УДК 519.85

О. О. Ємець, О. В. Роскладка, С. І. Недобачій (Полтав. техн. ун-т)

НЕЗВІДНА СИСТЕМА ОБМЕЖЕНЬ ДЛЯ ЗАГАЛЬНОГО МНОГОГРАННИКА РОЗМІЩЕНЬ

We construct a system of restrictions for a general polyhedron of arrangements which does not contain surplus inequalities. The derivation of a nonreducible system enables one to significantly diminish a number of operations that are necessary to obtain the exact solution of problems of the optimization on arrangements.

Присвячено побудові системи обмежень для загального многогранника розміщень, що не містить надлишкових нерівностей. Одержання незвідної системи дозволяє суттєво зменшити кількість операцій, необхідних для отримання точного розв'язку задач оптимізації на розміщеннях.

В останні роки бурхливо розвивається оптимізація на комбінаторних множинах (див., наприклад, [1 – 3]). При цьому часто використовується апарат евклідової комбінаторної оптимізації для моделювання та розв'язування різних типів прикладних задач (див., наприклад, [3 – 8]). Серед них значне місце займають задачі на розміщеннях.

У цій статті висвітлюється один із суттєвих етапів дослідження евклідових комбінаторних множин — встановлення незвідної системи лінійних обмежень. Тут таку систему встановлено для загального многогранника розміщень — опуклої оболонки загальної множини розміщень [3].

У подальших викладках будемо користуватися наступними фактами та позначеннями, використовуючи, в основному, термінологію з [3].

Нехай J_n — множина n перших натуральних чисел, тобто $J_n = \{1, \ldots, n\}$. Мультимножиною $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_\eta\}$ називають сукупність елементів, серед яких можуть бути й однакові. Через $|G|$ позначимо кількість елементів у мультимножині G. Мультимножина, всі елементи якої різні, є множиною. Будь-яку мультимножину G можна задати її основою $S(G)$, тобто кортежем всіх її різних елементів і їх кратністю — числом повторень кожного елемента основи цієї мультимножини. Кратності η_i елементів e_i мультимножини часто записують у вигляді $e_i^{\eta_i}$, тобто $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_\eta\} = \{e_1^{\eta_1}, e_2^{\eta_2}, \ldots, e_n^{\eta_n}\}$. Упорядкована сукупність кратностей складає первинну специфікацію $[G]$ — кортеж $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$.

Назвемо k-вибіркою підмультимножину в мультимножині G, яка містить k елементів. Елементами загальної множини k-розміщень $E_{\eta n}^k(G)$ є всі k-вибірки з мультимножини G.

Будемо вважати, що елементи мультимножини G упорядковані:

$$g_j \leq g_{j+1} \quad \forall j \in J_{\eta-1}. \tag{1}$$

Відома [2] система, яка описує опуклу оболонку множини $E_{\eta n}^k(G)$ — загальний многогранник розміщень $\prod_{\eta n}^k(G)$: $\sum_{j=1}^{|\omega|} g_j \leq \sum_{i\in\omega} x_i \leq \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{\eta-j+1} \quad \forall \omega \subset J_k$.

Поставимо задачу: встановити незвідну систему обмежень цього многогранника.

Запишемо систему, що описує $\prod_{\eta n}^k(G)$, у вигляді

$$\sum_{j=1}^{|\omega|} g_j \leq \sum_{i\in\omega} x_i \tag{2}$$

$$\forall\, \omega \subset J_k$$

$$\sum_{i\in\omega} x_i \leq \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{\eta-j+1} \tag{3}$$

і введемо деякі необхідні поняття.

Назвемо $|\omega|$-спілкою сукупність нерівностей системи (2), (3), які мають однакове значення $|\omega|$.

Для $\prod_{\eta n}^{k}(G)$ назвемо характеристичною точкою гіперплощини $\sum_{i\in\omega} x_i = \sum_{j=1}^{|\omega|} g_j$, яка визначається нерівністю (2), точку $x' = (x_1', x_2', \ldots, x_k')$, якщо

$$x'_{\alpha_1} = x'_{\alpha_2} = \ldots = x'_{\alpha_{|\omega|}} = (g_1 + g_2 + \ldots + g_{|\omega|})/|\omega|,$$

$$x'_{\alpha_{|\omega|+1}} = \ldots = x'_{\alpha_k} = (g_{|\omega|+1} + \ldots + g_k)/(k - |\omega|).$$

Аналогічно характеристична точка гіперплощини $\sum_{i\in\omega} x_i = \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{\eta-j+1}$, яка визначається нерівністю (3), — це точка $x' = (x_1', x_2', \ldots, x_k')$, координати якої задовольняють співвідношення

$$x'_{\alpha_1} = \ldots = x'_{\alpha_{|\omega|}} = (g_\eta + g_{\eta-1} + \ldots + g_{\eta-|\omega|+1})/|\omega|,$$

$$x'_{\alpha_{|\omega|+1}} = \ldots = x'_{\alpha_k} = (g_1 + \ldots + g_{\eta-|\omega|})/(\eta - |\omega|).$$

Нехай у многограннику $\prod_{\eta n}^{k}(G)$ мультимножина G така: $G = \{e_1^{\eta_1}, e_2^{\eta_2}, \ldots, e_n^{\eta_n}\}$.

Теорема. *Якщо в первинній специфікації мультимножини* G $\eta_1 > 1$, *або* $\eta_n > 1$, *то надлишковими обмеженнями системи* (2), (3) *многогранника* $\prod_{\eta n}^{k}(G)$ *є:*

серед нерівностей системи (2) *при* $\eta_1 > 1$ — *усі нерівності* i*-спілок, де* i *задовольняє умови*

$$2 \leq i \leq \eta_1, \quad \eta - \eta_n \leq i \leq k-1, \tag{4}$$

серед нерівностей системи (3) *при* $\eta_n > 1$ — *усі нерівності* i*-спілок, де*

$$2 \leq i \leq \eta_n, \quad \eta - \eta_1 \leq i \leq k-1, \tag{5}$$

і тільки вони.

Доведення. Як відомо з [3], якщо для многогранника $\prod_{\eta n}^{k}(G)$ маємо $\eta_1 > 1$, або $\eta_n > 1$, то надлишковими обмеженнями в системі (2), (3) при $\eta_1 > 1$ є нерівності вигляду (2), для яких $1 < |\omega| \leq \eta_1$, а при $\eta_n > 1$ — нерівності вигляду (3), для яких $1 < |\omega| \leq \eta_n$.

Для доведення теореми доведемо спочатку твердження, сформульоване в [7] у вигляді леми.

Лема. *Якщо* $k > \eta - \eta_n$, *то надлишковими обмеженнями серед нерівностей* (2) *є нерівності, для яких* $\eta - \eta_n \leq |\omega| < k$. *Якщо* $k > \eta - \eta_1$, *то серед нерівностей* (3) *надлишковими є нерівності, для яких* $\eta - \eta_1 \leq |\omega| < k$.

Доведення. Якщо $1 < |\omega| \leq \eta_1$, то нерівності (2) мають вигляд $\sum_{i\in\omega} x_i \geq |\omega| g_1$, тобто є лінійними комбінаціями нерівностей $x_i \geq g_1$ $\forall\, i \in J_k$. Аналoгічно, якщо $1 < |\omega| \le \eta_n$, то нерівності (2) мають вигляд $\sum_{i\in\omega} x_i \le |\omega| g_\eta$, тобто є лінійними комбінаціями нерівностей $x_i \le g_\eta \ \forall\, i \in J_k$. При цьому для $|\omega| = k$ відповідно маємо

$$\sum_{i\in\omega} x_i \ \ge\ \sum_{j=1}^{k} g_j \ =\ \sum_{j=1}^{\eta-\eta_n} g_j + \sum_{j=\eta-\eta_n+1}^{k} g_j \ =\ \sum_{j=1}^{\eta-\eta_n} g_j + (k-\eta+\eta_n) g_\eta, \tag{6}$$

$$\sum_{i\in\omega} x_i \ \le\ \sum_{j=1}^{k} g_{\eta-j+1} \ =\ \sum_{j=1}^{\eta-\eta_1} g_{\eta-j+1} + \sum_{j=\eta-\eta_1+1}^{k} g_{\eta-j+1} \ =$$

$$=\ \sum_{j=1}^{\eta-\eta_1} g_{\eta-j+1} + (k-\eta+\eta_1) g_1. \tag{7}$$

Якщо $\eta - \eta_n \le |\omega| < k$, то

$$\sum_{i\in\omega} x_i \ \ge\ \sum_{j=1}^{\eta-\eta_n} g_j + \sum_{j=\eta-\eta_n+1}^{|\omega|} g_j \ =\ \sum_{j=1}^{\eta-\eta_n-1} g_j + (|\omega| - \eta + \eta_n) g_\eta. \tag{8}$$

Зі співвідношення (6) випливає $\sum_{j=1}^{\eta-\eta_n} g_j = \sum_{j=1}^{k} g_j - (k-\eta+\eta_n) g_\eta$. Підставивши даний вираз у співвідношення (8), одержимо нерівність $\sum_{i\in\omega} x_i \ge$ $\ge \sum_{j=1}^{k} g_j - (k - |\omega|) g_\eta$. Отже, при $k > \eta - \eta_n$ нерівності (2) є лінійними комбінаціями нерівностей (6) та нерівностей $x_i \le g_\eta$, $i \in J_k$, тобто є надлишковими.

Якщо $\eta - \eta_1 \le |\omega| < k$, то

$$\sum_{i\in\omega} x_i \ \le\ \sum_{j=1}^{\eta-\eta_1} g_{\eta-j+1} + \sum_{j=\eta-\eta_1+1}^{|\omega|} g_{\eta-j+1} \ =\ \sum_{j=1}^{\eta-\eta_1} g_{\eta-j+1} + (|\omega| - \eta + \eta_1) g_1. \tag{9}$$

Аналогічно із співвідношення (7) випливає рівність $\sum_{j=1}^{\eta-\eta_1} g_{\eta-j+1} =$ $= \sum_{j=1}^{k} g_{\eta-j+1} - (k-\eta+\eta_1) g_1$. Отже, враховуючи співвідношення (9), маємо $\sum_{i\in\omega} x_i \le \sum_{j=1}^{k} g_{\eta-j+1} + (k - |\omega|) g_1$, тобто при $k > \eta - \eta_1$ нерівності (3) є лінійними комбінаціями нерівностей (7) та нерівностей $x_i \ge g_1 \ \forall\, i \in J_k$, а тому вони є надлишковими. Лему доведено.

При $\eta_1 = k$ після вилучення з системи (2) нерівностей i-спілок, де i задовольняє (4), ця система складатиметься тільки з нерівностей першої спілки, які, очевидно, не є надлишковими. Аналогічно, у випадку $\eta_n = k$ після вилучення з системи (3) надлишкових нерівностей i-спілок, де i задовольняє (5), у ній залишаться лише ненадлишкові нерівності цієї системи першої спілки. Отже, залишається довести, що при $1 < \eta_1 < k$ система (2) не має надлишкових нерівностей, відмінних від нерівностей i-спілок, де i задовольняє (4), а при $1 < \eta_n < k$ система (3) не має надлишкових нерівностей, відмінних від нерівностей i-спілок, де i задовольняє (5).

Доведемо незвідність системи (2) за таким планом.

I. Встановимо, що в характеристичній точці гіперплощини, яка визначається довільно вибраною нерівністю будь-якої фіксованої спілки m, де m не задовольняє (4), кожне з обмежень системи (2), за винятком вибраної нерівності, перетворюється в строгу числову нерівність. Для цього розглядаються нерівності таких спілок.

І(А). Нерівності спілок m, для яких виконується умова

$$\eta_1 < m < \min\{k, \eta - \eta_n\}. \tag{10}$$

І(Б). Нерівності спілки 1.

І(В). Нерівність спілки k.

ІІ. Доводиться, що вилучення з системи (2) нерівності з будь-якої i-спілки, відмінної від i-спілок, де i задовольняє (4), приводить до зміни многогранника $\prod_{\eta n}^{k}(G)$.

І(А). Виберемо довільну нерівність

$$x'_{\alpha_1} + x'_{\alpha_2} + \ldots + x'_{\alpha_m} \geq g_1 + g_2 + \ldots + g_m \tag{11}$$

будь-якої фіксованої спілки m, де m задовольняє умову (10). Нехай точка $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_k^{(0)})$ — характеристична точка гіперплощини, яка визначається нерівністю (11). Будемо вважати, що

$$(g_1 + g_2 + \ldots + g_m)/m = \alpha, \qquad (g_{m+1} + g_{m+2} + \ldots + g_k)/(k-m) = \beta,$$

тобто $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_m^{(0)} = \alpha$, $x_{m+1}^{(0)} = x_{m+2}^{(0)} = \ldots = x_k^{(0)} = \beta$.

Оскільки елементи мультимножини G упорядковані за (1) і виконуються умови (10), (11), то

$$g_1 < \alpha < g_m, \tag{12}$$

$$g_{m+1} < \beta < g_k, \tag{13}$$

$$\alpha < \beta. \tag{14}$$

Отже, існують такі значення t_1 и t_2, для яких виконуються співвідношення

$$g_1 \leq g_2 \leq \ldots \leq g_{t_1} < \alpha \leq g_{t_1+1} \leq g_{t_1+2} \leq \ldots \leq g_k, \tag{15}$$

$$g_1 \leq g_2 \leq \ldots \leq g_{t_2} < \beta \leq g_{t_2+1} \leq g_{t_2+2} \leq \ldots \leq g_k, \tag{16}$$

причому $1 < t_1 < m$, $m + 1 < t_2 < k$. У точці $x^{(0)}$ нерівність (11) перетворюється на числову рівність

$$m\alpha = g_1 + g_2 + \ldots + g_m. \tag{17}$$

Покажемо, що всі нерівності $|\omega|$-спілок, $|\omega| \in J_{k-1} \setminus \{1\}$, системи (2) у точці $x^{(0)}$ перетворюються в строгі. Для цього розглянемо три випадки: 1) $|\omega| = m$, 2) $1 < |\omega| < m$, 3) $m < |\omega| < k$.

1. Будь-яка нерівність спілки $|\omega| = m$, відмінна від нерівності (11), містить u, $u \in J_m$, змінних x_j, де $j \in J_k \setminus J_m$, а тому в точці $x^{(0)}$ її ліва частина дорівнює $u\beta + (m-u)\alpha$. Оскільки виконується нерівність (14), то $u\beta + (m-u)\alpha = u(\beta - \alpha) + m\alpha > g_1 + g_2 + \ldots + g_m$. Отже, кожне з обмежень спілки m, за винятком обмеження (11), в точці $x^{(0)}$ перетворюється в строгу нерівність.

2. Розглянемо спочатку нерівності спілок $|\omega|$, $1 < |\omega| < m$, ліві частини яких містять тільки змінні x_j, де $j \in J_m$. У точці $x^{(0)}$ кожна з них набирає вигляду $|\omega|\alpha \geq g_1 + g_2 + \ldots + g_{|\omega|}$. Якщо $0 < |\omega| \leq t_1$, то, враховуючи співвідношення (15), маємо $|\omega|\alpha > g_1 + g_2 + \ldots + g_{|\omega|}$. За умови $t_1 < |\omega| < m$ із співвідношень (12) і (15) випливає нерівність

$$(m - |\omega|)\alpha < g_{|\omega|+1} + g_{|\omega|+2} + \ldots + g_m. \tag{18}$$

Дійсно, її ліва частина містить $m - |\omega|$ доданків α, де $\alpha \leq g_j$, а права —

$m-|\omega|$ доданків g_j, серед яких $g_m > \alpha$, $j \in J_m \setminus J_{|\omega|}$. Розглянемо рівність $g_1+g_2+\ldots+g_{|\omega|} = g_1+g_2+\ldots+g_m-(g_{|\omega|+1}+g_{|\omega|+2}+\ldots+g_m)$. Оскільки має місце співвідношення (17), то $g_1+g_2+\ldots+g_{|\omega|} = m\alpha-(g_{|\omega|+1}+g_{|\omega|+2}+\ldots+g_m)$. Враховуючи нерівність (18), одержуємо строгу нерівність $|\omega|\alpha = m\alpha-(m-|\omega|)\alpha > m\alpha-(g_{|\omega|+1}+g_{|\omega|+2}+\ldots+g_m) = g_1+g_2+\ldots+g_{|\omega|}$. Отже, всі нерівності спілок $|\omega|$, $1<|\omega|<m$, які містять тільки змінні x_j, де $j \in J_m$, в точці $x^{(0)}$ перетворюються в строгі.

Виберемо тепер будь-яку іншу нерівність спілки $|\omega|$, $1<|\omega|<m$, тобто таку, яка містить ν, $\nu \in J_{|\omega|}$, змінних x_j, де $j \in J_k \setminus J_m$. Ліва частина такої нерівності в точці $x^{(0)}$ набирає вигляду $\nu\beta+(|\omega|-\nu)\alpha = \nu(\beta-\alpha)+|\omega|\alpha$. Враховуючи нерівність (14), маємо

$$\nu\beta+(|\omega|-\nu)\alpha = \nu(\beta-\alpha)+|\omega|\alpha > |\omega|\alpha \geq g_1+g_2+\ldots+g_{|\omega|}.$$

Таким чином, усі нерівності спілок $|\omega|$, $1<|\omega|<m$, у точці $x^{(0)}$ перетворюються в строгі.

3. Аналогічно до випадку 2 спочатку розглянемо тільки нерівності системи (2) спілок $|\omega|$, $m<|\omega|<k$, які містять усі змінні x_j, де $j \in J_m$. У точці $x^{(0)}$ кожна з цих нерівностей перетворюється в таку: $m\alpha+(|\omega|-m)\beta \geq g_1+g_2+\ldots+g_m+g_{m+1}+\ldots+g_{|\omega|}$. Якщо $m<|\omega|\leq t_2$ $(m<t_2<k)$, то із співвідношення (16) випливає нерівність $(|\omega|-m)\beta > g_{m+1}+g_{m+2}+\ldots+g_{|\omega|}$ (ліва її частина містить $|\omega|-m$ доданків β, $\beta > g_j$, а права — $|\omega|-m$ доданків g_j, $j \in J_k \setminus J_{|\omega|}$). Беручи до уваги рівність (17), маємо $m\alpha+(|\omega|-m)\beta > g_1+g_2+\ldots+g_m+g_{m+1}+\ldots+g_{|\omega|}$. Нехай $t_2<|\omega|<k$. За цієї умови в силу співвідношень (13), (16) має місце нерівність

$$(k-|\omega|)\beta < g_{|\omega|+1}+g_{|\omega|+2}+\ldots+g_k. \tag{19}$$

Розглянемо рівність

$$g_1+g_2+\ldots+g_{|\omega|} = g_1+g_2+\ldots+g_k-(g_{|\omega|+1}+g_{|\omega|+2}+\ldots+g_k).$$

Оскільки $m\alpha+(k-m)\beta = g_1+g_2+\ldots+g_k$, то $g_1+g_2+\ldots+g_{|\omega|} = m\alpha+(k-m)\beta-(g_{|\omega|+1}+g_{|\omega|+2}+\ldots+g_k)$. Враховуючи нерівність (19), маємо $m\alpha+(|\omega|-m)\beta = m\alpha+(k-m)\beta-(k-|\omega|)\beta > m\alpha+(k-m)\beta-(g_{|\omega|+1}+g_{|\omega|+2}+\ldots+g_k) = g_1+g_2+\ldots+g_{|\omega|}$. Отже, нерівності спілок $|\omega|$, $m<|\omega|<k$, які містять усі змінні x_j, де $j \in J_m$, у точці $x^{(0)}$ перетворюються в строгі.

Тепер розглянемо нерівності довільної спілки $|\omega|$, $m<|\omega|<k$, які містять не всі змінні x_j, де $j \in J_m$. Будь-яка з таких нерівностей містить на μ змінних x_j більше (де $j \in J_k \setminus J_m$, $1 \leq \mu \leq m$) порівняно з розглянутими нерівностями цієї ж спілки. Отже, ліва її частина в точці $x^{(0)}$ дорівнює $(m-\mu)\alpha+(|\omega|-m+\mu)\beta$. Беручи до уваги умову (14), маємо

$$(m-\mu)\alpha+(|\omega|-m+\mu)\beta = m\alpha+(|\omega|-m)\beta+\mu(\beta-\alpha) >$$
$$> m\alpha+(|\omega|-m)\beta > g_1+g_2+\ldots+g_{|\omega|}.$$

Отже, у точці $x^{(0)}$ усі нерівності спілок $|\omega|$, $m<|\omega|<k$, перетворюються в строгі.

Таким чином, розглянуто всі з трьох можливих випадків і доведено, що будь-яка нерівність довільної $|\omega|$-спілки, де $|\omega| \in J_{k-1} \setminus \{1\}$, за винятком нерівності (11), в характеристичній точці $x^{(0)}$ гіперплощини, що визначається нерівністю (11), за умови (10) перетворюється в строгу нерівність. Пункт I(А) доведено.

Викладене вище має місце і у випадках, коли $m = 1$ та $m = k$. Доведення аналогічне п. I(А). Розглянемо його.

I(Б). Нехай $m = 1$. Виберемо у цій спілці довільну нерівність

$$x_\omega \geq g_1, \quad \omega \in J_k, \quad |\omega| = 1. \tag{20}$$

Нехай $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_k^{(1)})$ — характеристична точка гіперплощини, яка визначається нерівністю (20). Позначимо $(g_1 + g_2 + \ldots + g_k)/(k-1) = \beta^{(1)}$. Тоді $x_1^{(1)} = g_1$, $x_2^{(1)} = x_3^{(1)} = \ldots = x_k^{(1)} = \beta^{(1)}$. Оскільки виконується (1), то

$$g_1 \leq g_2 < \beta^{(1)} < g_k. \tag{21}$$

Отже, існує таке t_3, для якого має місце нерівність

$$g_1 \leq g_2 \leq \ldots \leq g_{t_3} < \beta^{(1)} \leq g_{t_3+1} \leq g_{t_3+2} \leq \ldots \leq g_k, \tag{22}$$

причому $2 \leq t_3 < k$.

Покажемо, що у точці $x^{(1)}$ усі нерівності, за винятком нерівності (20), будь-якої $|\omega|$-спілки, $|\omega| \in J_k$, перетворюються в строгі. Для цього розглянемо такі три випадки: 1) $|\omega| = 1$, 2) $1 < |\omega| \leq t_3$, 3) $t_3 < |\omega| < k$.

1. Кожна з нерівностей спілки $|\omega| = 1$, за винятком нерівності (20), у точці $x^{(1)}$ перетворюється в строгу числову нерівність $\beta^{(1)} > g_1$.

2. Нехай $1 < |\omega| \leq t_3$. Розглянемо спочатку ті нерівності, які містять x_ω. У точці $x^{(1)}$ кожна з них набирає вигляду $g_1 + (|\omega| - 1)\beta^{(1)} \geq g_1 + g_2 + \ldots + g_{|\omega|}$, або $(|\omega| - 1)\beta^{(1)} \geq g_2 + \ldots + g_{|\omega|}$. Враховуючи співвідношення (22), маємо $(|\omega| - 1)\beta^{(1)} > g_2 + \ldots + g_{|\omega|}$. Будь-яка нерівність (зі спілок, що розглядаються), яка містить x_ω, в силу умови (21) у точці $x^{(1)}$ перетворюється в строгу нерівність $|\omega|\beta^{(1)} > g_1 + g_2 + \ldots + g_{|\omega|}$.

3. Нехай $t_3 < |\omega| < k$. Аналогічно до випадку 2 розглянемо спочатку ті нерівності, які містять x_ω. У точці $x^{(1)}$ кожна з них набирає вигляду $g_1 + (|\omega| - 1)\beta^{(1)} > g_1 + g_2 + \ldots + g_{|\omega|}$. За умови $t_3 < |\omega| < k$ із співвідношень (21), (22) випливає нерівність $(k - |\omega|)\beta^{(1)} > g_{|\omega|+1} + g_{|\omega|+2} + \ldots + g_k$. Оскільки $g_1 + (k-1)\beta^{(1)} = g_1 + g_2 + \ldots + g_k$, то

$$g_1 + (|\omega| - 1)\beta^{(1)} = g_1 + (k-1)\beta^{(1)} - (k - |\omega|)\beta^{(1)} >$$

$$> g_1 + g_2 + \ldots + g_k - \left(g_{|\omega|+1} + g_{|\omega|+2} + \ldots + g_k\right) = g_1 + g_2 + \ldots + g_{|\omega|}.$$

За умови (21) кожна з нерівностей даних спілок, яка не містить x_ω, у точці $x^{(1)}$ перетворюється в строгу нерівність $|\omega|\beta^{(1)} > g_1 + g_2 + \ldots + g_{|\omega|}$.

Таким чином, у характеристичній точці $x^{(1)}$ гіперплощини, яка визначається нерівністю (20) 1-спілки, усі нерівності системи (2), за винятком нерівності (20), перетворюються в строгі.

I(В). Нехай $m = k$. Виберемо нерівність

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k \geq g_1 + g_2 + \ldots + g_k. \tag{23}$$

Позначимо через $x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_k^{(2)})$ характеристичну точку гіперплощини, яка визначається цією нерівністю. Нехай $(g_1 + g_2 + \ldots + g_k)/k = \alpha^{(1)}$. Тоді $x_1^{(2)} = x_2^{(2)} = \ldots = x_k^{(2)} = \alpha^{(1)}$. Оскільки виконується умова $1 < \eta_1 < k$, то

$$g_1 < \alpha^{(1)} < g_k. \tag{24}$$

Отже, існує таке t_4, для якого має місце нерівність

$$g_1 \leq \ldots \leq g_{t_4} < \alpha^{(1)} \leq g_{t_4+1} \leq g_{t_4+2} \leq \ldots \leq g_k, \tag{25}$$

причому $1 < t_4 < k$.

Покажемо, що в точці $x^{(2)}$ усі нерівності, за винятком нерівності (23), будь-якої $|\omega|$-спілки, $j \in J_k$, перетворюються в строгі. Для цього, як і раніше, розглянемо такі випадки: 1) $1 < |\omega| \leq t_4$, 2) $t_4 < |\omega| < k$, 3) $|\omega| = k$.

1. Нехай $1 < |\omega| \leq t_4$. При цій умові із співвідношення (25) безпосередньо випливає, що в точці $x^{(2)}$ всі нерівності перетворюються в строгі числові нерівності $|\omega| \alpha^{(1)} > g_1 + g_2 + \ldots + g_{|\omega|}$.

2. Якщо $t_4 < |\omega| < k$, то нерівності в точці $x^{(2)}$ набирають вигляду $|\omega| \alpha^{(1)} \geq$ $\geq g_1 + g_2 + \ldots + g_{|\omega|}$. За умови $t_4 < |\omega| < k$ із співвідношень (24), (25) випливає строга нерівність $(k - |\omega|)\alpha^{(1)} < g_{|\omega|+1} + g_{|\omega|+2} + \ldots + g_k$. Оскільки $k\alpha^{(1)} = g_1 +$ $+ g_2 + \ldots + g_k$, то

$$|\omega| \alpha^{(1)} = k\alpha^{(1)} - (k - |\omega|)\alpha^{(1)} > k\alpha^{(1)} - \left(g_{|\omega|+1} + g_{|\omega|+2} + \ldots + g_k\right) =$$
$$= g_1 + g_2 + \ldots + g_k - \left(g_{|\omega|+1} + g_{|\omega|+2} + \ldots + g_k\right) = g_1 + g_2 + \ldots + g_{|\omega|}.$$

3. У спілці $|\omega| = k$ обмеження (23) у точці $x^{(2)}$ перетворюється у рівність $k\alpha^{(1)} = g_1 + g_2 + \ldots + g_k$. Ліва частина будь-якої іншої нерівності цієї спілки в точці $x^{(2)}$ набирає вигляду $(k-1)\alpha^{(1)}$. Оскільки виконується умова (24), то $(k-1)\alpha^{(1)} > k\alpha^{(1)} = g_1 + g_2 + \ldots + g_k$.

Отже, в характеристичній точці $x^{(2)}$ гіперплощини, яка визначається нерівністю (23) m-спілки $(m = k)$, усі нерівності, за винятком (23), будь-якої $|\omega|$-спілки, $|\omega| \in J_k$, перетворюються в строгі нерівності.

II. Залишилося довести, що існує така точка, яка задовольняє усі обмеження системи (2), крім вибраної нерівності, тобто вилучення з системи (2) вибраної нерівності приводить до зміни многогранника $\prod_{\eta n}^{k}(G)$.

Виберемо з (2) довільну нерівність

$$x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \ldots + x_{\alpha_m} \geq g_1 + g_2 + \ldots + g_m \tag{26}$$

довільної m-спілки, $m \in J_k$, де m не задовольняє (4), системи (2). Нехай $x^* =$ $= \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*\right)$ — характеристична точка гіперплощини, яка визначається нерівністю (26). У точці x^* усі нерівності $|\omega|$-спілок, $|\omega| \in J_k$, за винятком нерівності (26), перетворюються в строгі числові нерівності, що доведено вище (п. I). Нехай p — кількість таких нерівностей. (Оскільки система (2) містить $2^k - 1$ обмежень, то $p = 2^k - 2$.) Пронумеруємо ці строгі числові нерівності та позначимо через $X_s^* > G_s^*$ ту з них, номер якої s. Позначимо

$$(g_1+g_2+\ldots+g_m)/m = \alpha^*, \quad (g_{m+1}+g_{m+2}+\ldots+g_k)/(k-m) = \beta^*.$$

Тоді $x_1^* = x_2^* = \ldots = x_k^* = \alpha^*$, $x_{m+1}^* = x_{m+2}^* = \ldots = x_k^* = \beta^*$. Зрозуміло, що $\forall s \in J_p \ \exists \varepsilon(s) > 0 : X_s^* - \varepsilon(s) > G_s^*$. Нехай $\varepsilon = \min_{s\in J_p} \{\varepsilon(s)\}$. Розглянемо систему (2) у точці $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k)$, де $\bar{x}_j = x_j^* - \varepsilon/m \quad \forall j \in J_m$, тобто $\bar{x}_j = \alpha^* - \varepsilon/m \quad \forall j \in J_m$. У цій точці нерівність (26) не виконується, оскільки

$$\bar{x}_1+\bar{x}_2+\ldots+\bar{x}_m = m\left(\alpha^*-\varepsilon/m\right) = m\alpha^*-\varepsilon < m\alpha^* = g_1+g_2+\ldots+g_m.$$

Усі інші обмеження системи (2) у точці $\bar{x}$, в силу вибору ε, виконуються як строгі нерівності. Отже, точка $\bar{x}$ задовольняє всі обмеження системи (2), крім нерівності (26), а тому вилучення з системи (2) цієї нерівності приводить до зміни многогранника $\prod_{\eta n}^{k}(G)$, тобто нерівність (26) не є надлишковим обмеженням.

З довільності вибору m-спілки, де m не задовольняє (4), та довільності вибору у цій спілці нерівності (26) випливає справедливість теореми для системи (2).

Незвідність системи (3) доводиться аналогічно з точністю до заміни системи (2) на (3), умови (4) на умову (5) і відповідних координат характеристичної точки.

Теорему доведено.

Розглянемо приклад побудови незвідної системи обмежень загального многогранника розміщень.

Нехай $G = \{2, 2, 5, 5, 8, 8, 8\}$, $k = 5$. Маємо $S(G) = \{2, 5, 8\}$, $\eta = 7$, $\eta_1 = 2$, $\eta_n = 3$. Тут $k > \eta - \eta_n$. Система лінійних обмежень, що описує загальний многогранник розміщень, запишеться таким чином:

при $|\omega| = 1$

$$x_1 \ge 2, \quad x_2 \ge 2, \quad x_3 \ge 2, \quad x_4 \ge 2, \quad x_5 \ge 2, \tag{27}$$

$$x_1 \le 8, \quad x_2 \le 8, \quad x_3 \le 8, \quad x_4 \le 8, \quad x_5 \le 8, \tag{28}$$

при $|\omega| = 2$

$$\begin{gathered} x_1+x_2 \ge 2+2, \quad x_2+x_4 \ge 2+2, \quad x_1+x_5 \ge 2+2, \quad x_3+x_5 \ge 2+2, \\ x_1+x_3 \ge 2+2, \quad x_2+x_5 \ge 2+2, \quad x_2+x_3 \ge 2+2, \quad x_4+x_5 \ge 2+2, \\ x_1+x_4 \ge 2+2, \quad x_3+x_4 \ge 2+2, \end{gathered} \tag{29}$$

$$\begin{gathered} x_1+x_2 \le 8+8, \quad x_2+x_4 \le 8+8, \quad x_1+x_5 \le 8+8, \quad x_3+x_5 \le 8+8, \\ x_1+x_3 \le 8+8, \quad x_2+x_5 \le 8+8, \quad x_2+x_3 \le 8+8, \quad x_4+x_5 \le 8+8, \\ x_1+x_4 \le 8+8, \quad x_3+x_4 \le 8+8, \end{gathered} \tag{30}$$

при $|\omega| = 3$

$$\begin{gathered} x_1+x_2+x_3 \ge 2+2+5, \quad x_1+x_4+x_5 \ge 2+2+5, \\ x_1+x_2+x_4 \ge 2+2+5, \quad x_2+x_3+x_4 \ge 2+2+5, \\ x_1+x_2+x_5 \ge 2+2+5, \quad x_2+x_3+x_5 \ge 2+2+5, \\ x_1+x_3+x_4 \ge 2+2+5, \quad x_2+x_4+x_5 \ge 2+2+5, \\ x_1+x_3+x_5 \ge 2+2+5, \quad x_3+x_4+x_5 \ge 2+2+5; \end{gathered} \tag{31}$$

$$\begin{gathered} x_1+x_2+x_3 \le 8+8+8, \quad x_1+x_4+x_5 \le 8+8+8, \\ x_1+x_2+x_4 \le 8+8+8, \quad x_2+x_3+x_4 \le 8+8+8, \\ x_1+x_2+x_5 \le 8+8+8, \quad x_2+x_3+x_5 \le 8+8+8, \end{gathered} \tag{32}$$

$$x_1 + x_3 + x_4 \le 8 + 8 + 8, \qquad x_2 + x_4 + x_5 \le 8 + 8 + 8,$$
$$x_1 + x_3 + x_5 \le 8 + 8 + 8, \qquad x_3 + x_4 + x_5 \le 8 + 8 + 8,$$

при $|\omega| = 4$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\ge 2 + 2 + 5 + 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &\ge 2 + 2 + 5 + 5, \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 &\ge 2 + 2 + 5 + 5, \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 &\ge 2 + 2 + 5 + 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\ge 2 + 2 + 5 + 5; \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\le 8 + 8 + 8 + 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &\le 8 + 8 + 8 + 5, \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 &\le 8 + 8 + 8 + 5, \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 &\le 8 + 8 + 8 + 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\le 8 + 8 + 8 + 5, \end{aligned} \tag{34}$$

при $|\omega| = 5$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\ge 2 + 2 + 5 + 5 + 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\le 8 + 8 + 8 + 5 + 5. \end{aligned} \tag{35}$$

За теоремою серед нерівностей системи (2) надлишковими є нерівності спілок $2 \le i \le \eta_1$, $\eta - \eta_n \le i \le k - 1$, тобто спілок 2 і 4 — системи (29), (33), а серед нерівностей системи (3) — нерівності спілок $2 \le i \le \eta_n$, тобто спілок 2, 3 — системи (30), (32). Таким чином, незвідна система складається з нерівностей систем (27), (28), (31), (34), (35).

Встановлення незвідної системи многогранника $\prod_{\eta n}^{k}(G)$ є важливим як саме по собі, так і для побудови ефективних алгоритмів отримання точного розв'язку задач оптимізації на розміщеннях, оскільки перехід до незвідної системи у більшості випадків значно скорочує кількість нерівностей в аналітичному описі многогранника. Остання в свою чергу дозволяє прогнозувати спрощення процесу знаходження розв'язків оптимізаційних задач на загальній множині розміщень.

1. *Сергиенко И. В., Каспшицкая М. Ф.* Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. – Киев: Наук. думка, 1981. – 288 с.
2. *Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К.* Многогранники, графы, оптимизация. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
3. *Стоян Ю. Г., Ємець О. О.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. – Київ: Ін-т системних досліджень освіти, 1993. – 188 с.
4. *Емец О. А.* Об экстремальных свойствах недифференцируемых выпуклых функций на евклидовом множестве сочетаний с повторениями // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 6. – С. 680 – 691.
5. *Емец О. О., Роскладка А. А.* Про оцінки мінімумів цільових функцій при оптимізації на сполученнях // Там же. – 1999. – **51**, № 8. – С. 1118 – 1121.
6. *Ємець О. О., Колечкіна Л. М., Недобачій С. І.* Дослідження областей визначення задач евклідової комбінаторної оптимізації на переставних множинах. – Полтава: Полтав. техн. ун-т, 1999. – 64 с.
7. *Roskladka O. V., Yemets O. O., Nedobachiy S. I.* About the system of linear restrictions, which describe a general polyhedron of the arrangements // VIII міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (11 – 14 травня 2000 р., Київ): Мат-ли конф. – Київ, 2000. – С. 354.
8. *Ємець О. О., Колечкіна Л. М.* Задачі оптимізації на переставленнях з дробово-лінійною цільовою функцією: властивості множини допустимих розв'язків // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 12. – С. 1630 – 1640.

Одержано 04.05.2001