УДК 517.524

Х. Й. Кучмінська (Нац. ун-т „Львів. політехніка"),
О. М. Сусь (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів),
С. М. Возна (Нац. ун-т „Львів. політехніка")

АПРОКСИМАТИВНІ ВЛАСТИВОСТІ ДВОВИМІРНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ДРОБІВ

By using the difference formula for approximations of a two-dimensional continued fraction, the fundamental inequalities method, the Stieltjes–Vitali theorem, and generalizations of divided and inverse differences, we establish truncation-error bounds of approximants of two-dimensional continued fractions with complex elements and estimates of real and imaginary parts of tails of two-dimensional continued fractions. We also prove an analog of the Van Fleck theorem and construct the Newton – Thiele-like interpolating formula.

За допомогою формули різниці для наближень двовимірного неперервного дробу, методу фундаментальних нерівностей, теореми Стільтьєса – Віталі та узагальнення розділених та обернених різниць встановлено оцінки точності наближень двовимірних неперервних дробів з комплексними елементами їх підхідними дробами, оцінки дійсної та уявної частин залишків двовимірних неперервних дробів, аналог теореми Ван Флека та побудовано інтерполяційну формулу типу Ньютона – Тіле.

1. Основні поняття та означення. Одним з найбільш поширених методів розвинення аналітичних функцій у певні типи функціональних неперервних дробів (C-, T-, M-дроби та інші) є принцип відповідності [1, 2]. Цей принцип відіграє суттєву роль як у теорії неперервних дробів, так і в багатовимірних їх узагальненнях [3 – 6].

Розглянемо двовимірний неперервний дріб (ДНД) з комплексними елементами

$$\mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{\infty} \frac{a_{ii}}{b_{ii} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{\infty} \dfrac{a_{ji}}{b_{ji}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{\infty} \dfrac{a_{ij}}{b_{ij}}}. \tag{1}$$

Неперервні дроби

$$\mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i+j,i}}{b_{i+j,i}}, \qquad \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i,i+j}}{b_{i,i+j}}, \quad i = 0, 1, \ldots,$$

називаються його i-ми гілками. В залежності від довжини гілок ДНД (1) можна утворювати різні види його наближень (підхідних дробів).

Означення 1. *Скінченний двовимірний неперервний дріб, що визначається формулою*

$$f_n := \mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{n-1} \frac{a_{ii}}{\Phi_i^{(n-1-i)}}, \qquad \Phi_i^{(k)} = b_{ii} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n-i} \frac{a_{i+j,i}}{b_{i+j,i}} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n-i} \frac{a_{i,i+j}}{b_{i,i+j}}, \qquad a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{C}, \tag{2}$$

називається n*-м наближенням ДНД* (1).

Означення 2. *Скінченний двовимірний неперервний дріб,* i*-ті* ($i = 0, 1, \ldots$) *гілки якого мають різну довжину, називається фігурним наближенням ДНД* (1).

Фігурне наближення, яке виникає із задачі відповідності між формальним подвійним степеневим рядом $\sum_{i,j \geq 0} c_{ij} x^i y^j$, $c_{ij} \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{C}$, і послідовністю раціональних наближень функції двох змінних [4, 7, 6], є скінченним ДНД вигляду

$$\tilde{f}_n = \mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{[(n-1)/2]} \frac{a_{ii}}{b_{ii} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{n-2i-1} \dfrac{a_{i+j,i}}{b_{i+j,i}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{n-2i-1} \dfrac{a_{i,i+j}}{b_{i,i+j}}}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

де $[s]$ — ціла частина невід'ємного числа s.

ДНД (1), наближення якого будуються за формулами (2), (3), можна розглядати як композицію дробово-лінійних відображень [6, 8]. Покажемо це на прикладі фігурного підхідного дробу (3).

Нехай $\{a_{ij}\}, \{b_{ij}\}$, $i, j = 0, 1, \ldots$, — задані послідовності комплексних чисел, причому $a_{ij} \neq 0$; z_{ij}, $i, j = 0, 1, \ldots$, і t — незалежні змінні.

Розглянемо одновимірні дробово-лінійні відображення

$$t_{ij}(z_{i+1,j}) = \frac{a_{ij}}{b_{ij} + z_{i+1,j}}, \quad i > j,$$

$$t_{ij}(z_{j,i+1}) = \frac{a_{ij}}{b_{ij} + z_{j,i+1}}, \quad i < j, \quad i, j = 0, 1, \ldots,$$

та їх композиції

$$S_{ii}(z_{i+1,i}) = z_{i+1,i}, \quad S_{ii}(z_{i,i+1}) = z_{i,i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots,$$

$$S_{i+1,i}(z_{i+2,i}) = t_{i+1,i}(z_{i+2,i}),$$

$$S_{i+k,i}(z_{i+k+1,i}) = S_{i+k-1,i}(t_{i+k,i}(z_{i+k+1,i})),$$

$$S_{i,i+1}(z_{i,i+2}) = t_{i,i+1}(z_{i,i+2}),$$

$$S_{i,i+k}(z_{i,i+k+1}) = S_{i,i+k-1}(t_{i,i+k}(z_{i,i+k+1})),$$

$$i = 0, 1, \ldots, \quad k \geq 2.$$

Визначимо дробово-лінійне відображення вигляду

$$w_k^{(p)}(t) = \frac{a_{pp}}{b_{pp} + S_{k-p-1,p}(z_{k-p,p}) + S_{p,k-p-1}(z_{p,k-p}) + t},$$

$$k = 1, 2, \ldots, \quad p = 0, 1, \ldots, [(k-1)/2].$$

Нехай

$$\overline{z_k^{(p)}} = \{z_{k-p,p}, \ z_{p,k-p}, \ k = 1, 2, \ldots, \ p = 0, 1, \ldots, [(k-1)/2]\}$$

— вектор, розмірність якого $2([(k-1)/2] + 1)$.

Покладемо

$$T_{n,0}\left(\overline{z_n^0}\right) = w_n^{(0)}(t), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$T_{n,m}\left(\overline{z_n^{(m)}}\right) = T_{n,m-1}\left(w_n^{(m)}(t)\right), \quad n = 1, 2, \ldots, \quad m = 0, 1, \ldots, [(n-1)/2]. \tag{4}$$

Тоді легко показати, що

$$T_{n,m}\left(\overline{z_n^{(m)}}\right) = w_n^{(0)}\left(w_n^{(1)}\left(w_n^{(2)} \ldots \left(w_n^{(m)}(t)\right) \ldots\right)\right).$$

Поклавши в (4) замість $\overline{z_n^{(m)}}$ нуль-вектор $(m = [(n-1)/2])$ та $t = 0$, одержимо n-те наближення ДНД (1), що визначається формулою (3).

Вважаємо, що f_n, $\tilde{f}_n$ мають сенс, якщо в процесі згортання дробу не виникає невизначеності $0/0$.

Під нескінченним ДНД (1) розуміємо $\lim\limits_{n\to\infty} T_{n,[(n-1)/2]}(\overline{0})$.

Означення 3. *Двовимірний неперервний дріб* (1) *називається збіжним, якщо існує скінченна границя послідовності його наближень* $\{f_n\}$. *Величина цієї границі називається значенням нескінченного ДНД* (1).

Означення 4. *ДНД* (1) *називається абсолютно збіжним, якщо збіжний ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| f_{n+1} - f_n \right|,$$

де f_n, $n = 1, 2, \ldots$, *визначаються формулою* (2).

Означення 5. *ДНД* (1) *називається фігурно збіжним, якщо фігурні наближення* $\tilde{f}_n$ *мають сенс та існує скінченна границя послідовності* $\{\tilde{f}_n\}$.

У випадку ДНД (1) із додатними елементами зі звичайної збіжності дробу випливає збіжність фігурна [8].

Двомірні неперервні дроби вигляду

$$Q_i^{(n-1)} = b_{ii} + \frac{a_{i+1,i}}{Q_{1,i+1}^{(n-i-1)}} + \frac{a_{i,i+1}}{Q_{2,i+1}^{(n-i-1)}} + \frac{a_{i+1,i+1}}{Q_{i+1}^{(n-1)}}, \tag{5}$$

$$Q_{1,i+k}^{(n-i-1)} = b_{i+k,i} + \frac{a_{i+k+1,i}}{Q_{1,i+k+1}^{(n-i-1)}}, \qquad Q_{2,i+k}^{(n-i-1)} = b_{i,i+k} + \frac{a_{i,i+k+1}}{Q_{2,i+k+1}^{(n-i-1)}}, \tag{6}$$

$$i = 0, 1, \ldots, n-1, \qquad k = 1, \ldots, n-i-1,$$

та

$$Q_i^{[(n-1)/2]} = b_{ii} + \frac{a_{i+1,i}}{Q_{1,i+1}^{(n-2i-1)}} + \frac{a_{i,i+1}}{Q_{2,i+1}^{(n-2i-1)}} + \frac{a_{i+1,i+1}}{Q_{i+1}^{[(n-1)/2]}}, \tag{7}$$

$$Q_{1,i+k}^{(n-2i-1)} = b_{i+k,i} + \frac{a_{i+k+1,i}}{Q_{1,i+k+1}^{(n-2i-1)}}, \qquad Q_{2,i+k}^{(n-2i-1)} = b_{i,i+k} + \frac{a_{i,i+k+1}}{Q_{2,i+k+1}^{(n-2i-1)}}, \tag{8}$$

$$i = 0, 1, \ldots, [(n-1)/2], \qquad k = 1, 2, \ldots, n-2i-1,$$

називаються залишками ДНД (1), які відповідають наближенням (2) і (3) відповідно.

При дослідженні властивостей багатовимірних узагальнень неперервних дробів використовується формула різниці між підхідними дробами різних порядків. Для різниць наближень m- та n-го порядків ($m > n$), що визначаються формулами (2) і (3) (за умови, що всі залишки (5) – (8) відмінні від нуля), формула різниці має вигляд

$$f_m - f_n = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \prod_{j=0}^{i} \frac{a_{jj}}{Q_j^{(m-1-i)} Q_j^{(n-1-i)}} \left(\Phi_i^{(m-1-i)} - \Phi_i^{(n-1-i)} \right) +$$

$$+ (-1)^n \prod_{j=0}^{n} \frac{a_{jj}}{Q_j^{(m-1-j)} Q_j^{(n-1-j)}} \tag{9}$$

та

$$\tilde{f}_m - \tilde{f}_n = \sum_{i=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^{n-i} \prod_{j=0}^{i} \frac{a_{jj}}{Q_j^{[(m-1)/2]} Q_j^{[(n-1)/2]}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-2i} a_{i+k,i}}{\prod\limits_{k=1}^{n-2i} Q_{1,i+k}^{(m-2i-1)} \prod\limits_{k=1}^{n-2i-1} Q_{1,i+k}^{(n-2i-1)}} + \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-2i} a_{i,i+k}}{\prod\limits_{k=1}^{n-2i} Q_{2,i+k}^{(m-2i-1)} \prod\limits_{k=1}^{n-2i-1} Q_{2,i+k}^{(n-2i-1)}} \right\} +$$

$$+ (-1)^{[(n-1)/2]+1} \prod_{j=0}^{[(n-1)/2]} \frac{a_{jj}}{Q_j^{[(m-1)/2]} Q_j^{[(n-1)/2]}} \tag{10}$$

відповідно.

Основними методами дослідження збіжності багатовимірних узагальнень неперервних дробів є метод, що базується на теоремі Стільтьєса – Віталі про збіжність аналітичних функцій, метод мажорант та метод фундаментальних нерівностей [3].

Надалі будемо розглядати ДНД (1) з наближеннями вигляду (2) та (3).

2. Метод фундаментальних нерівностей. Вважаємо, що для ДНД (1) виконуються фундаментальні нерівності, якщо

$$Q_i^{(p)} \neq 0, \quad Q_{j,i+k}^{(s)} \neq 0, \quad j = 1,2, \quad i = \overline{0,p}, \quad k = \overline{1,s}, \tag{11}$$

та існують такі додатні сталі M, ρ_k, $k = 1, 2, \ldots$, що для довільних p та s

$$\frac{|a_{00}|}{\left|Q_0^{(p)}\right|} \leq M, \tag{12}$$

$$\frac{\left|a_{i+k,i}\right|}{\left|Q_{1,i+k-1}^{(s)}\right|\left|Q_{1,i+k}^{(s)}\right|} \leq \rho_{i+k}, \quad \frac{\left|a_{i,i+k}\right|}{\left|Q_{2,i+k-1}^{(s)}\right|\left|Q_{2,i+k}^{(s)}\right|} \leq \rho_{i+k}, \tag{13}$$

$$i = \overline{0,p}, \quad k = \overline{1,s},$$

$$\frac{|a_{ii}|}{\left|Q_{i-1}^{(p)}\right|\left|Q_i^{(p)}\right|} \leq \rho_i, \quad i = \overline{1,p}. \tag{14}$$

Теорема 1. *Нехай для ДНД* (1) *виконуються фундаментальні нерівності* (11) – (14) *і*

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{k} \prod_{j=1}^{k-i} \rho_j = 0.$$

Тоді ДНД (1) *збігається і справджується нерівність*

$$\left|f - \tilde{f}_n\right| \leq 2M \sum_{i=0}^{[(n-1)/2]+1} \prod_{j=1}^{n-i} \rho_j.$$

Доведення. Використаємо формулу різниці між підхідними дробами (10). Подаючи добутки, що стоять у знаменнику цієї формули, у вигляді

$$Q_0^{(m)} \prod_{j=0}^{i/2-1} Q_{2j}^{(n)} Q_{2j+1}^{(n)} \prod_{j=1}^{i/2} Q_{2j-1}^{(m)} Q_{2j}^{(m)} \times$$

$$\times\ Q_i^{(n)} Q_{j,i+1}^{(n-2i-1)} \prod_{k=1}^{(n-2i)/2} Q_{j,i+2k-1}^{(m-2i-1)} Q_{j,i+2k}^{(m-2i-1)} \prod_{k=1}^{(n-2i-2)/2} Q_{j,i+2k}^{(n-2i-1)} Q_{j,i+2k+1}^{(n-2i-1)},$$

якщо $i = 2k$, $k = 0, 1, \ldots$, $j = 1, 2$, або у вигляді

$$Q_0^{(m)} \prod_{j=0}^{[i/2]} Q_{2j}^{(n)} Q_{2j+1}^{(n)} \prod_{j=1}^{[i/2]} Q_{2j-1}^{(m)} Q_{2j}^{(m)} Q_i^{(m)} Q_{j,i+1}^{(m-2i-1)} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{(n-2i-1)/2} Q_{j,i+2k-1}^{(n-2i-1)} Q_{j,i+2k}^{(n-2i-1)} \prod_{k=1}^{(n-2i-1)/2} Q_{j,i+2k}^{(m-2i-1)} Q_{j,i+2k+1}^{(m-2i-1)},$$

якщо $i = 2k+1$, $k = 0, 1, \ldots$, $j = 1, 2$, і застосовуючи нерівності (12) – (14), після нескладних перетворень одержуємо оцінку для $\left|\tilde{f}_m - \tilde{f}_n\right|$, з якої граничним переходом при $m \to \infty$ отримуємо твердження теореми.

Наслідок. *Якщо для ДНД* (1) *виконуються фундаментальні нерівності* (11) – (14) *та всі* $\rho_j = \rho$, $j = 0, 1, \ldots$, *причому* $0 < \rho < 1$, *то справджується нерівність*

$$\left|f - \tilde{f}_n\right| \le \frac{2M}{1-\rho}\rho^{[(n-1)/2]+1}.$$

Теорема 2. *Нехай для ДНД* (1) *виконуються нерівності* (11), (12) *та існують такі додатні сталі* $L_1, L_2, \rho, \rho_1, \rho_2$, *що*

$$\frac{\left|a_{i+1,i}\right|}{\left|Q_i^{(s)}\right|\left|Q_{1,i+1}^{(s-2i-1)}\right|} \le L_1, \quad \frac{\left|a_{i,i+1}\right|}{\left|Q_i^{(s)}\right|\left|Q_{2,i+1}^{(s-2i-1)}\right|} \le L_2, \quad \frac{\left|a_{ii}\right|}{\left|Q_{i-1}^{(s)}\right|\left|Q_i^{(s)}\right|} \le \rho,$$

$$\frac{\left|a_{i+k,i}\right|}{\left|Q_{1,i+k-1}^{(s-2i-1)}\right|\left|Q_{1,i+k}^{(s-2i-1)}\right|} \le \rho_1, \quad \frac{\left|a_{i,i+k}\right|}{\left|Q_{2,i+k-1}^{(s-2i-1)}\right|\left|Q_{2,i+k}^{(s-2i-1)}\right|} \le \rho_2,$$

$$\rho > \rho_l^2, \quad l = 1, 2, \quad i = \overline{1,s}, \quad k = \overline{2, s-2i-1}.$$

Тоді ДНД (1) *збігається і справедлива оцінка*

$$\left|f - \tilde{f}_n\right| \le M\rho^{[(n-1)/2]+1}\left\{\frac{L_1}{\rho - \rho_1^2} + \frac{L_2}{\rho - \rho_2^2} + 1\right\}.$$

Доведення цієї теореми проводиться за схемою доведення теореми 1.

Зауваження. Якщо в теоремі 2 покладемо

$$L_1 = L_2 = \frac{4\beta}{\left(1 + \sqrt{1-4\beta}\right)\left(\sqrt{1-4\beta} + \sqrt{1-8\beta}\right)},$$

$$\rho = \frac{\sqrt{1-4\beta} - \sqrt{1-8\beta}}{\sqrt{1-4\beta} + \sqrt{1-8\beta}}, \quad \rho_1 = \rho_2 = \frac{1 - \sqrt{1-4\beta}}{1 + \sqrt{1-4\beta}},$$

то одержимо аналог теореми Ворпіцького для двовимірних неперервних дробів при $\beta < 1/8$ [6].

При дослідженні збіжності багатовимірних узагальнень неперервних дробів для їх залишків, що визначені формулами (5) – (8), використовуються оцінки, отримані методом мажорант [3, 6, 8]. Однак можна отримати оцінки цих залишків, використовуючи зображення їх дійсних та уявних частин [9].

Нехай частинні знаменники ДНД (1) b_{kj}, $k, j = 0, 1, \ldots$, є додатними, а частинні чисельники задовольняють умови

$$a_{kk} = \left|a_{kk}\right|\exp(i\psi_{kk}), \quad a_{kj} = \left|a_{kj}\right|\exp(i\theta_{kj}), \quad a_{jk} = \left|a_{jk}\right|\exp(i\phi_{jk}),$$

де

$$\psi_{kk} = \arg a_{kk}, \quad \theta_{kj} = \arg a_{kj}, \quad \phi_{jk} = \arg a_{jk}, \quad k, j = 0, 1, \ldots .$$

Тоді для дійсної $\Re$ та уявної $\Im$ частин залишків (7), (8) ДНД (1) методом математичної індукції встановлено рекурентні формули

$$\Re Q_{[(n-1)/2]}^{([(n-1)/2])} = b_{[(n-1)/2],[(n-1)/2]}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$\Re Q_k^{([(n-1)/2])} = b_{kk} + \sum_{l=1}^{n-2k-1}\prod_{j=1}^{l}\frac{\left|a_{k+j,k}\right|}{\left|Q_{1,k+j}^{(n-2k-1)}\right|^2} \times$$

$$\times\ b_{k+l,k}\cos\left(\sum_{p=1}^{l}(-1)^{l-p}\theta_{k+l-(p-1),k}\right)+$$

$$+\sum_{l=1}^{n-2k-1}\prod_{j=1}^{l}\frac{|a_{k,k+j}|}{\left|Q_{2,k+j}^{(n-2k-1)}\right|^2}b_{k,k+l}\cos\left(\sum_{p=1}^{l}(-1)^{l-p}\phi_{k+l-(p-1),k}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{[(n-1)/2]-k}\prod_{j=1}^{i}\frac{|a_{k+j,k+j}|}{\left|Q_{k+j}^{([(n-1)/2])}\right|^2}b_{k+i,k+i}\cos\left(\sum_{l=1}^{i}(-1)^{i-l}\psi_{k+i-(l-1),k+i-(l-1)}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{[(n-1)/2]-k-1}\prod_{j=1}^{i}\frac{|a_{k+j,k+j}|}{\left|Q_{k+j}^{([(n-1)/2])}\right|^2}\times$$

$$\times\left\{\sum_{l=1}^{n-2(k+i)-1}\prod_{j=1}^{l}\frac{|a_{k+i+j,k+i}|}{\left|Q_{1,k+i+j}^{(n-2(k+i)-1)}\right|^2}b_{k+i+l,k+i}\times\right.$$

$$\times\cos\left(\sum_{s=1}^{i}(-1)^{i-s}\psi_{k+i-(s-1),k+i-(s-1)}+(-1)^{i}\sum_{r=1}^{l}(-1)^{l-r}\theta_{k+i+l-(r-1),k+i}\right)+$$

$$+\sum_{l=1}^{n-2(k+i)-1}\prod_{j=1}^{l}\frac{|a_{k+i,k+i+j}|}{\left|Q_{2,k+i+j}^{(n-2(k+i)-1)}\right|^2}b_{k+i,k+i+l}\times$$

$$\left.\times\cos\left(\sum_{s=1}^{i}(-1)^{i-s}\psi_{k+i-(s-1),k+i-(s-1)}+(-1)^{i}\sum_{r=1}^{l}(-1)^{l-r}\phi_{k+i+l-(r-1),k+i}\right)\right\}$$

та

$$\Im Q_{[(n-1)/2]}^{([(n-1)/2])}=0,\quad n=1,2,\ldots,$$

$$\Im Q_{k}^{([(n-1)/2])}=\sum_{l=1}^{n-2k-1}\prod_{j=1}^{l}\frac{|a_{k+j,k}|}{\left|Q_{1,k+j}^{(n-2k-1)}\right|^2}\times$$

$$\times\ b_{k+l,k}\sin\left(\sum_{p=1}^{l}(-1)^{l-p}\theta_{k+l-(p-1),k}\right)+$$

$$+\sum_{l=1}^{n-2k-1}\prod_{j=1}^{l}\frac{|a_{k,k+j}|}{\left|Q_{2,k+j}^{(n-2k-1)}\right|^2}b_{k,k+l}\sin\left(\sum_{p=1}^{l}(-1)^{l-p}\phi_{k+l-(p-1),k}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{[(n-1)/2]-k}\prod_{j=1}^{i}\frac{|a_{k+j,k+j}|}{\left|Q_{k+j}^{([(n-1)/2])}\right|^2}b_{k+i,k+i}\sin\left(\sum_{l=1}^{i}(-1)^{i-l}\psi_{k+i-(l-1),k+i-(l-1)}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{[(n-1)/2]-k-1}\prod_{j=1}^{i}\frac{|a_{k+j,k+j}|}{\left|Q_{k+j}^{([(n-1)/2])}\right|^2}\times$$

$$\times \left\{ \sum_{l=1}^{n-2(k+i)-1} \prod_{j=1}^{l} \frac{|a_{k+i+j,k+i}|}{\left|Q_{1,k+i+j}^{(n-2(k+i)-1)}\right|^2} b_{k+i+l,k+i} \times \right.$$

$$\times \sin\left(\sum_{s=1}^{i} (-1)^{i-s} \psi_{k+i-(s-1),k+i-(s-1)} + (-1)^i \sum_{r=1}^{l} (-1)^{l-r} \theta_{k+i+l-(r-1),k+i} \right) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n-2(k+i)-1} \prod_{j=1}^{l} \frac{|a_{k+i,k+i+j}|}{\left|Q_{2,k+i+j}^{(n-2(k+i)-1)}\right|^2} b_{k+i,k+i+l} \times$$

$$\left. \times \sin\left(\sum_{s=1}^{i} (-1)^{i-s} \psi_{k+i-(s-1),k+i-(s-1)} + (-1)^i \sum_{r=1}^{l} (-1)^{l-r} \phi_{k+i+l-(r-1),k+i} \right) \right\}.$$

Лема 1. *Нехай* ψ_{kk}, θ_{jk}, ϕ_{kj}, $k = 0, 1, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots$, *задовольняють нерівності*

$$0 \le \theta_{jk} \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \phi_{kj} \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \psi_{kk} \le \frac{\pi}{2}$$

і, крім того,

$$\theta_{j+1,k} > \theta_{jk}, \quad \phi_{k,j+1} > \phi_{kj}, \quad \psi_{k+1,k+1} > \psi_{kk}, \quad k = 0, 1, \ldots, \; j = 1, 2, \ldots,$$

та

$$\theta_{k+1,k} > \psi_{kk}, \quad \phi_{k,k+1} > \psi_{kk}, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Тоді для залишків ДНД (1) *справедливі оцінки*

$$\Re Q_k^{([(n-1)/2])} \ge b_{kk}, \quad \Im Q_k^{([(n-1)/2])} \ge 0,$$
$$k = \overline{0, \left[\frac{n-1}{2}\right]}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Доведення. З умов леми випливає

$$0 \le \sum_{l=1}^{i} (-1)^{i-l} \psi_{k+i-(l-1),k+i-(l-1)} \le \psi_{k+1,k+1} \le \frac{\pi}{2},$$

$$0 \le \sum_{p=1}^{l} (-1)^{l-p} \theta_{k+l-(p-1),k} \le \theta_{k+1,k} \le \frac{\pi}{2},$$

$$0 \le \sum_{p=1}^{l} (-1)^{l-p} \phi_{k+l-(p-1),k} \le \phi_{k+1,k} \le \frac{\pi}{2}.$$

Підставивши отримані нерівності у формули для дійсної $\Re$ та уявної $\Im$ частин залишку $Q_k^{([(n-1)/2])}$ та врахувавши парність і непарність відповідних косинусів і синусів, одержимо твердження леми.

Лема 2. *Нехай* ψ_{kk}, θ_{jk}, ϕ_{kj}, $k = 0, 1, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots$, *такі, що*

$$-\frac{\pi}{2} \le \theta_{jk} \le 0, \quad -\frac{\pi}{2} \le \phi_{kj} \le 0, \quad -\frac{\pi}{2} \le \psi_{kk} \le 0$$

і, крім того,

$$\theta_{j+1,k} > \theta_{jk}, \quad \phi_{k,j+1} > \phi_{kj}, \quad \psi_{k+1,k+1} > \psi_{kk}, \quad k = 0, 1, \ldots, \; j = 1, 2, \ldots,$$

та

$$\theta_{k+1,k} > \psi_{kk}, \quad \phi_{k,k+1} > \psi_{kk}, \quad k = 0, 1, \ldots .$$

Тоді для залишків ДНД (1) *справедливі оцінки*

$$\Re Q_k^{([(n-1)/2])} \geq b_{kk}, \quad \Im Q_k^{([(n-1)/2])} \leq 0,$$

$$k = \overline{0, \left[\frac{n-1}{2}\right]}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Доведення леми 2 аналогічне доведенню леми 1.

3. Аналог теореми Ван Флека.

Означення 6. *Перетворення ДНД* (1), *що залишає незмінним значення всіх його наближень* f_n, *називається еквівалентним перетворенням. Двовимірні неперервні дроби, відповідні наближення яких однакові, називаються еквівалентними.*

Легко показати, що двовимірний неперервний дріб

$$\underset{i=0}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \frac{a_{ii}\rho_{i-1,i-1}\rho_{ii}}{b_{ii}\rho_{ii} + \underset{j=i+1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \frac{a_{ji}\rho_{ji}\rho_{j-1,i}}{b_{ji}\rho_{ji}} + \underset{j=i+1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \frac{a_{ij}\rho_{ij}\rho_{i,j-1}}{b_{ij}\rho_{ij}}},$$

де $\rho_{-1,-1} = \rho_{0,0} = 1$, $\rho_{ij} \neq 0$ — довільні комплексні числа, є еквівалентним до ДНД (1).

Відповідно підбираючи сталі ρ_{ij}, $i, j = 0, 1, \ldots$, у цьому дробі можна отримати двовимірні неперервні дроби, еквівалентні до ДНД (1), у вигляді (при $a_{ij} \neq 0, i, j = 0, 1, \ldots$)

$$\underset{i=0}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \frac{1}{d_{ii} + \underset{j=i+1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \frac{1}{d_{ji}} + \underset{j=i+1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \frac{1}{d_{ij}}}, \tag{15}$$

де

$$d_{ii} = b_{ii} \prod_{j=0}^{i} (a_{jj})^{(-1)^{i+j+1}}, \quad i = 0, 1, \ldots,$$

$$d_{i+k,i} = b_{i+k,i} \prod_{j=0}^{i} (a_{jj})^{(-1)^{i+j+1}} \prod_{p=i+1}^{i+k} (a_{pi})^{(-1)^{i+k+p-1}},$$

$$d_{i,i+k} = b_{i,i+k} \prod_{j=0}^{i} (a_{jj})^{(-1)^{i+j+1}} \prod_{p=i+1}^{i+k} (a_{ip})^{(-1)^{i+k+p-1}},$$

$$i = 0, 1, \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

та у вигляді (при $b_{ij} \neq 0$, $i, j = 0, 1, \ldots$)

$$\underset{i=0}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \frac{c_{ii}}{1 + \underset{j=i+1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \frac{c_{ji}}{1} + \underset{j=i+1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \frac{c_{ij}}{1}}, \tag{16}$$

де

$$c_{00} = \frac{a_{00}}{b_{00}}, \quad c_{ii} = \frac{a_{ii}}{b_{ii}\, b_{i-1,i-1}}, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

$$c_{i+k,i} = \frac{a_{i+k,i}}{b_{i+k,i}\, b_{i+k-1,i}}, \quad c_{i,i+k} = \frac{a_{i,i+k}}{b_{i,i+k}\, b_{i,i+k-1}}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad i = 0, 1, \ldots .$$

Серед найбільш відомих теорем аналітичної теорії неперервних дробів є теорема Ван Флека [1, 2] про збіжність неперервного дробу $b_0 + \overset{\infty}{\underset{i=1}{\mathrm{D}}} \frac{1}{b_i}$.

Встановимо аналог теореми Ван Флека для ДНД (15), вибираючи наближення (2).

Лема 3. *Двовимірний неперервний дріб* (15) *з додатними елементами* d_{ij}, $i, j = 0, 1, \ldots,$ *збігається тоді і тільки тоді, коли розбігаються ряди*

$$\sum_{i=1}^{\infty} d_{ij},\ j = 0, 1, \ldots, \quad \sum_{j=1}^{\infty} d_{ij}, \quad i = 0, 1, \ldots, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i,$$

де Φ_i — *сума значень збіжних неперервних дробів* $\overset{\infty}{\underset{j=i+1}{\mathrm{D}}} \frac{1}{d_{ji}}$, $\overset{\infty}{\underset{j=i+1}{\mathrm{D}}} \frac{1}{d_{ij}}$ *та* d_{ii}.

Доведення. *Достатність.* Неперервні дроби

$$\overset{\infty}{\underset{j=i+1}{\mathrm{D}}} \frac{1}{d_{ji}}, \quad \overset{\infty}{\underset{j=i+1}{\mathrm{D}}} \frac{1}{d_{ij}}, \quad i = 0, 1, \ldots,$$

і неперервний дріб

$$\overset{\infty}{\underset{i=0}{\mathrm{D}}} \frac{1}{\Phi_i} \tag{17}$$

збіжні згідно з критерієм Зейделя. Позначимо через g_n n-те наближення дробу (17), а через f_n n-те наближення дробу (15) та оцінимо зверху різницю $|f_n - g_n|$. Нехай $\varepsilon > 0$ і як завгодно мале число, тоді існує такий номер k, що

$$|g_{k-1} - g_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже, для довільних $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ виконується нерівність

$$\left| \cfrac{1}{\Phi_0 + \ddots + \cfrac{1}{\Phi_{k-2} + \cfrac{1}{\Phi_{k-1} + \alpha}}} - \cfrac{1}{\Phi_0 + \ddots + \cfrac{1}{\Phi_{k-2} + \cfrac{1}{\Phi_{k-1} + \beta}}} \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{18}$$

Нехай $f_{k,n}$ — скінченний неперервний дріб вигляду

$$f_{k,n} = \cfrac{1}{\Phi_0 + \ddots + \cfrac{1}{\Phi_{k-1} + \cfrac{1}{\Phi_k^{(n-1-k)} + \ddots + \cfrac{1}{\Phi_{n-1}^{(0)}}}}}.$$

Виберемо номер n, $n > k$, настільки великим, щоб виконувались нерівності

$$\left|\frac{\Phi_{2r}^{(n-1-2r)} - \Phi_{2r}}{\Phi_{2r}}\right| < \frac{\varepsilon}{2f_{k,n}}, \quad \left|\frac{\Phi_{2r+1}^{(n-2-2r)} - \Phi_{2r+1}}{\Phi_{2r+1}}\right| < \frac{\varepsilon}{2f_{k,n}} \tag{19}$$

для довільного r, $0 \le r \le (k-1)/2$. Згідно з (18) маємо $|f_{k,n} - g_n| < \varepsilon/2$. Використовуючи лему 2 [10] і нерівності (19), отримуємо $|f_n - f_{k,n}| < \varepsilon/2$, тобто

$$|f_n - g_n| \le |f_n - f_{k,n}| + |f_{k,n} - g_n| < \varepsilon.$$

Достатність доведено.

Необхідність. Нехай двовимірний неперервний дріб (15) збіжний. Покажемо, що всі його залишки Φ_i та $Q_i = \Phi_i + \underset{k=i+1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \frac{1}{\Phi_k}$ також збіжні. Оскільки Q_0 є дробом, оберненим до двовимірного дробу (17), то цей дріб також збігається. Позначимо через $f_{0,n}, \psi_{0,n}$ і $g_{1,n}$ n-ті наближення до дробів $Q_0, \Phi_0, 1/Q_0$ відповідно. Враховуючи властивість вилки для дробів з додатними компонентами, маємо

$$\psi_{0,2k} < \psi_{0,2j+1}, \qquad g_{1,2k} < g_{1,2j+1}$$

для довільних $j, k \in \mathbb{N}$. Отже, існують скінченні границі

$$\lim_{k\to\infty} \psi_{0,2k} = \Psi_0, \qquad \lim_{k\to\infty} g_{1,2k} = G_0,$$
$$\lim_{k\to\infty} \psi_{0,2j+1} = \Psi_1, \qquad \lim_{k\to\infty} g_{1,2j+1} = G_1$$

і виконуються нерівності

$$\Psi_0 \le \Psi_1, \quad G_0 \le G_1.$$

Оскільки внаслідок збіжності дробу Q_0 $\Psi_0 + G_0 = \Psi_1 + G_1$, то $\Psi_0 = \Psi_1$ і $G_0 = G_1$, а тому збігаються дроби Φ_0 і $1/Q_1$. Продовжуючи цей процес, приходимо до висновку, що всі залишки Φ_i та Q_i збігаються, отже, є збіжними і неперервні дроби $\underset{i=0}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \frac{1}{d_{i+1,i}}$, $\underset{i=0}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \frac{1}{d_{i,i+1}}$, а тому розбіжні ряди

$$\sum_{i=1}^{\infty} d_{ij}, \quad j = 0, 1, \ldots, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} d_{ij}, \quad i = 0, 1, \ldots .$$

Покажемо, що неперервний дріб (17) збіжний. Оскільки елементи дробу додатні, то існують скінченні границі його парних і непарних наближень, а тому нерівність (18) виконується при достатньо великих k. Враховуючи оцінку $|f_n - g_n|$, отриману при доведенні достатності, заключаємо, що двовимірні неперервні дроби (15) і (17) збігаються чи розбігаються одночасно. Тому згідно з критерієм Зейделя ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i$ розбіжний.

Лему доведено.

Наступне твердження є аналогом теореми Ван Флека [11] для двовимірних неперервних дробів.

Теорема 3. *Нехай частинні знаменники двовимірного неперервного дробу* (15) *належать області*

$$G_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : z \ne 0, |\arg z| < \pi/2 - \varepsilon\},$$

де ε — *довільне, як завгодно мале додатне число* $(0 < \varepsilon < \pi/2)$. *Тоді*:

1) *кожне n-те наближення* f_n *двовимірного неперервного дробу* (15) *належить області* G_ε;

2) *існують скінченні границі парних* f_{2n} *і непарних* f_{2n+1} *наближень при* $n \to \infty$;

3) *двовимірний неперервний дріб* (15) *збігається, якщо розбігаються ряди*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |d_{ij}|, \quad j = 0, 1, \ldots, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} |d_{ij}|, \quad i = 0, 1, \ldots, \qquad \sum_{i=0}^{\infty} (d_{ii} + F_i),$$

де F_i — *сума значень збіжних неперервних дробів*

$$\mathop{\mathrm{D}}_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{|d_{ji}|}, \qquad \mathop{\mathrm{D}}_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{|d_{ij}|}.$$

Доведення. 1. Якщо $d_{ij} \in G_\varepsilon$, то

$$\frac{1}{d_{ij}} \in G_\varepsilon, \quad d_{ii} + \frac{1}{d_{i+1,i}} + \frac{1}{d_{i,i+1}} \in G_\varepsilon, \quad d_{ij} + \frac{1}{d_{i+1,j}} \in G_\varepsilon, \quad d_{ij} + \frac{1}{d_{i,j+1}} \in G_\varepsilon$$

в силу випуклості області G_ε. Отже, для довільного n $f_n \in G_\varepsilon$.

2. Розглянемо функціональний дріб

$$\mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{\infty} \frac{1}{d_{ii}(z) + \Phi_i(z)}, \qquad \Phi_i(z) = \mathop{\mathrm{D}}_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{d_{ji}(z)} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{d_{ij}(z)}, \tag{20}$$

де $d_{pq}(z) = |d_{pq}| \exp(i\gamma_{pq} z)$, $\gamma_{pq} = \arg d_{pq}$.

Нехай

$$|\Re z| < 1 + \varepsilon(\pi - 2\varepsilon)^{-1}, \tag{21}$$

тоді

$$\left|\arg d_{pq}(z)\right| = \left|\gamma_{pq} \operatorname{Re} z\right| \le \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\left(1 + \frac{\varepsilon}{\pi - 2\varepsilon}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\pi}{2} - \delta, \qquad \delta = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже, $d_{pq}(z) \in G_\delta$, якщо z належить області (21).

Розглянемо область

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |\Re z| < 1 + \varepsilon(\pi - 2\varepsilon)^{-1}, \ |\Im z| < 1\}.$$

Для $z \in D$ і послідовності голоморфних функцій $\{f_n(z)\}$ (n-х наближень ДНД (20)) виконуються умови теореми Стільтьєса – Віталі [3].

Нехай $z \in \Delta$ і Δ — підмножина D така, що

$$\Delta = \{z : \Re z = 0, \ |\Im z| < 1\}.$$

Тоді двовимірний неперервний дріб (20) набере вигляду

$$\mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\hat{\Phi}_i}, \qquad \hat{\Phi}_i = \hat{d}_{ii} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{\hat{d}_{ji}} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{\hat{d}_{ij}}, \tag{22}$$

де $\bar{d}_{pq} = |d_{pq}| \exp(-\gamma_{pq} y) > 0$, $y = \Im z$.

З властивості вилки [12] випливає, що парні f_{2n} і непарні f_{2n-1} наближення двовимірного неперервного дробу (22) мають границі, тому за теоремою Стільтьєса – Віталі існують скінченні границі

$$\lim_{n \to \infty} f_{2n}(1) = \lim_{n \to \infty} f_{2n}, \qquad \lim_{n \to \infty} f_{2n+1}(1) = \lim_{n \to \infty} f_{2n+1},$$

тобто п. 2 справедливий.

Доведемо п. 3. Враховуючи умови теореми та оцінку

$$\hat{d}_{pq} = \left|d_{pq}\right| \exp(-\gamma_{pq} y) \geq \left|d_{pq}\right| \exp(-\pi / 2),$$

отримуємо, що ряди

$$\sum_{i=1}^{\infty} \hat{d}_{ij}, \quad j = 0, 1, \ldots, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \hat{d}_{ij}, \quad i = 0, 1, \ldots,$$

розбіжні.

Оцінимо знизу $\hat{\Phi}_i$:

$$\hat{\Phi}_i = |d_{ii}| \exp(-\gamma_{ii} y) +$$

$$+ \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|d_{i+j,i}| \exp(-\gamma_{i+j,i} y)} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|d_{i,i+j}| \exp(-\gamma_{i,i+j} y)} \geq$$

$$\geq |d_{ii}| \exp(-\pi / 2) + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|d_{i+j,i}| \exp\left((-1)^{j+1} \pi / 2\right)} +$$

$$+ \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|d_{i,i+j}| \exp\left((-1)^{j+1} \pi / 2\right)} \geq F_i \exp(-\pi / 2).$$

Отже, ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \hat{\Phi}_i$ — розбіжний. Збіжність дробу (22) випливає з леми 3, а збіжність дробу (20) — з теореми Стільтьєса – Віталі.

Наслідок. *Двовимірний неперервний дріб, елементи якого належать області G_ε, збігається, якщо розбігаються ряди*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |d_{ij}|, \quad j = 0, 1, \ldots, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} |d_{ij}|, \quad i = 0, 1, \ldots, \qquad \sum_{i=0}^{\infty} |d_{ii}|.$$

4. Інтерполяційний двовимірний неперервний дріб. Формула типу Ньютона – Тіле. Нехай функція від двох змінних $f(x, y)$ визначена в прямокутнику $[a, b; c, d]$ і відомі її значення на множині точок

$$\Pi^{n,m} = \left\{(x_i, y_j),\ i = 0, 1, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, m\right\} \subset [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2.$$

Введемо частинні розділені різниці і частинні обернені різниці за формулами

$$\omega_{0,0}(x_i, y_i) = f(x_i, y_i), \tag{23}$$

$$\begin{gathered} \omega_{i,i}(x_0, \ldots, x_i; y_0, \ldots, y_i) = (x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1}) \times \\ \times \{\omega_{i-1,i-1}(x_0, \ldots, x_{i-1}; y_0, \ldots, y_{i-1}) - \omega_{i-1,i-1}(x_0, \ldots, x_{i-2}, x_i; y_0, \ldots, y_{i-1}) + \\ + \{\omega_{i-1,i-1}(x_0, \ldots, x_{i-2}, x_i; y_0, \ldots, y_{i-2}, y_i) - \\ - \omega_{i-1,i-1}(x_0, \ldots, x_{i-1}; y_0, \ldots, y_{i-2}, y_i)\}^{-1}, \end{gathered} \tag{24}$$

$$\begin{gathered} \omega_{2k+1-i,i}(x_0, \ldots, x_{2k-i}, x_{2k+1-i}; y_0, \ldots, y_i) = \\ = \left[\omega_{2k-i,i}(x_0, \ldots, x_{2k-1-i}, x_{2k+1-i}; y_0, \ldots, y_i) - \right. \\ \left. - \omega_{2k-i,i}(x_0, \ldots, x_{2k-i}; y_0, \ldots, y_i)\right]\left(x_{2k+1-i} - x_{2k-i}\right)^{-1}, \\ \omega_{i,2k+1-i}(x_0, \ldots, x_i; y_0, \ldots, y_{2k-i}, x_{2k+1-i}) = \\ = \left[\omega_{i,2k-i}(x_0, \ldots, x_i; y_0, \ldots, y_{2k-1-i}, y_{2k+1-i}) - \right. \end{gathered} \tag{25}$$

$$
\begin{gathered}
-\ \omega_{i,2k-i}(x_0,\ldots,x_i;y_0,\ldots,y_{2k-i})\big]\big(y_{2k+1-i}-y_{2k-i}\big)^{-1},\\
\omega_{2k-i,i}(x_0,\ldots,x_{2k-i};y_0,\ldots,y_i)=\\
=\big(x_{2k-i}-x_{2k-1-i}\big)\big[\omega_{2k-1-i,i}(x_0,\ldots,x_{2k-2-i},x_{2k-i};y_0,\ldots,y_i)-\\
-\ \omega_{2k-1-i,i}(x_0,\ldots,x_{2k-2-i},x_{2k-1-i};y_0,\ldots,y_i)\big]^{-1},\\
\omega_{i,2k-i}(x_0,\ldots,x_i;y_0,\ldots,y_{2k-i})=\\
=\big(y_{2k-i}-y_{2k-1-i}\big)\big[\omega_{i,2k-1-i}(x_0,\ldots,x_i;y_0,\ldots,y_{2k-2-i},y_{2k-i})-\\
-\ \omega_{i,2k-1-i}(x_0,\ldots,x_i;y_0,\ldots,y_{2k-2-i},y_{2k-1-i})\big]^{-1}.
\end{gathered}
\tag{26}
$$

Врахувавши співвідношення

$$
\begin{gathered}
\omega_{2k-i,i}(x_0,\ldots,x_{2k-1-i},x;y_0,\ldots,y_i)=\\
=\omega_{2k-i,i}(x_0,\ldots,x_{2k-i};y_0,\ldots,y_i)+(x-x_{2k-i})\times\\
\times\ \omega_{2k+1-i,i}(x_0,\ldots,x_{2k-i},x;y_0,\ldots,y_i),\\
\omega_{2k-1-i,i}(x_0,\ldots,x_{2k-2-i},x;y_0,\ldots,y_i)=\\
=\omega_{2k-1-i,i}(x_0,\ldots,x_{2k-1-i};y_0,\ldots,y_i)+\\
+\ \frac{x-x_{2k-1-i}}{\omega_{2k-i,i}(x_0,\ldots,x_{2k-1-i},x;y_0,\ldots,y_i)},\\
\omega_{i,2k-i}(x_0,\ldots,x_i;y_0,\ldots,y_{2k-1-i},y)=\\
=\omega_{i,2k-i}(x_0,\ldots,x_i;y_0,\ldots,y_{2k-i})+\\
+\ (y-y_{2k-i})\omega_{i,2k+1-i}(x_0,\ldots,x_i;y_0,\ldots,y_{2k-i},y),\\
\omega_{i,2k-1-i}(x_0,\ldots,x_i;y_0,\ldots,y_{2k-2-i},y)=\\
=\omega_{i,2k-1-i}(x_0,\ldots,x_i;y_0,\ldots,y_{2k-1-i})+\\
+\ \frac{y-y_{2k-1-i}}{\omega_{i,2k-i}(x_0,\ldots,x_i;y_0,\ldots,y_{2k-1-i},y)},\\
\omega_{i-1,i-1}(x_0,\ldots,x_{i-2},x;y_0,\ldots,y_{i-2},y)=\\
=\omega_{i-1,i-1}(x_0,\ldots,x_{i-2},x;y_0,\ldots,y_{i-1})+\\
+\ \omega_{i-1,i-1}(x_0,\ldots,x_{i-1};y_0,\ldots,y_{i-2},y)-\\
-\ \omega_{i-1,i-1}(x_0,\ldots,x_{i-1};y_0,\ldots,y_{i-1})+\\
+\ \frac{(x-x_{i-1})(y-y_{i-1})}{\omega_{i,i}(x_0,\ldots,x_{i-1},x;y_0,\ldots,y_{i-1},y)},
\end{gathered}
$$

побудуємо двовимірний неперервний дріб

$$
\begin{aligned}
R_{n,m}(x,y) &= F_0(x,y)+\cfrac{(x-x_0)(y-y_0)}{F_1(x,y)+\ddots+\cfrac{(x-x_{s-1})(y-y_{s-1})}{F_s(x,y)}}=\\
&= F_0(x,y)+\mathop{\mathrm{D}}_{k=0}^{s-1}\frac{(x-x_k)(y-y_k)}{F_{k+1}(x,y)},
\end{aligned}
\tag{27}
$$

де

$$s = \min\left\{\left[\frac{m}{2}\right], \left[\frac{n}{2}\right]\right\},$$

$$F_k(x, y) = \omega_{k,k} + \omega_{k+1,k}(x - x_k) + \omega_{k,k+1}(y - y_k) +$$

$$+ \mathop{\mathrm{D}}_{p=0}^{[n/2]-k-1} \frac{(x - x_{k+2p})(x - x_{k+2p+1})}{\omega_{k+2p+2,k} + \omega_{k+2p+3,k}(x - x_{k+2p+2})} +$$

$$+ \mathop{\mathrm{D}}_{p=0}^{[m/2]-k-1} \frac{(y - y_{k+2p})(y - y_{k+2p+1})}{\omega_{k,k+2p+2} + \omega_{k,k+2p+3}(y - y_{k+2p+2})}, \quad k = 0, 1, \ldots, s-1.$$

Якщо $[n/2] - k - 1 < 0$ (або $[m/2] - k - 1 < 0$), то у частинному знаменнику $F_k(x, y)$ замінюємо нулем перший неперервний дріб (або другий неперервний дріб). Рекурентні формули (24), (26) є частинними оберненими різницями типу частинних обернених різниць Тіле [5], а формули (25) — частинними розділеними різницями типу частинних розділених різниць Ньютона.

Теорема 4. *Нехай ω_{ij}, $i = 0, 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, m$, визначені за формулами (23) – (26). Тоді формула (27) є інтерполяційною, тобто*

$$R_{n,m}(x_i, y_j) = f(x_i, y_j), \qquad (x_i, y_j) \in \prod^{n,m}.$$

Ця теорема доводиться безпосередньою підстановкою формул (23) – (26) у формулу (27) і згортанням неперервних дробів [13]. Формулу (27) називатимемо формулою типу Ньютона – Тіле.

Щоб встановити близькість наближення функції $f(x, y)$ формулою (27), знайдемо її залишковий член $R_{n+m+2}(x, y)$.

Теорема 5. *Нехай $f(x, y)$ буде $n + m + 2$ рази диференційовною функцією на $D = \{a \le x \le b;\ c \le y \le d\}$, що містить точки*

$$\prod^{n,m} = \{(x_i, y_j),\ i = 0, 1, \ldots, n,\ j = 0, 1, \ldots, m\}.$$

Тоді для довільної точки $(x, y) \in D$ існує точка $(\xi, \eta) \in D$ така, що

$$R_{n+m+2}(x, y) = f(x, y) - R_{n,m}(x, y) =$$

$$= \frac{1}{Q_{nm}(x, y)} \left\{ \frac{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} F(\xi, y)}{\partial x^{n+1}} + \frac{\prod_{i=0}^{m}(y - y_i)}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1} F(x, \eta)}{\partial y^{m+1}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}{(n+1)!} \frac{\prod_{i=0}^{m}(y - y_i)}{(m+1)!} \frac{\partial^{n+m+2} F(\xi, \eta)}{\partial x^{n+1} \partial y^{m+1}} \right\}, \tag{28}$$

де

$$F(x, y) = f(x, y) Q_{nm}(x, y) - P_{nm}(x, y), \qquad R_{nm}(x, y) = \frac{P_{nm}(x, y)}{Q_{nm}(x, y)}.$$

Доведення. Побудуємо за заданими точками (x_i, y_j) інтерполяційний многочлен Ньютона для функції $F(x, y)$. Обчисливши розділені різниці для цього многочлена, отримаємо (28), подібно до того, як це було зроблено в [5].

1. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби: Аналитическая теория и приложение. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
2. *Lorentzen L., Waadeland H.* Confinued fractions with applications. – Amsterdam: North Holland, 1992. – 606 p.
3. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
4. *Кучмінська Х. Й.* Відповідний і приєднаний гіллясті ланцюгові дроби для подвійного степеневого ряду // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1978. – № 7. – С. 614 – 618.
5. *Кучминская Х. И.* Приближение функций непрерывными и ветвящимися непрерывными дробями // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1980. – **12**. – С. 3 – 10.
6. *Сусь О. М.* Деякі питання аналітичної теорії двовимірних неперервних дробів: Автореф. ...канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 1996. – 17 с.
7. *Murphy J. A., O'Donohoe M.* A two-variable generalization of the Stieltjes-type continued fractions // J. Comput. and Appl. Math. – 1978. – **4**, № 3. – P. 181 – 190.
8. *Kuchmins'ka Kh.* Some properties of two-dimensional continued fractions // Ibid. – 1999. – **105**. – P. 347 – 353.
9. *Сусь О. М., Кучмінська Х. Й., Возна С. М.* Дійсна та уявна частини для залишків двовимірного неперервного дробу // Вісн. Нац. ун-ту "Львів. політехніка". Прикл. математика. – 2000. – № 411. – С. 304 – 308.
10. *Боднар Д. І., Кучмінська Х. Й.* Параболічна область збіжності для двовимірних неперервних дробів // Мат. студ. – 1995. – № 4. – С. 29 – 36.
11. *Боднар Д. І., Кучмінська Х. Й.* Дослідження збіжності двовимірних неперервних дробів // Вісн. Прикарпат. ун-ту. Математика, фізика, хімія. – 1999. – **1**. – С. 65 – 74.
12. *Kuchmins'ka Kh.* On the „fork" property of for two-dimensional continued fractions // Communs Anal. Theory Contin. Fractions. – 1997. – **6**. – P. 32 – 35.
13. *Kuchmins'ka Kh., Vozna S.* On Newton – Thiele-like interpolating formula // Ibid. – 2000. – **8**. – P. 74 – 79.

Одержано 06.02.2002