрезок длины 2π (см., например, [14, с. 111]).

Теорема 4. *Пусть* $\varphi \in W$, $0 \le a < b \le 1$. *Тогда разность* $\Delta(t) := r(|\varphi + a|, t) - r(|\varphi + b|, t)$, $t > 0$, *меняет знак* (с «$-$» *на* «$+$») *ровно один раз.*

Доказательство. Ясно, что теорему достаточно доказать для $a > 0$, $b < 1$. Зафиксируем такие a и b, $a < b$, и пусть $F_a(y) := \operatorname{mes}\{t \in [0, 2\pi] : |\varphi(t) + a| > y\}$, $y > 0$, — функция распределения $|\varphi(t) + a|$. Положим далее $R_{a,b}(y) := F_a(y) - F_b(y)$. Поскольку функции $y = r(|\varphi|, t)$ и $t = F_a(y)$ взаимно обратны, утверждение теоремы равносильно следующему утверждению: разность $R_{a,b}(y)$ меняет знак (с «$+$» на «$-$») ровно один раз. Докажем это утверждение. Ясно, что $R_{a,b}(y) = 0$ для $y \ge 1 + b$. Рассмотрим знак разности $R_{a,b}(y)$ в следующих промежутках: $(0, 1-b)$, $(1-b, 1-a)$, $(1-a, 1+a)$, $(1+a, 1+b)$.

Пусть сначала $y \in (0, 1-b)$. Тогда $F_a(y) = 2[s(y-a) + s(y+a)]$ и

$$R_{a,b}(y) = 2\{[s(y-a) + s(y+a)] - [s(y-b) + s(y+b)]\}. \tag{4.4}$$

Покажем, что при фиксированном $y \in (0, 1-b)$ функция

$$f_y(a) = s(y-a) + s(y+a) \tag{4.5}$$

строго убывает на $(0, 1)$. Для этого рассмотрим

$$f_y'(a) = s'(y+a) - s'(y-a). \tag{4.6}$$

Заметим, что $y-a,\ y+a \in (-1, 1)$, причем $|y-a| < y+a$, так как $y-a < y+a$ и $a-y < y+a$. Далее, в силу определения $s(y)$ функция $s'(y)$ четная и согласно лемме 1 строго убывает на $(0, 1)$. Поэтому $s'(y+a) < s'(y-a)$ и $f_y'(a) < 0$ в силу (4.6). Следовательно, $f_y(a)$ строго убывает на $(0, 1)$. Из (4.4) и (4.5) имеем $R_{a,b}(y) = 2(f_y(a) - f_y(b))$. Таким образом,

$$R_{a,b}(y) > 0, \quad y \in (0, 1-b). \tag{4.7}$$

Случай $y \in (1-b, 1-a)$ рассмотрим последним.

Пусть теперь $y \in (1-a, 1+a)$. Тогда $F_a(y) = s(y-a)$, $F_b(y) = s(y-b)$ и $R_{a,b}(y) = s(y-a) - s(y-b)$. Поскольку функция $s(y)$ строго убывает на $(-1, 1)$, то

$$R_{a,b}(y) < 0, \quad y \in (1-a, 1+a). \tag{4.8}$$

Пусть, далее, $y \in (1+a, 1+b)$. Тогда $F_a(y) = 0$, $F_b(y) = s(y-b)$ и $R_{a,b} = -s(y-b)$. Так как $y-b \in (-1, 1)$, а $s(y) > 0$ на $(-1, 1)$, то

$$R_{a,b}(y) < 0, \quad y \in (1+a, 1+b). \tag{4.9}$$

Осталось рассмотреть случай $y \in (1-b, 1-a)$. На этом промежутке $F_a(y) = s(y-a) + s(y+a)$, $F_b(y) = s(y-b)$. Следовательно, $R_{a,b}(y) = s(y-a) + s(y+a) - s(y-b)$. Из (4.7) – (4.9) видно, что $R_{a,b}(y)$ имеет перемену знака на промежутке $(1-b, 1-a)$. Покажем, что $R_{a,b}(y)$ меняет знак на этом промежутке ровно один раз. Предположим противное. Это предположение ввиду (4.7) и (4.9) означает, что $R_{a,b}(y)$ имеет на промежутке $(1-b, 1-a)$ не менее трех перемен знака. Но тогда согласно теореме Ролля функция $R''_{a,b}(y) = s''(y-a) + s''(y+a) - s''(y-b)$ меняет знак на $(1-b, 1-a)$. С другой стороны, в силу леммы 1 функция $s'(y)$ выпукла вверх на $(-1, 1)$. Поэтому $s''(y)$ убывает на $(-1, 1)$. Учитывая также, что $s''(y) \le 0$ на $(0, 1)$, и при этом $y+a \in (0, 1)$, получаем $s''(y-a) \le s''(y-b)$ и $s''(y+a) \le 0$. Следовательно, на рассматриваемом промежутке $(1-b, 1-a)$ имеет место неравенство $s''(y-a) + s''(y+a) - s''(y-b) \le 0$. Это противоречит ранее полученному заключению о том, что функция $R''_{a,b}(y)$ меняет знак на $(1-b, 1-a)$.

Полученное противоречие доказывает, что функция $R_{a,b}(y)$ меняет знак на $(1-b, 1-a)$ ровно один раз. В силу (4.7) – (4.9) $R_{a,b}(y)$ не имеет других перемен знака. Тем самым теорема доказана.

***Замечание* 5.** Несмотря на то, что $\varphi_1 / K_1 \notin W$, очевидно, теорема 4 справедлива и для $\varphi = \varphi_1 / K_1$.

Ключевым утверждением, позволяющим распространить некоторые результаты теоремы 3 на пространства L_p, $p \in (0, 1)$, наряду с теоремой 4 является следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть* $\varphi \in W$, $0 \le a < b \le 1$. *Если для некоторого* $s > 0$

$$\|\varphi + a\|_s \le \|\varphi + b\|_s, \tag{4.10}$$

то для всех $p > s$

$$\|\varphi + a\|_p < \|\varphi + b\|_p. \tag{4.11}$$

Доказательство. В силу теоремы 4 разность $r(|\varphi + a|, t) - r(|\varphi + b|, t)$, $t > 0$, меняет знак (с «$-$» на «$+$») ровно один раз. Очевидно, что то же самое верно и для разности $r^s(|\varphi + a|, t) - r^s(|\varphi + b|, t)$. Отсюда, ввиду (4.10), следует неравенство

$$\int_0^x r^s(|\varphi + a|, t)\,dt \le \int_0^x r^s(|\varphi + b|, t)\,dt, \quad x \in (0, 2\pi), \tag{4.12}$$

причем на множестве положительной меры неравенство в (4.12) строгое, так как $a < b$. Из (4.12) следует (см., например, предложение 1.3.10 [15]) неравенство $\|\varphi + a\|_p \le \|\varphi + b\|_p$. Покажем, что последнее неравенство строгое. Положим $f(t) := r^{p-s}(|\varphi + a|, t)$, $g(t) := r^s(|\varphi + a|, t) - r^s(|\varphi + b|, t)$. Согласно (4.12) для первообразной $g_1(t) := \int_0^t g(u)\,du$ выполняется неравенство

$$g_1(t) \le 0, \quad t \in (0, 2\pi), \tag{4.13}$$

причем $\operatorname{mes}\{t \in [0, 2\pi] : g_1(t) < 0\} > 0$. Интегрируя по частям и учитывая равенства $f(2\pi) = 0$, $g_1(0) = 0$, получаем

$$\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\,dg_1(t) =$$

$$= g_1(2\pi)f(2\pi) - g_1(0)f(0) - \int_0^{2\pi} f'(t)g_1(t)\,dt = -\int_0^{2\pi} f'(t)g_1(t)\,dt. \tag{4.14}$$

Заметим, что $f'(t) < 0$ почти всюду на $(0, 2\pi)$. Поэтому из (4.13), (4.14) и соотношения $\operatorname{mes}\{t \in [0, 2\pi] : g_1(t) < 0\} > 0$ следует неравенство $\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt <$ < 0, т. е.

$$\int_0^{2\pi} r^p(|\varphi + a|, t)\,dt < \int_0^{2\pi} r^{p-s}(|\varphi + a|, t)\, r^s(|\varphi + b|, t)\,dt.$$

Применяя к правой части последнего соотношения неравенство Гельдера с показателями $p/(p-s)$ и p/s, получаем

$$\int_0^{2\pi} r^p(|\varphi + a|, t)\,dt < \left(\int_0^{2\pi} r^p(|\varphi + a|, t)\,dt\right)^{(p-s)/p} \left(\int_0^{2\pi} r^p(|\varphi + b|, t)\,dt\right)^{s/p}.$$

Отсюда непосредственно следует (4.11).

Теорема доказана.

5. Приближение функций класса W константами в пространствах L_p, $p \in (0, 1)$. Из критерия элемента наилучшего приближения в пространствах L_p, $p \ge 1$, легко следует равенство

$$E_0(\varphi)_p = \|\varphi\|_p \tag{5.1}$$

для функций класса W. Этот факт в совокупности с равенством (3.3) теоремы 3 позволяют предположить, что для функций $\varphi \in W \cap \underline{S}$ равенство (5.1) справедливо для всех $p \ge 0$. Это утверждение доказывается ниже в теореме 6.

С другой стороны, в силу той же теоремы 3 для функций $\psi \in \overline{S}$ и для любого $a \in (0, 1)$ имеет место неравенство $\|\psi + a\|_0 < \|\psi\|_0$. Отсюда непосредственно следует, что равенство (5.1) не выполняется для функций $\varphi \in W \bigcap \overline{S}$ при малых $p > 0$. В следующей теореме исследуется структура множества тех $p > 0$, для которых равенство (5.1) справедливо для функций $\varphi \in W \bigcap \overline{S}$.

Теорема 6. *Справедливы следующие утверждения*:

1. *Пусть* $\varphi \in W \bigcap \underline{S}$, $p > 0$. *Тогда функция* $N_\varphi(a) := \|\varphi + a\|_p$ *строго возрастает на* $[0, 1]$. *В частности,*

$$E_0(\varphi)_p = \|\varphi\|_p.$$

2. *Для каждой функции* $\psi \in W \bigcap \overline{S}$ *существует* $p_0 \in (0, 1]$ *такое, что*

$$E_0(\psi)_p < \|\psi\|_p, \quad p < p_0, \tag{5.2}$$

а для $p > p_0$ *и и для любого* $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$,

$$\|\psi\|_p < \|\psi + a\|_p. \tag{5.3}$$

В частности,

$$E_0(\psi)_p = \|\psi\|_p, \quad p \geq p_0. \tag{5.4}$$

Доказательство. Зафиксируем $\varphi \in W \bigcap \underline{S}$, $p > 0$, $a, b \in [0, 1]$, $a < b$. В силу теоремы 3 $\|\varphi + a\|_0 < \|\varphi + b\|_0$. Поэтому существует $\varepsilon \in (0, p)$ такое, что для всех $s \in (0, \varepsilon)$ $\|\varphi + a\|_s < \|\varphi + b\|_s$. Тогда в силу теоремы 5 $\|\varphi + a\|_p < \|\varphi + b\|_p$. Тем самым строгое возрастание $N_\varphi(a)$ на $[0, 1]$ доказано.

Для доказательства второй части теоремы зафиксируем $\psi \in W \bigcap \overline{S}$ и положим $p_0 := \inf\{p \in (0, 1]: E_0(\psi)_p = \|\psi\|_p\}$. В силу теоремы 3 $p_0 > 0$. Из определения p_0 непосредственно следует (5.2).

Докажем (5.3). Ясно,что достаточно ограничиться случаем $a \in (0, 1]$. Зафиксируем такое a. В силу определения p_0 $\|\psi\|_{p_0} \leq \|\psi + a\|_{p_0}$. Тогда согласно теореме 5 для $p > p_0$ имеет место неравенство (5.3), а следовательно, и равенство (5.4).

Теорема доказана.

Заметим, что для идеального сплайна Эйлера первого порядка $\varphi = \varphi_1$ равенство (5.1) для $p \in (0, 1)$ легко проверяется непосредственными вычислениями. Далее, очевидно, что $\varphi_{2r-1} / K_{2r-1} \in W \bigcap \underline{S}$ для $r \in \mathbf{N}$, $r > 1$. Поэтому из первого утверждения вытекает такое следствие.

Следствие 1. *Для любых* $r \in \mathbf{N}$ *и* $p \in [0, 1)$

$$E_0(\varphi_{2r-1})_p = \|\varphi_{2r-1}\|_p.$$

Устремляя в полученном соотношении $r \to \infty$ и учитывая (1.7), получаем соотношение $E_0(\sin(\cdot))_p = \|\sin(\cdot)\|_p$, совпадающее с (0.4) при $n = 1$.

Другого рода приложения теоремы 6 представлены в следующем утверждении. Положим $W^r_\infty := \{x \in L^r_\infty : \|x^{(r)}\|_\infty \leq 1\}$.

Следствие 2. *Для любых* $r \in \mathbf{N}$ *и* $p \in (0, 1)$

$$\sup_{x \in W^{2r-1}_\infty} E_0(x)_p = \|\varphi_{2r-1}\|_p.$$

Доказательство. В работе [8] для функций $r \in L^r_\infty$ и $p > s > 0$ доказано точное неравенство

$$\|x - c_\infty(x)\|_p \le \frac{\|\varphi_r\|_p}{\|\varphi_r\|_s^{\frac{r+1/p}{r+1/s}}} \|x - c_\infty(x)\|_s^{\frac{r+1/p}{r+1/s}} \|x^{(r)}\|_\infty^{\frac{1/s-1/p}{r+1/s}},$$

где $c_\infty(x) = 2^{-1}[\max_t x(t) + \min_t x(t)]$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $s \to 0$ и учитывая, что $\|x - c_\infty(x)\|_\infty \le \|\varphi_r\|_\infty$, для функций $x \in W_\infty^r$ получаем $\|x - c_\infty(x)\|_p \le \|\varphi_r\|_p$. Отсюда имеем

$$E_0(\varphi_r)_p \le \sup_{x \in W_\infty^r} E_0(x)_p \le \|\varphi_r\|_p.$$

Из этого соотношения в силу следствия 1 вытекает следствие 2.

В связи со второй частью теоремы 6 возникает вопрос: может ли критическое значение p_0 для функций $\psi \in W \cap \overline{S}$ быть меньше 1? Следующая теорема дает положительный ответ, если функция удовлетворяет одному дополнительному условию.

Введем соответствующий класс функций $\hat{W}$. Будем говорить, что функция $\psi \in W$ принадлежит классу $\hat{W}$, если ее сдвиг $\varphi(\cdot) = \psi(\cdot + \tau)$ такой, что $|\varphi(0)| = \|\psi\|_\infty = 1$ удовлетворяет условию

$$\text{функция} \quad \frac{|\varphi'(x)|}{x} \quad \text{строго убывает на} \quad (0, \pi). \tag{5.5}$$

Замечание 6. Нетрудно видеть, что классу $\hat{W}$ принадлежит любая функция $\psi \in W$, у которой соответствующий сдвиг φ имеет строго выпуклую вверх на $(0, \pi)$ производную φ'. В частности, $\varphi_r / K_r \in \hat{W}$ для любого $r \in \mathbf{N}$, $r > 2$.

Теорема 7. *Пусть* $\varphi \in \hat{W}$. *Тогда для любого* $p \in [1/2, 1)$ *имеет место равенство*

$$E_0(\varphi)_p = \|\varphi\|_p. \tag{5.6}$$

Доказательство. Для доказательства (5.6) достаточно доказать неравенство

$$\frac{d}{da} \int_0^{2\pi} |\varphi(t) + a|^p dt > 0, \qquad a \in (0, 1)$$

(напомним, что мы считаем функции $\varphi \in W$ нормированными условием $\|\varphi\|_\infty = 1$). Ясно, что

$$\frac{1}{p}\frac{d}{da} \int_0^{2\pi} |\varphi(t) + a|^p dt = \int_0^{2\pi} (\varphi(t) + a)_+^{p-1} dt - \int_0^{2\pi} (\varphi(t) + a)_-^{p-1} dt.$$

Заметим, что интегралы в правой части последнего равенства конечны. Действительно, из п. 4 определения класса W вытекает существование τ, $b \in \mathbf{R}$, $\alpha > 0$ таких, что $|\varphi(t) + a| > \alpha |\varphi_1(t + \tau)/K_1 + b|$ для всех $t \in \mathbf{R}$. Отсюда следует конечность указанных интегралов, так как $|\varphi_1 / K_1 + b| \in L_{p-1}$.

Таким образом, для доказательства (5.6) достаточно установить неравенство

$$\int_0^{2\pi} (\varphi_r(t) + a)_+^{p-1} dt > \int_0^{2\pi} (\varphi_r(t) + a)_-^{p-1} dt, \qquad a \in (0, 1). \tag{5.7}$$

Переходя к подходящему сдвигу функции φ, можем считать, что $|\varphi(0)| =$

$= \|\varphi\|_\infty = 1$. Тогда в силу определения класса $\hat{W}$ для функции φ выполнено условие (5.5).

Зафиксируем $a \in (0, 1)$ и пусть x_0 — решение уравнения $\varphi(x) = a$ в промежутке $(0, \pi/2)$. Ясно, что тогда $\varphi(\pi - x_0) = -a$.

Выберем числа λ_1 и λ_2, удовлетворяющие условиям:

$$\operatorname{mes}\operatorname{supp}[\lambda_1^{-2}\varphi(\lambda_1(\cdot))]_+ = \operatorname{mes}\operatorname{supp}(\varphi + a)_+,$$

$$\operatorname{mes}\operatorname{supp}[\lambda_2^{-2}\varphi(\lambda_2(\cdot))]_- = \operatorname{mes}\operatorname{supp}(\varphi + a)_-.$$

Учитывая, что $\operatorname{mes}\operatorname{supp}(\varphi + a)_+ = 2(\pi - x_0)$, $\operatorname{mes}\operatorname{supp}(\varphi + a)_- = 2x_0$, а $\operatorname{mes}\operatorname{supp}[\lambda^{-2}\varphi(\lambda(\cdot))]_+ = \operatorname{mes}\operatorname{supp}[\lambda^{-2}\varphi(\lambda(\cdot))]_- = \pi/\lambda$, условия для λ_1 и λ_2 можно записать в виде

$$\frac{\pi}{2\lambda_1} = \pi - x_0, \qquad \frac{\pi}{2\lambda_2} = x_0. \tag{5.8}$$

Ясно, что

$$\lambda_1 < 1 < \lambda_2. \tag{5.9}$$

Докажем неравенства

$$(\varphi + a)_+(x) < \lambda_1^{-2}\varphi(\lambda_1 x) \quad \text{для} \quad |x| < \pi - x_0 \tag{5.10}$$

и

$$(\varphi - a)_+(x) > \lambda_2^{-2}\varphi(\lambda_2 x) \quad \text{для} \quad |x| < x_0. \tag{5.11}$$

Ввиду четности φ неравенства (5.10) и (5.11) достаточно доказать для $x \in (0, \pi - x_0)$ и $x \in (0, x_0)$ соответственно. Для доказательства (5.10) заметим, что

$$|\varphi'(\pi - x_0)| = |\varphi'(x_0)| < \lambda_1^{-1}|\varphi'(\lambda_1(\pi - x_0))|. \tag{5.12}$$

Действительно, с помощью (5.8) неравенство (5.12) можно переписать в виде $|\varphi'(x_0)| < \lambda_1^{-1}|\varphi'(\pi/2)|$. Но $|\varphi'(x_0)| \le |\varphi'(\pi/2)|$ в силу выпуклости φ', а $\lambda_1 < 1$. Тем самым (5.12) доказано. Далее заметим, что в силу выбора a и λ_1 имеем

$$(\varphi + a)_+(\pi - x_0) = \lambda_1\varphi(\lambda_1(\pi - x_0)) = 0. \tag{5.13}$$

Поэтому если в некоторой точке $x \in (0, \pi - x_0)$ неравенство (5.10) не выполняется, то в силу (5.12) и (5.13) найдется точка $x_1 \in (x, \pi - x_0)$ такая, что $|\varphi'(x_1)| = \lambda_1^{-1}|\varphi'(\lambda_1 x_1)|$, т. е. $\varphi'(x_1)/x_1 = \varphi'(\lambda_1 x_1)/(\lambda_1 x_1)$, что противоречит условию (5.5). Тем самым (5.10) доказано. Аналогично доказывается неравенство (5.11) с помощью неравенства $|\varphi'(x_0)| > \lambda_2^{-1}|\varphi'(\lambda_2 x_0)|$. Последнее неравенство можно записать в виде $|\varphi'(x_0)|/x_0 > |\varphi'(\lambda_2 x_0)|/\lambda_2 x_0$, и тогда оно непосредственно следует из условия (5.5) ввиду соотношения $\lambda_2 > 1$ (см. (5.9)).

Кроме неравенств (5.10) и (5.11) для доказательства (5.7) нам потребуется неравенство

$$\int_0^{2\pi/\lambda_1} (\lambda_1^{-2}\varphi(\lambda_1 x))_+^{p-1} dx \ge \int_0^{2\pi/\lambda_2} (\lambda_2^{-2}\varphi(\lambda_2 x))_+^{p-1}(x)\, dx. \tag{5.14}$$

Для доказательства (5.14) заметим, что для любого $\lambda > 0$

$$\int_0^{2\pi/\lambda} (\lambda^{-2}\varphi(\lambda x))_+^{p-1} dx = \lambda^{-2(p-1)} \int_0^{2\pi/\lambda} (\varphi(\lambda x))_+^{p-1} dx =$$

$$= \lambda^{-2(p-1)} \int_0^{2\pi} (\varphi(t))_+^{p-1} d(\lambda^{-1} t) = \lambda^{-2(p-1)-1} \int_0^{2\pi} \varphi_+(x)^{p-1} dx.$$

Теперь (5.14) можно переписать в виде $\lambda_1^{-2(p-1)-1} \geq \lambda_2^{-2(p-1)-1}$. Последнее неравенство очевидно, так как $\lambda_1 < \lambda_2$ в силу (5.9) и $-2(p-1)-1 < 0$ ввиду условия $p \geq 1/2$. Тем самым (5.14) доказано.

Докажем теперь (5.7). Применяя последовательно (5.10), (5.14), (5.11) и учитывая, что $p-1 < 0$, имеем

$$\int_0^{2\pi} (\varphi + a)_+^{p-1}(x) dx > \int_0^{2\pi/\lambda_1} (\lambda_1^{-2}\varphi(\lambda_1 x))_+^{p-1} dx \geq \int_0^{2\pi/\lambda_2} (\lambda_2^{-2}\varphi(\lambda_2 x))_+^{p-1} dx >$$

$$> \int_0^{2\pi} (\varphi - a)_+^{p-1}(x) dx = \int_0^{2\pi} (\varphi + a)_-^{p-1}(x) dx.$$

Последнее равенство вытекает из симметрии графика $\varphi(x)$ относительно точек $(\pi/2, 0)$ и $(3\pi/2, 0)$ и относительно прямой $x = \pi$.

Таким образом, (5.7) доказано. Тем самым теорема доказана.

***Замечание* 7.** Условиям теоремы 7 удовлетворяет любой сплайн $\varphi = \varphi_r / K_r$ при $r > 2$. Нетрудно также видеть, что теорема 7 справедлива и для $\varphi = \varphi_2$. Для этого достаточно заметить, что неравенства (5.10) и (5.11), на которых основано доказательство теоремы 7, справедливы и в этом случае. Более того, их доказательства для $\varphi = \varphi_2$ только упрощаются. Для этого нужно вместо условия (5.5) применить теорему сравнения Колмогорова (см., например, §5.6 [12]).

Таким образом, из теоремы 7 и замечания 7 вытекает такое следствие.

***Следствие* 3.** *Для любых* $r \in \mathbf{N}$ *и* $p \in [1/2, 1)$

$$E_0(\varphi_{2r})_p = \|\varphi_{2r}\|_p.$$

В дополнение к теоремам 6 и 7 приведем утверждение, показывающее, что константы ± 1 не могут быть константами наилучшего приближения функции φ_2 / K_2 в пространствах L_p, $p \in (0, 1)$.

Утверждение. *Для любого* $p \in (0, 1)$

$$E_0(\varphi_2/K_2)_p \neq \|\varphi_2/K_2 \pm 1\|_p.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\|\varphi_2 - \varphi_2(h)\|_p$, $h \in [0, \pi/2]$. Ясно, что

$$\|\varphi_2 - \varphi_2(h)\|_p^p = 4 \int_0^{\pi/2} \left\{ |\varphi_2(x) - \varphi_2(h)|^p + |\varphi_2(x) + \varphi_2(h)|^p \right\} dx$$

и

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dh}\left(\|\varphi_2 - \varphi_2(h)\|_p^p\right) = 4 \int_0^{\pi/2} \left\{ -\varphi_2'(h) |\varphi_2(x) - \varphi_2(h)|^{p-1} \operatorname{sgn}[\varphi_2(x) - \varphi_2(h)] \right\} dx +$$

$$+ 4 \int_0^{\pi/2} \left\{ \varphi_2'(h) |\varphi_2(x) + \varphi_2(h)|^{p-1} \operatorname{sgn}[\varphi_2(x) + \varphi_2(h)] \right\} dx =$$

$$= 4\varphi_2'(h)\left\{\int_0^h \frac{dx}{(\varphi_2(h)-\varphi_2(x))^{1-p}} - \int_h^{\pi/2} \frac{dx}{(\varphi_2(x)-\varphi_2(h))^{1-p}} + \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(\varphi_2(x)+\varphi_2(h))^{1-p}}\right\}.$$

Положим

$$I_1(h) := \int_0^h \frac{dx}{(\varphi_2(h)-\varphi_2(x))^{1-p}}, \qquad I_2(h) := \int_h^{\pi/2} \frac{dx}{(\varphi_2(x)-\varphi_2(h))^{1-p}},$$

$$U(h) := \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(\varphi_2(x)+\varphi_2(h))^{1-p}}.$$

Тогда

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dh}\left(\|\varphi_2-\varphi_2(h)\|_p^p\right) = 4\varphi_2'(h)[I_1(h)-I_2(h)+U(h)]. \tag{5.15}$$

Очевидно, что

$$\lim_{h\to\pi/2} U(h) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(\varphi_2(x)+K_2)^{1-p}} < \infty. \tag{5.16}$$

Покажем, что

$$\lim_{h\to\pi/2} \frac{I_2(h)}{I_1(h)} < 1. \tag{5.17}$$

Тогда из (5.15) – (5.17) будет следовать неравенство

$$\lim_{h\to\pi/2} \frac{d}{dh}\left(\|\varphi_2-\varphi_2(h)\|_p\right) > 0.$$

Тем самым утверждение будет доказано.

Итак, для завершения доказательства достаточно установить (5.17). Поскольку $\varphi_2(x) = x(\pi-x)/2$ для $x\in(0,\pi)$, то $\varphi_2(h)-\varphi_2(x) = [(\pi/2-x)^2 - (\pi/2-h)^2]/2$. Поэтому

$$I_1(h) = \int_0^h \frac{dx}{(\varphi_2(h)-\varphi_2(x))^{1-p}} = \int_0^h \frac{2^{1-p}dx}{[(\pi/2-x)^2-(\pi/2-h)^2]^{1-p}}.$$

Выполняя замену переменных $\pi/2-x = (\pi/2-h)t$, получаем

$$I_1(h) = 2^{1-p}\int_1^{\frac{\pi/2}{\pi/2-h}} \frac{(\pi/2-h)dt}{(\pi/2-h)^{2(1-p)}(t^2-1)^{1-p}} = \frac{2^{1-p}}{(\pi/2-h)^{1-2p}}\int_1^{\frac{\pi/2}{\pi/2-h}} \frac{dt}{(t^2-1)^{1-p}}. \tag{5.18}$$

Аналогично

$$I_2(h) = \int_h^{\pi/2} \frac{dx}{(\varphi_2(x)-\varphi_2(h))^{1-p}} = \int_h^{\pi/2} \frac{2^{1-p}dx}{[(\pi/2-h)^2-(\pi/2-x)^2]^{1-p}} =$$

$$= 2^{1-p}\int_0^1 \frac{(\pi/2-h)dt}{(\pi/2-h)^{2(1-p)}(1-t^2)^{1-p}} = \frac{2^{1-p}}{(\pi/2-h)^{1-2p}}\int_0^1 \frac{dt}{(1-t^2)^{1-p}}.$$

После замены переменных $1/t = y$ имеем

$$I_2(h) = \frac{2^{1-p}}{(\pi/2-h)^{1-2p}}\int_1^{\infty}\frac{1/y^2\,dy}{(1-1/y^2)^{1-p}} = \frac{2^{1-p}}{(\pi/2-h)^{1-2p}}\int_1^{\infty}\frac{dy}{y^{2p}(y^2-1)^{1-p}}. \quad (5.19)$$

Из (5.18) и (5.19) получаем

$$\lim_{h\to\pi/2}\frac{I_2(h)}{I_1(h)} = \lim_{h\to\pi/2}\frac{\int_1^{\infty}\frac{dy}{y^{2p}(y^2-1)^{1-p}}}{\int_1^{\frac{\pi/2}{\pi/2-h}}\frac{dt}{(t^2-1)^{1-p}}} = \frac{\int_1^{\infty}\frac{dy}{y^{2p}(y^2-1)^{1-p}}}{\int_1^{\infty}\frac{dt}{(t^2-1)^{1-p}}} < 1.$$

Тем самым (5.17) и утверждение доказаны.

1. *Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Физматгиз, 1948. – 456 с.
2. *Тихомиров В. М., Магарил-Ильяев Г. Г.* Неравенства для производных // Колмогоров А. Н. Избранные труды. Математика и механика. – М.: Наука, 1985. – С. 387 – 390.
3. *Арестов В. В., Габушин В. Н.* Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 11. – С. 44 – 66.
4. *Арестов В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. – 1996. – **51**, № 6. – С. 88 – 124.
5. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* Inequalities of Kolmogorov type and some their applications in approximation theory // Rend. Circ. mat. Palermo. Ser. II, Suppl. – 1998. – **52**. – P. 223 – 237.
6. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* On the exact inequalities of Kolmogorov type and some of their applications // New Approaches in Nonlinear Analysis. – Palm Harbor: Hadronic Press, 1999. – P. 9 – 50.
7. *Бабенко В. Ф.* Исследования днепропетровских математиков по неравенствам для производных периодических функций и их приложениям // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 1. – С. 9 – 29.
8. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* Comparison of rearrangement and Kolmogorov – Nagy type inequalities for periodic functions // Approximation Theory: A volume dedicated to Blagovest Sendov 2002 / Ed. B. D. Bojanov. – Darba, Sofia, 2002. – P. 24 – 53.
9. *Габушин В. Н.* Некоторые неравенства между производными функций // Методы регуляризации неустойчивых задач: Тр. Ин-та математики и механики УНЦ АН СССР. – 1976. – Вып. 23. – С. 20 – 26.
10. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Точные неравенства типа Колмогорова с ограниченной старшей производной в случае малых гладкостей // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 10. – С. 1298 – 1308.
11. *Пичугов С. А.* Аппроксимация сжатий периодических функций в пространствах L_p, $p < 1$ // Там же. – 1995. – **47**, № 12. – С. 1708 – 1711.
12. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – Киев: Наук. думка, 1976. – 320 с.
13. *Арестов В. В.* Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1982. – **45**, № 1. – С. 3 – 32.
14. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближений. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
15. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев: Наук. думка, 1992. – 304 с.

Получено 16.09.2003