УДК 517.96+519.624+539.3

В. М. Ильман, В. Е. Капустян (Днепропетр. нац. ун-т ж.-д. трансп.)

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

We analyze a class of families of integral equations and obtain dependencies of singularities of solutions of integral equations on dimensions of families of equation kernels. On the basis of these results, we suggest procedures of constructing approximate solutions for a small parameter.

Проведено аналіз одного класу сімей інтегральних рівнянь, одержано залежності особливостей розв'язків інтегральних рівнянь від розміру сімей ядер рівнянь і на цій основі запропоновано методику побудови наближених розв'язків для малого параметра.

Многие смешанные граничные задачи механики сплошных сред [1 – 5] сводятся к решению семейств интегральных уравнений. Однако исследование этих уравнений как семейств не проводилось. Возможно поэтому остается открытым вопрос о построении асимптотических разложений по малому параметру для тонких конструкций.

В настоящей работе дан анализ одного класса семейств интегральных уравнений, получены зависимости особенностей решений интегральных уравнений от размерности семейств ядер уравнений и на этой основе предложена методика построения приближенных решений для малого параметра.

1. Основные понятия. Предварительные результаты. Пусть $C_n(M)$ — пространство функций, непрерывных вместе со своими производными до порядка n на множестве $M \subset R^k$, $k = 1, 2$; $H^\nu(M)$ — пространство функций, непрерывных по Гельдеру с показателем ν.

Обозначим через $E_n(M \times D, N)$ класс m-параметрических семейств функций $\varphi: M \times D \to N$, $D \subset R^m, N \subset R$, таких, что $\varphi \in C_n(M)$ и $\varphi \in C(D)$, а через $E_n^\nu(M \times D, N)$ класс функций, для которых кроме того n-я производная $\varphi^{(n)} \in \in H^\nu(M)$.

Поскольку в дальнейшем рассматриваются параметрические семейства функций, приведем некоторые сведения из теории особенностей гладких функций [6].

Определение 1. *Функции $f_{1,2}: M \times D \to N_{1,2}$ из класса E_n или E_n^ν называются k-касающимися в точке $x \in M$, если*

$$\rho_N(f_1(x), f_2(y)) = o\left(\rho_M^k(x, y)\right)$$

при $x \to y$, $k < n$. Здесь $\rho_{N,M}$ — какая-нибудь риманова метрика.

Определение 2. *Струей $j_x^k(f)$ гладкой функции f в точке x порядка k называется класс k-касающихся в точке x функций.*

Типичным представителем струи $j_x^k(f)$ в заданных в окрестности точек x и y системах координат является набор коэффициентов ряда Тейлора степени k, т. е. струя вполне определяется усеченной частью степени k ряда Тейлора. В дальнейшем предполагаем, что такие системы координат введены, и сохраним обозначение струи порядка k и для соответствующего ряда Тейлора степени k.

Определение 3. *Функции $f \in E_n^\nu(M \times D, N)$ и $f_1 \in E_n^\delta(M_1 \times D_1, N_1)$ называются эквивалентными $(f \sim f_1)$, если существуют диффеоморфизмы $h: M \to M_1$ и $g: N \to N_1$ такие, что имеет место тождество $g(f(h^{-1}(x))) \equiv \equiv f_1(x)$.*

Очевидно, функции f и $j_x^k(f)$ эквивалентны в окрестности точки x.

Пусть x — изолированная критическая точка функции $f: M \times D \to N$, $M \subseteq R$.

Определение 4. *Критическая точка x кратности k называется особенностью типа A_k порядка k, если точка x находится в области M, и краевой особенностью типа B_{k+1}, если x находится на границе M.*

Порядок особенности критической точки семейства функций зависит от размерности пространства параметров. Справедлива основная теорема для гладких семейств функций.

Теорема. *Если размерность параметрического семейства функций f равна k, то в окрестности критической точки семейство локально эквивалентно одной из форм:*

$$A_{k+1}\colon x^{k+2} + \sum_{i=1}^{k} c_i x^i, \qquad B_{k+2}\colon x^{k+2} + \sum_{i=1}^{k+1} c_i x^i .$$

Рассмотрим уравнение

$$\int_l q(\xi) K\left(\frac{\xi - x}{\mu}\right) d\xi = \mu f(x), \qquad x \in l = [-1, 1], \tag{1}$$

$$K(t) = \int_0^{\infty} P(u) \sin(tu)\, du, \tag{2}$$

в котором функция $f \in E_k^{\nu}(l, N_0)$, $N_0 \subset R$; $P \in E_\infty(R \times D, N)$ ограничена вместе со своими производными по u любого порядка и имеет единственную изолированную критическую точку $u = 0$. Кроме того, функция P экспоненциального типа степени δ, т. е.

$$|P(u)| < u^{\delta} e^{-\alpha u} + b, \qquad \delta \geq 0, \qquad \alpha > 0, \qquad u \geq 0. \tag{3}$$

Положим $\dim D = k - 1$, тогда согласно основной теореме функция P имеет в точке $u = 0$ особенность типа A_k, а ее сужение на $R^+ \cup \{0\}$ — краевую особенность типа B_{k+1}.

Очевидно, для функции K особенность — внутренняя и ее порядок зависит от порядка особенностей семейства P. Непосредственное применение локальной теории [6] не позволяет установить зависимость между особенностями функций P и K. Такую возможность дают асимптотические разложения [7]. Однако классические разложения при больших значениях t ядра K для некоторых функций P вообще не информативны. Например, для функции податливости [2]

$$P(u) = \frac{\operatorname{ch} u - 1}{\operatorname{sh} u + u} \tag{4}$$

асимптотика функции K при $t \to \infty$ $(\mu \to 0)$ нулевая. Поэтому построим такое разложение семейства P, чтобы его нулевой член нес информацию об особенностях ядра и решениях уравнения (1).

Пусть $j_0^n(P)$ — струя функции P в окрестности U_0 точки $u = 0$ порядка n. Поскольку функция P в точке $u = 0$ имеет порядок особенности k, справедливо следующее свойство.

Свойство 1. *Функция P эквивалентна в смысле определения* 3 *функции $j_0^{k+1}(P)$ в окрестности U_0.*

Постоянная b в выражении (3) не влияет на особенности функции P, поэтому примем ее пока равной нулю.

Согласно условию функция P — экспоненциального типа, поэтому представим ее $(b = 0)$ асимптотически сходящимся рядом

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i u^i e^{-\alpha u}, \tag{5}$$

для которого $s_n(u) = \sum_{i=0}^{n} a_i u^i e^{-\alpha u}$ удовлетворяет условию $j_0^{n+1}(s_n) = j_0^{n+1}(P)$. Следовательно,

$$a_i = P^{(i)}(0) + \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k \frac{\alpha^k}{(k+1)!} a_{i-k-1}.$$

Определение 5. *Функции* $f \in E_n^1(M \times D, N)$ *и* $f_1 \in E_n^1(M_1 \times D_1, N_1)$ *глобально эквивалентны, если они эквивалентны по определению* 3 *и экспоненциального типа одинаковой степени.*

Лемма 1. *Функции* P *и* s_{k+1} *глобально эквивалентны.*

Справедливость леммы следует из свойства 1 и представления функции P рядом (5). Степень экспоненциального типа определяется порядком особенности функции P.

Из леммы вытекают два следствия.

***Следствие* 1.** *Функция* s_{k+1} $(u \geq 0)$ *имеет единственную граничную критическую точку* $u = 0$ *типа* B_{k+1}.

***Следствие* 2.** *Любая частичная сумма* s_n, $n \geq k+1$, *имеет такой же порядок особенности в окрестности* U_0, *как и функция* P.

Установим связь между особенностями функций $P \in E_\infty(R^+ \times D, N)$ и $K \in E_\infty(R \times D, N_1)$.

Теорема 1. *Интеграл Фурье* (2) *преобразует изолированную особенность типа* B_{k+1} *функции* P *в точке* $u = 0$ *в особенность типа* $A_m + 2A_1$, $m = 2k-2$, *его значения в точке* $t = 0$.

Доказательство. Поскольку функция P имеет в точке $u = 0$ краевую особенность B_{k+1}, то согласно лемме 1 функция P глобально эквивалентна функции s_{k+1}. Интегрируя функцию $s_{k+1}(u)$, получаем [8]

$$\sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i a_i \frac{\partial^i}{\partial \alpha^i}\left(\frac{t}{\alpha^2 + t^2}\right). \tag{6}$$

Непосредственные вычисления особенностей функции (6) в точке $t = 0$ доказывают теорему.

Теорема также подтверждается тем, что нечетная функция K симметризирует порядок особенности функции P, делая его четным в точке $t = 0$, и так как в силу условий, наложенных на функцию P, $K(t) \to 0$ при $|t| \to \infty$, получим еще пару особенностей $A_1^{\pm}$.

Замечание. Функция $1 - P$ для выражения P вида (4) не имеет особенностей и поэтому ее Фурье-преобразование имеет только две особенности $A_1^{\pm}$.

Очевидно, выражение (6), с одной стороны, определяет глобальную струю порядка $k+1$ разложения функции K по степеням $t/(\alpha^2 + t^2)$, а с другой — ее асимптотику при $t \to \infty$ или $\mu \to 0$.

2. Особенности решений уравнения (1). Учитывая поведение функции P, определяемое (3), представим уравнение (1) в виде

$$Sq(x) + Tq(x) = \frac{1}{b\pi} f(x), \quad b \neq 0, \quad x \in l, \tag{7}$$

где S — сингулярный оператор,

$$Sq(x) = \frac{1}{\pi}\int_l \frac{q(\xi)}{\xi - x}d\xi, \qquad q \in E_0^{\nu}(l\times D, N),$$

$$Tq(x) = \frac{1}{b\pi}\int_l q(\xi)r\left(\frac{\xi - x}{\mu}\right)d\xi, \qquad r(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^{\infty}(P(u) - b)\sin(tu)\,du.$$

Нетрудно заметить, что функция $r \in E_n^1(R\times D, N)$, для нее справедлива теорема 1 и общий член ряда (6) при малых значениях μ является величиной порядка

$$O\left(\mu^{2m}\frac{t^{2m+1}}{(\alpha^2\mu^2 + t^2)^{2m+1}}\right), \qquad i = 2m,$$
$$O\left(\mu^{2m}\frac{t^{2m-1}}{(\alpha^2\mu^2 + t^2)^{2m}}\right), \qquad i = 2m - 1. \tag{8}$$

Очевидно, T — оператор Фредгольма для любого $\mu > 0$ и $q \in E_0^{\nu}(l\times D, N)$. Выясним поведение оператора T при малых значениях параметра μ.

Из соотношений (8) для общего члена разложения оператора T имеем

$$T_iq(x) = O\left(\mu^{2m}\int_l \frac{q(\xi)(\xi - x)^{2m+1}}{\left(\alpha^2\mu^2 + (\xi - x)^2\right)^{2m+1}}d\xi\right), \qquad i = 2m. \tag{9}$$

Лемма 2. *Пусть функция* $q \in E_0^{\nu}(l\times D, N)$, *тогда при значении параметра* $\mu \to 0$ *для оператора* T

$$T_iq(x) \to \begin{cases} 0, & x \in (-1, 1); \\ Cq(\pm 1), & x = \pm 1. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $i = 2m$. Рассмотрим интеграл

$$I(x, \mu) = \mu^{2m}\int_l \frac{(\xi - x)^{2m+1}d\xi}{\left(\alpha^2\mu^2 + (\xi - x)^2\right)^{2m+1}},$$

зафиксируем $x \in l$ и сделаем в нем замену $\xi - x = \mu u$. Тогда получим

$$I(x, \mu) = \int_{(-1-x)/\mu}^{(1-x)/\mu}\frac{u^{2m+1}}{(\alpha^2 + u^2)^{2m+1}}du.$$

Поскольку подынтегральная функция нечетная, то $I(x, 0) = 0$, если $x \in (-1, 1)$.

Покажем, что интеграл

$$Q(x, \mu) = \mu^{2m}\int_l \frac{q(\xi)(\xi - x)^{2m+1}}{\left(\alpha^2\mu^2 + (\xi - x)^2\right)^{2m+1}}d\xi$$

стремится к нулю, если $\mu \to 0$ и $x \in (-1, 1)$. Очевидно, для этого достаточно показать, что стремится к нулю выражение

$$|\,Q(x, \mu) - q(x)I(x, \mu)\,| = J(x, \mu).$$

Действительно, так как $|\,q(\xi) - q(x)\,| \le L|\,\xi - x\,|^{\nu}$ и согласно [8]

$$\int_0^{\infty}\frac{u^{\beta-1}}{(\alpha^2 + u^2)^{\gamma}}du = \frac{B(\beta/2, \gamma - \beta/2)}{2\alpha^{2\gamma-\beta}}, \qquad \beta > 1, \quad \gamma > 1,$$

то справедлива оценка

$$J(x,\mu) \le \mu^{2m}\int_l \frac{|q(\xi)-q(x)||\xi-x|^{2m+1}}{\left(\alpha^2\mu^2+(\xi-x)^2\right)^{2m+1}}\,d\xi \le$$

$$\le \mu^{2m+\nu}L\int_l \frac{|\xi-x|^{2m+\nu+1}}{\left(\alpha^2\mu^2+(\xi-x)^2\right)^{2m+1}}\,d\xi \le \mu^{\nu}L\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|u|^{2m+\nu+1}}{(\alpha^2+u^2)^{2m+1}}\,du =$$

$$= 2\mu^{\nu}L\int_0^{\infty}\frac{u^{2m+\nu+1}}{(\alpha^2+u^2)^{2m+1}}\,du = \frac{\mu^{\nu}L}{\alpha^{2m-\nu}}B\left(m+\frac{\nu}{2}+1,m-\frac{\nu}{2}\right). \tag{10}$$

Здесь $B(\cdot,\cdot)$ — бета-функция.

Пусть теперь $x=\pm 1$, функцию $Q(x,\mu)$ представим в виде

$$\mu^{2m}\int_l \frac{[q(\xi)-q(\pm 1)](\xi\mp 1)^{2m+1}}{\left(\alpha^2\mu^2+(\xi\mp 1)^2\right)^{2m+1}}\,d\xi + \mu^{2m}q(\pm 1)\int_l \frac{(\xi\mp 1)^{2m+1}}{\left(\alpha^2\mu^2+(\xi\mp 1)^2\right)^{2m+1}}\,d\xi.$$

Тогда первое слагаемое допускает оценку вида (10), а второе при значении $\mu\to$ $\to 0$ равно

$$\mp q(\pm 1)\int_0^{\infty}\frac{u^{2m+1}}{(\alpha^2+u^2)^{2m+1}}\,du = \mp\frac{q(\pm 1)}{2\alpha^{2m}}B(m+1,m).$$

Аналогично доказывается случай $i=2m-1$.

Для оператора Фредгольма, очевидно, справедливо следующее свойство.

Свойство 2. *Оператор* $T\in E_n^l(l\times D,N)$.

Кроме того, имеет место такое свойство.

Свойство 3. *Оператор Фредгольма особенность ядра* $r(t)$ *типа* A_m+2A_1 *переводит в особенность* A_{m+2} *функции* $Tq(x)$, $x\in R$.

Доказательство. Действительно, так как по теореме 1 ядро r имеет особенность A_m+2A_1 относительно разности $\xi-x$, то особенность будет той же по направлению x. Эта особенность описывается неполной струей $j_x^{m+3}(r)$ и является частным случаем струи, определяющей особенность A_{m+2} для параметрического пространства размерности $m+1$. Недостающее количество параметров к пространству D функции $Tq(x)$ получим после интегрирования.

Если $q\in E_0^{\nu}(l\times D,N)$, то сингулярный оператор (7) в пространстве Гельдера $H^{\nu}(l)$ обращается [9, с. 487]

$$q(x) = S^{-1}(f(x)-Tq(x)). \tag{11}$$

Вид оператора S^{-1} зависит от индекса ρ $(\rho=0,\pm 1)$ оператора S

$$S^{-1}\varphi(x) = -X(x)\left(\frac{1}{\pi}\int_l \frac{\varphi(\tau)}{X(\tau-x)}\,d\tau + c_0\right), \tag{12}$$

где

$$X(x) = \begin{cases}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{-1}, & c_0\ne 0 \quad \text{при} \quad \rho>0;\\ \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}, & c_0=0 \quad \text{при} \quad \rho=0.\end{cases}$$

Если $\rho<0$, то оператор S обращается только при выполнении условия

$$\int_l \frac{\varphi(x)}{X(x)}\,dx = 0, \qquad X(x)=\sqrt{1-x^2}$$

и при этом в формуле (12) следует положить $c_0=0$.

Интегралы вида (12) для полиномиальных функций вычисляются согласно [10]

$$\frac{1}{\pi}\int_{l}\frac{\tau^{m}}{X(\tau)(\tau-x)}\,d\tau = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{m-1} M_k x^{m-k-1} - x^{m}z(x), \qquad (13)$$

где

$$M_k = 2^{\alpha+\beta+1}\sum_{j=0}^{k}(-2)^j C_k^j\, B(\beta+j+1,\alpha+1),$$

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2}, \quad \rho > 0; \quad \alpha = \beta = -\frac{1}{2}, \quad \rho < 0;$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \rho = 0;$$

$$z(x) = \begin{cases} x, & \rho > 0; \\ 1, & \rho = 0; \\ 0, & \rho < 0. \end{cases}$$

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. *Оператор* S_1,

$$S_1\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_{l}\frac{\varphi(\tau)}{X(\tau)(\tau-x)}\,d\tau + c_0,$$

действует из класса $E_n^{\nu}(l\times D, N)$ *в* $E_n^{\nu}(l\times D_1, N_1)$.

Доказательство. Согласно теореме Привалова [11, с. 58] интеграл $S_1\varphi(x)$ определяет непрерывную функцию. Представим $S_1\varphi(x) = V(x)$ в виде

$$V(x) = \frac{1}{\pi}\int_{l}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(x)}{X(\tau)(\tau-x)}\,d\tau + \varphi(x)\frac{1}{\pi}\int_{l}\frac{d\tau}{X(\tau)(\tau-x)},$$

в котором второй интеграл по формуле (13) равен $z(x)$.

Производную функции V порядка $k \le n$ представим так:

$$V^{(k)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{l}\frac{\varphi(\tau)-\varphi_1(x,\tau)}{X(\tau)(\tau-x)^{k+1}}\,d\tau + \left(z(x)\varphi(x)\right)^{(k)},$$

$$\varphi_1(x,\tau) = \sum_{i=0}^{k}\frac{\varphi^{(i+1)}(x)}{i!}(\tau-x)^i.$$

Поскольку $\varphi^{(k)} \in H^{\nu}(l)$, $\nu = 1$, $k < n$, то на интервале l справедливо

$$|\varphi(\tau) - \varphi_1(x,\tau)| \le L_k|\tau - x|^{k+\nu},$$

поэтому по схеме доказательства из [11, с. 59, 60] получим существование и непрерывность функции $V^{(k)}$, причем $V^{(n)} \in H^{\nu}(l)$.

Из этой леммы вытекает такое следствие.

***Следствие* 3.** *Решение уравнения* (7) *имеет вид*

$$q(x) = X(x)\omega(x), \qquad \omega \in E_n^{\nu}(l\times D_1, N_1).$$

Установим порядок особенности семейства ω.

Теорема 2. *Оператор* S_1 *преобразует особенность* A_{m+2} *оператора* T *в особенности*: A_{m+3}, $\rho > 0$; A_{m+2}, $\rho = 0$; A_{m+1}, $\rho < 0$.

Доказательство. Очевидно, оператор S_1 изолированную особенность переводит в изолированную. Не нарушая общности, будем считать, что особая точка $\tau = 0$ функции $Tq(\tau)$ переводится оператором S_1 в особую точку $x = 0$.

В окрестности точки $x = 0$ согласно свойству 3 функция $\varphi \sim j_0^r(\varphi)$, где $j_0^r(\varphi)$ — полная струя порядка $r = m + 3$.

Покажем, что $S_1\varphi(x) \sim S_1 j_0^r(\varphi)$ в окрестности нуля.

Из эквивалентности φ и $j_0^r(\varphi)$ имеем диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{\varphi} & N_1 & \xrightarrow{S_1} & K_1 \\ h_1 \downarrow & & \downarrow h & & \downarrow g \\ I_1 & \xrightarrow{j_0^r} & N_1 & \xrightarrow{S_1} & K_2, \end{array}$$

где h_1, h — известные диффеоморфизмы, а оператор g определяется из условия $S_1(h) = g(S_1)$ и также имеет свойство диффеоморфизма согласно теореме 2 вместе со своим обратным $g^{-1} = S_1(h^{-1}(S(X)))$.

Поскольку

$$j_0^r(\varphi) \mapsto S_1\left(j_0^r(\varphi)\right) = j_0^{r_1}(\omega),$$

с учетом формул (13) получим

$$r_1 = r + 1, \quad \rho > 0; \qquad r_1 = r, \quad \rho = 0; \qquad r_1 = r - 1, \quad \rho < 0.$$

Теорема доказана.

Из следствия 3 и теоремы 2 в окрестности точки $x = 0$ имеем $q(x) \sim X(x) j_0^{r_1}(\omega)$.

Тогда непосредственные вычисления особенностей функции q приводят к следующему результату.

***Следствие* 4.** *Решение уравнения* (7) *имеет максимальный порядок особенности* A_p, *равный* $p = r_1 + 1$ *при* $\rho > 0$, $\rho < 0$ *и* $p = r_1 - 1$ *при* $\rho = 0$.

3. Решение уравнения (11) при малом параметре. Пусть $\dim D = k$, тогда нулевой член разложения (6) ядра $r(t)$ оператора $Tq(\xi)$, как следует из теоремы 1, должен иметь порядок $n \ge k + 2$.

Для дальнейшего удобно в уравнении (7) вместо величины b взять $a_0 = \lim_{u\to 0} P(u) \neq 0$. Поэтому получим

$$r_n(t) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_i \frac{\partial^i}{\partial\alpha^i}\left(\frac{t}{\alpha^2 + t^2}\right). \tag{14}$$

Решение уравнения (11) с учетом выражения (14) согласно следствию 3 представим в виде $q_n(x, \mu) = X(x)\omega_n(x, \mu)$, а само уравнение запишем так:

$$\omega_n(x, \mu) = Z(\omega_n, \mu) + \omega_n(x, 0), \tag{15}$$

$$Z(\omega_n, \mu) = \int_I \omega_n(\xi, \mu) G(\xi, x, \mu)\, d\xi,$$

$$\omega_n(x, 0) = -c_0 - \frac{1}{\pi^2 a_0}\int_I \frac{f(\tau)}{X(\tau)(\tau - x)}\, d\tau,$$

$$G(\xi, x, \mu) = \frac{1}{\pi^2 a_0} X(\xi) \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_i \int_I \frac{\partial^i}{\partial\alpha^i}\left(\frac{\xi - \tau}{\beta^2 + (\xi - \tau)^2}\right)\frac{d\tau}{X(\tau)(\tau - x)}, \quad \beta = \alpha\mu.$$

Для уравнения (15) из леммы 3 следует, что оператор Z действует в пространстве $C_n(l)$, а из леммы 2 — что $Z(\omega_n, \mu) \to 0$ при значении $\mu \to 0$, $x \in (-1, 1)$.

Чтобы найти решение уравнения (15) при малых значениях $\mu < \mu_0$, воспользуемся методом последовательных приближений по схеме

$$\omega_n^{(k)}(x, \mu) = Z\left(\omega_n^{(k-1)}, \mu\right) + \omega_0(x, 0). \tag{16}$$

Теорема 3. *Для итерационного процесса* (16) *существует такое число* $\mu_0 > 0$, *что при значениях* $\mu < \mu_0$ *процесс сходится.*

Доказательство. Преобразуем вначале сингулярный интеграл функции $G(\xi, x, \mu)$

$$\frac{1}{\pi}\int_l \frac{\xi - \tau}{\beta^2 + (\xi-\tau)^2}\frac{d\tau}{X(\tau)(\tau - x)} = \frac{x-\xi}{\beta^2 + (\xi - x)^2}\frac{1}{\pi}\int_l \frac{\tau - \xi}{X(\tau)\left(\beta^2 + (\xi-\tau)^2\right)}d\tau -$$

$$- \frac{\beta^2}{\beta^2 + (\xi - x)^2}\frac{1}{\pi}\int_l \frac{d\tau}{X(\tau)\left(\beta^2 + (\xi-\tau)^2\right)} + \frac{\xi - x}{\beta^2 + (\xi-x)^2}z(x). \tag{17}$$

Интегралы в выражении (17) вычисляются согласно [10]. Так, второй интеграл из выражения (17)

$$I_1 = \frac{\beta^2}{\pi}\int_l \frac{d\tau}{X(\tau)\left(\beta^2 + (\xi-\tau)^2\right)} = \begin{cases} \beta c\cos\dfrac{\gamma}{2} + \beta^2, & \rho > 0; \\ \dfrac{\beta}{c}\cos\dfrac{\gamma}{2}, & \rho < 0; \\ \dfrac{\beta}{c}\left((1+\xi)\cos\dfrac{\gamma}{2} - \beta\sin\dfrac{\gamma}{2}\right), & \rho = 0, \end{cases} \tag{18}$$

а первый —

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\int_l \frac{(\tau-\xi)\,d\tau}{X(\tau)\left(\beta^2 + (\xi-\tau)^2\right)} = \begin{cases} \xi - c\sin\dfrac{\gamma}{2}, & \rho > 0; \\ \dfrac{1}{c}\sin\dfrac{\gamma}{2}, & \rho < 0; \\ 1 + \dfrac{1}{c}\left(\xi\sin\dfrac{\gamma}{2} + \beta\cos\dfrac{\gamma}{2}\right), & \rho = 0, \end{cases} \tag{19}$$

где

$$c = \sqrt[4]{(1+\beta^2-\xi^2)^2 + 4\beta^2\xi^2}, \qquad \gamma = \operatorname{arg\,tg}\frac{2\beta\xi}{1+\beta^2-\xi^2}.$$

Очевидно, если $\beta \to 0$, то значение интеграла (19) стремится к выражению $z(\xi)$ из формулы (13).

Вычисляя производные по параметру α от интеграла (17) с учетом формул (18), (19) и удерживая в них слагаемые не выше первого порядка по параметру μ, получаем

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{I_1}{\beta^2 + t^2}\right) = \mu\frac{ct^2}{(\beta^2+t^2)^2}V, \qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{tI_2}{\beta^2 + t^2}\right) = \mu\frac{t^3Y}{(\beta^2+t^2)^2}\cos\frac{\gamma}{2}, \tag{20}$$

где $V = c\cos\dfrac{\gamma}{2}$, $Y = c$, если $\rho > 0$; $V = \dfrac{\cos(\gamma/2)}{c}$, $Y = -\dfrac{1}{c}$, если $\rho < 0$, и $V = \dfrac{\cos(\gamma/2)}{c}(1+\xi) - \sin\dfrac{\gamma}{2}$, $Y = \dfrac{\xi + 1/2}{c}$ при $\rho = 0$. Здесь учтено, что

$$\left|\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha}\right| \le 2\mu \quad \text{и} \quad \alpha\mu^2 \le \frac{\partial c}{\partial\alpha} \le \frac{3}{2}\alpha\mu^2.$$

Покажем теперь, что $Z(\omega_n, \mu)$ — оператор сжатия в пространстве непрерывных функций $C[-1, 1]$:

$$\| Z(\omega_n, \mu)\|_C = \max\left| \int_l \omega_n(\xi, \mu)\, G(\xi, x, \mu)\, d\xi \right| < 1. \tag{21}$$

Для оценки

$$F = \left| \int_l \omega_n(\xi, \mu)\, G(\xi, x, \mu)\, d\xi \right|$$

воспользуемся представлением (17), формулами (20) и тем, что сингулярный интеграл в выражении функции G допускает смену порядка дифференцирования по параметру:

$$F \le \frac{2\alpha\mu}{\pi}\left|\frac{a_1}{a_0}\right| \left(\left| Y\int_l \omega_n(\xi, \mu)\, X(\xi)\, \frac{(\xi - x)^3\, d\xi}{\left(\beta^2 + (\xi - x)^2\right)^2} \right| + \right.$$

$$\left. + \left| V\int_l \omega_n(\xi, \mu)\, X(\xi)\, \frac{(\xi - x)^2\, d\xi}{\left(\beta^2 + (\xi - x)^2\right)^2} \right| \right). \tag{22}$$

Рассмотрим первый интеграл из выражения (22) при условии

$$| q(\xi) - q(x) | \le L|\xi - x|^{\nu}.$$

Поступая так же, как при доказательстве леммы 2, получаем

$$|\circ| < 2^{\delta} L |Y_1| \beta^{\nu - \delta} \int_0^{\infty} \frac{u^{3+\nu-\delta}}{(1 + u^2)^2}\, du = 2^{\delta - 1} L |Y_1| \beta^{\nu-\delta} B\left(2 + \frac{\nu - \delta}{2}, \frac{\delta - \nu}{2}\right),$$

$$-1 < \nu - \delta < 0.$$

Аналогично для второго интеграла из (22) получим оценку

$$\frac{L}{2}|V|\beta^{\nu-1} B\left(1 + \frac{\nu}{2}, 1 - \frac{\nu}{2}\right).$$

Таким образом, имеем

$$F < \frac{L}{\pi}\alpha^{\nu}\mu^{\nu}\left|\frac{a_1}{a_0}\right| \left(2^{\delta}|Y_1|\alpha^{1-\delta}\mu^{1-\delta} B\left(2 + \frac{\nu - \delta}{2}, \frac{\delta - \nu}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + |V| B\left(1 + \frac{\nu}{2}, 1 - \frac{\nu}{2}\right)\right).$$

Следовательно, существует такое значение параметра μ_0, что при $\mu < \mu_0$ оператор Z — сжимающий в пространстве $C[-1, 1]$.

В заключение рассмотрим пример смешанной граничной задачи о вдавливании нормальной симметричной силой Q плоского гладкого штампа шириной $2a$ в упругую полосу толщиной h [2].

Пусть функция податливости для полосы имеет вид (4). Использовав замечание относительно свойств функции P, уравнение (15) представим в виде $(\rho > 0)$

$$\omega_1(x_n, \mu) + \int_l \omega_1(\xi, \mu)\, G(\xi, x, \mu)\, d\xi = c_0, \tag{23}$$

где

$$G(\xi, x, \mu) = \frac{1}{\pi^2} X(\xi) \int_l K(\xi - \tau) \frac{d\tau}{X(\tau)(\tau - x)},$$

$$K(t) = -\frac{t}{\beta^2 + t^2} + 2a_1\beta^2 \frac{t}{(\beta^2 + t^2)^2} + 2a_2\beta^2 t \frac{3\beta^2 - t^2}{(\beta^2 + t^2)^3}, \quad \beta = 2\alpha\mu.$$

Постоянные величины a_1, a_2 находятся по формулам

$$a_1 = \frac{1}{4\alpha} - 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right),$$

а неизвестная $\alpha > 0$ определяется из уравнения $4\alpha^2 - 3\alpha = 0$. Постоянная c_0 находится из условия

$$\int_l q(x)\, dx = \frac{Q}{a},$$

в котором $q(x) = \omega_1(x, \mu) X(x)$, $X(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$.

Сравним результаты работы [2, с. 321] (табл. 11) с решениями уравнения (23):

λ	4	2	1	0,5	0,25	0,125	0,05	0,01
[2]		0,350	0,395	0,442	0,475	0,494		
(23)	0,332	0,360	0,409	0,451	0,475	0,487	0,495	0,499

В таблице приведены значения $\dfrac{aq(0, \lambda)}{Q}$, $\lambda = \dfrac{\mu}{2}$. Как видно из приведенных в таблице результатов, отличие составляет не более 3,5 %.

1. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. – М.: Наука, 1986. – 336 с.
2. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. – М.: Наука, 1974. – 456 с.
3. *Грилицкий Д. В., Кизыма Я. М.* Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости. – Львов: Выща шк., 1981. – 136 с.
4. *Попов Г. Я.* Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. – Киев; Одесса: Выща шк., 1982. – 236 с.
5. *Шевляков Ю. А.* Матричные алгоритмы в теории упругости неоднородных сред. – Киев; Одесса: Выща шк., 1977. – 216 с.
6. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. – М.: Наука, 1982. – 304 с.
7. *Федорюк М. В.* Асимптотика: интегралы и ряды. – М.: Наука, 1987. – 544 с.
8. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
9. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1963. – 640 с.
10. *Ильман В. М.* Вычисление интегралов типа Коши по разомкнутому контуру // Математичне моделювання в інженерних і фінансово-економічних задачах: Зб. наук. праць. – Дніпропетровськ: Січ, 1998. – С. 13 – 26.
11. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 512 с.

Получено 19.04.2001,
после доработки — 15.03.2002